

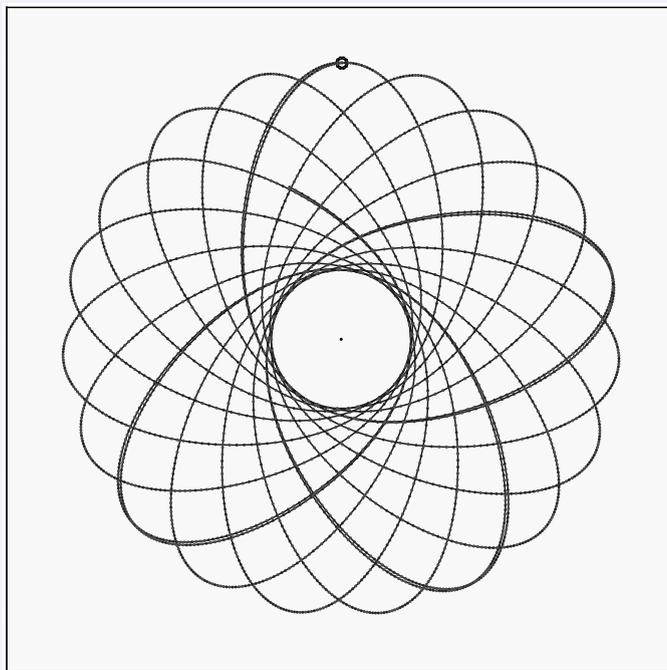
Apuntes de FÍSICA 1

(grado en Estudios en Arquitectura)

Volumen 1 de la serie:
MANUALES DE FÍSICA GENERAL

por
B. VILLACAMPA & A. BADIA

Departamento de Física de la Materia Condensada,
Universidad de Zaragoza (España)



GRADO EN ESTUDIOS EN ARQUITECTURA: **FÍSICA 1**

Colección de Manuales de Física General

Vol. 1

Esta colección recoge una serie de textos de Física General desarrollados como material de apoyo para nuestros alumnos de varias titulaciones científico-técnicas en la Universidad de Zaragoza.

Apuntes de Física 1 (Estudios en Arquitectura)
Segunda edición
Zaragoza, 2018

Autores:

M. Belén Villacampa Naverac y Antonio Badía Majós



Departamento de
Física de la
Materia Condensada
Universidad Zaragoza

VILLACAMPA NAVERAC, M Belén & BADÍA MAJÓS, Antonio
“APUNTES FÍSICA 1”
SEGUNDA EDICIÓN (REVISADA) ZARAGOZA, 2018
PRIMERA EDICIÓN ZARAGOZA, 2017

Este trabajo está licenciado bajo *Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License*.



El documento electrónico y las condiciones de uso pueden obtenerse en
http://personal.unizar.es/bvillaca/docencia/libros_docentes.html

Acerca de los autores

<http://personal.unizar.es/bvillaca/index.html>

<http://personal.unizar.es/anabadia/index.html>

© 2018, M Belén Villacampa Naverac

© 2018, Antonio Badía Majós

Índice

PRÓLOGO	IX
I LAS MAGNITUDES FÍSICAS	1
INTRODUCCIÓN	3
1. MAGNITUDES, UNIDADES Y DIMENSIONES	5
1.1. <i>Conceptos básicos</i>	5
1.2. <i>Magnitudes físicas. Análisis dimensional</i>	7
1.3. <i>Incertidumbre y cifras significativas</i>	8
2. PROPIEDADES VECTORIALES	11
2.1. <i>Magnitudes vectoriales</i>	11
2.2. <i>Representaciones coordenadas. Componentes de un vector</i> . .	12
2.3. <i>Operaciones con vectores: propiedades</i>	15
3. PROPIEDADES GEOMÉTRICAS Y ANALÍTICAS	19
3.1. <i>Geometría básica</i>	19
3.2. <i>Trigonometría básica</i>	20
3.3. <i>Cálculo diferencial e integral</i>	22
3.4. <i>Gradiente de una función escalar</i>	24
II FUNDAMENTOS DE MECÁNICA	29
INTRODUCCIÓN	31
4. CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA	33
4.1. <i>Vectores posición, velocidad y aceleración</i>	33
4.2. <i>Ejemplos de movimientos. Sistemas de referencia.</i>	35
5. DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA: FUERZAS Y MOMENTOS	41
5.1. <i>Leyes de Newton</i>	41

5.2.	<i>Tipos de fuerzas: aplicadas y de ligadura</i>	46
5.3.	<i>Diagramas de fuerzas. Ejemplos de situaciones de equilibrio</i>	51
5.4.	<i>Momento lineal y angular</i>	53
5.4.1.	<i>Momento e impulso lineal. Ley de conservación.</i>	53
5.4.2.	<i>Momento e impulso angular. Ley de conservación.</i>	55
5.5.	<i>Ejemplos de aplicación</i>	57
5.5.1.	<i>Movimiento de una partícula bajo la acción de fuerza de rozamiento viscoso.</i>	57
6.	DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA: TRABAJO Y ENERGÍA	61
6.1.	<i>Trabajo</i>	62
6.2.	<i>Potencia</i>	64
6.3.	<i>Energía cinética</i>	65
6.4.	<i>Fuerzas conservativas y disipativas. Energía potencial</i>	67
6.5.	<i>Variación/Conservación de la energía mecánica</i>	71
6.6.	<i>Representación gráfica y estudio de las curvas de energía potencial</i>	71
III	MOVIMIENTO OSCILATORIO	75
	INTRODUCCIÓN	77
7.	MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE	79
7.1.	<i>Ecuaciones básicas y ejemplos</i>	79
7.2.	<i>Trabajo y energía en el movimiento armónico simple</i>	81
7.3.	<i>Ejemplos</i>	84
7.4.	<i>Pequeñas oscilaciones. Aproximación armónica</i>	86
8.	OSCILACIONES AMORTIGUADAS	91
8.1.	<i>Ecuaciones básicas.</i>	91
8.2.	<i>Discusión de la solución exacta de la oscilación amortiguada</i>	94
9.	OSCILACIONES AMORTIGUADAS Y FORZADAS	99
9.1.	<i>Ecuaciones básicas y soluciones</i>	99
9.1.1.	<i>Primera aproximación: régimen estacionario</i>	101
9.1.2.	<i>Solución completa: régimen transitorio y estacionario</i>	101
9.2.	<i>Trabajo y energía</i>	103
9.3.	<i>Resonancia</i>	104
IV	DINÁMICA DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS	107
	INTRODUCCIÓN	109

10. CENTRO DE MASAS: ECUACIÓN DE MOVIMIENTO	111
10.1. <i>Definición de Centro de Masas: ejemplos</i>	111
10.1.1. Ejemplo: Centro de Masas de un alambre semicircular .	113
10.2. <i>Momento lineal y angular de un sistema de partículas</i>	114
10.2.1. Velocidad y aceleración del Centro de Masas.	114
10.2.2. Momento lineal. Conservación.	115
10.2.3. Momento angular. Conservación.	115
10.3. <i>Energía de un sistema de partículas</i>	118
10.3.1. Energía Cinética.	118
10.3.2. Energía Potencial.	118
10.3.3. Energía Mecánica. Teorema de conservación	119
10.4. <i>Consideraciones generales sobre el movimiento del sistema de partículas</i>	119
10.4.1. Cuadro-resumen:	120
10.5. <i>Ejemplo. Colisiones</i>	120
11. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO	125
11.1. <i>Rotación del sólido rígido en torno a un eje. Momento angular</i>	126
11.2. <i>Momento de inercia: cálculo, teoremas y ejemplos</i>	129
11.2.1. Teorema de los ejes paralelos o de Steiner.	129
11.2.2. Teorema de los ejes perpendiculares.	130
11.2.3. Ejemplos.	131
11.3. <i>Ecuación de rotación del sólido rígido</i>	134
11.4. <i>Cálculo del momento de una fuerza. Ejemplos</i>	135
11.5. <i>Energía cinética de rotación</i>	137
11.6. <i>Aplicaciones de la teoría del sólido rígido</i>	138
11.6.1. Ejemplo: el péndulo físico	138
11.6.2. El movimiento de rodadura	140
11.6.3. Las poleas reales	142
V EQUILIBRIO DE LOS SÓLIDOS	145
INTRODUCCIÓN	147
12. EQUILIBRIO DEL SÓLIDO RÍGIDO	149
12.1. <i>Condiciones de equilibrio de un sólido rígido</i>	149
12.2. <i>Fuerzas equivalentes. Sistemas de fuerzas paralelas. Centro de fuerzas</i>	153
13. DIAGRAMAS DE FUERZAS. FUERZAS APLICADAS Y DE LIGADURA	159
13.1. <i>Enlaces en sistemas planos</i>	159

13.2.	<i>Sistemas estáticamente determinados</i>	163
13.3.	<i>Solicitaciones</i>	170
14.	FUNDAMENTOS DE ELASTICIDAD	175
14.1.	<i>Esfuerzo y deformación</i>	175
14.2.	<i>Ejemplos</i>	179
VI	MECÁNICA DE FLUIDOS	181
	INTRODUCCIÓN	183
15.	ESTÁTICA DE FLUIDOS	185
15.1.	<i>Conceptos previos</i>	185
15.2.	<i>Presión hidrostática</i>	187
	15.2.1. Dependencia de la presión con la profundidad	188
	15.2.2. Aplicaciones. Medidas de la presión	190
	15.2.3. Cálculo de la fuerza hidrostática sobre una pared vertical	191
15.3.	<i>Fuerza de empuje. Principio de Arquímedes</i>	192
16.	DINÁMICA DE FLUIDOS	195
16.1.	<i>Conceptos previos</i>	195
16.2.	<i>Ecuación de continuidad</i>	197
16.3.	<i>Ecuación de Bernouilli</i>	198
16.4.	<i>Aplicaciones</i>	199
	16.4.1. Teorema de Torricelli	199
	16.4.2. Efecto Venturi	200
VII	ADDENDA	203
	GLOSARIO	205

PRÓLOGO

Este manual forma parte de una serie de textos concebidos como una herramienta de apoyo para los estudiantes de las asignaturas de Física de primer curso de universidad impartidas por los autores. Dada la variedad de titulaciones involucradas, en cada caso se ha hecho hincapié en aquellos capítulos y apartados que recojan los aspectos más relevantes para la formación de los alumnos, de acuerdo a lo recogido en el plan de estudios y guías docentes del correspondiente grado.

El que nos ocupa está dirigido a los estudiantes de primero de Arquitectura, como apoyo para la asignatura Física 1. El texto se ha estructurado en seis partes, cada una con varios capítulos, dedicados al estudio de la mecánica de una partícula y de sistemas de partículas, haciendo especial hincapié en la estática de sólidos; en la última parte se dan algunas nociones de mecánica de fluidos. Al final se ha incluido un anexo que contiene un glosario con la notación utilizada en el manual así como el alfabeto griego, con el que el lector deberá familiarizarse.

El trabajo personal de los alumnos es una necesidad incuestionable. A lo largo del texto se encontrarán algunos ejercicios propuestos y sugerencias; así, cuando en un apartado se lee que un resultado dado “se puede comprobar”, es muy recomendable intentar completar el desarrollo. Dichas comprobaciones deben considerarse como ejercicios adicionales a los problemas propiamente que se proponen en los distintos temas. Los problemas ayudan a asimilar los conocimientos previamente adquiridos: es indispensable comprender los conceptos físicos expuestos en la parte teórica para desenvolverse en la realización de problemas prácticos. Las tutorías con el profesor son un gran aliado para aclarar las dudas que puedan surgir al revisar la materia explicada en clase.

Queremos destacar que, a pesar de que este manual pretende ser autoconsistente, en el sentido de que los contenidos se van apoyando en los que ya han sido introducidos, la idea básica en la redacción ha sido recopilar las notas correspondientes al curso para el que se ha destinado. Por tanto, no se trata tanto de material de estudio autodidacta como de material de apoyo para

facilitar el seguimiento de la asignatura.

Somos conscientes de que un texto de estas características nunca puede darse por acabado; serán por supuesto bien bienvenidos los comentarios que nos ayuden a mejorarlo y corregir cualquier error.

Los autores deseamos aclarar que en la redacción se ha utilizado el género masculino para aligerar la lectura. Rogamos sobreentiendan “lector o lectora”, “alumno o alumna” cada vez que lean “lector”, “alumno”.

Por último, nos gustaría agradecer a M. Luisa Ramón su ayuda en el proceso de edición de este manual.

Septiembre 2018, Zaragoza - España

Parte I

LAS MAGNITUDES FÍSICAS

INTRODUCCIÓN

La Física Fundamental, motivo de estudio en esta asignatura, está integrada por diversas disciplinas. Entre ellas, existen diferencias no sólo en los fenómenos de interés, sino también en los métodos de descripción. Por ejemplo, en “Dinámica de una partícula” nos ocuparemos de la expresión completa de las coordenadas que definen su movimiento, mientras que en “Dinámica de fluidos” se afronta sólo de modo promedio el movimiento de miles de partículas.

No obstante, una característica esencial compartida por todos los casos es el carácter cuantitativo del estudio. En el terreno experimental esto significa que las mediciones deben proporcionar datos numéricos, objetivos y contrastables. En el terreno teórico, hemos de tener en cuenta que las leyes físicas que gobiernan los procesos físicos deben expresarse mediante ecuaciones matemáticas cuyas variables y parámetros serán las magnitudes físicas.

De estos aspectos nos ocuparemos en esta primera parte de la asignatura. Concretamente, revisaremos cómo deben expresarse las magnitudes físicas teniendo en cuenta su carácter escalar o vectorial. Introduciremos algunos conceptos de Análisis Dimensional, que no es otra cosa que el requerimiento de la consistencia entre las magnitudes que se relacionan mediante una ley física. Por ejemplo, resultaría inadmisibles igualar (o sumar) un tiempo con una velocidad, aunque nada impide su producto. Se hará hincapié asimismo en la importancia de conocer y expresar correctamente la incertidumbre inherente a cualquier medida

A continuación, ya incidiendo en aspectos más teóricos, haremos una breve recopilación de conceptos matemáticos imprescindibles. Repasaremos las propiedades básicas de las magnitudes vectoriales: operaciones entre vectores y representaciones coordenadas, y algunos elementos de análisis matemático: derivación e integración.

Capítulo 1

MAGNITUDES, UNIDADES Y DIMENSIONES

1.1. *Conceptos básicos*

Como se ha mencionado, es esencial el carácter cuantitativo de la Física. La verificación de cualquier teoría sobre los fenómenos físicos se basa en la medición y la concordancia de los resultados numéricos. Llamamos **Magnitud Física** a cualquier propiedad utilizada para caracterizar un fenómeno físico que se puede medir de forma reproducible. Serían ejemplos: tiempo, velocidad, energía, carga eléctrica, voltaje,...

Por otra parte, todas las magnitudes físicas se miden en términos de unos patrones que se conocen como **unidades**. El uso correcto y la soltura en el manejo de las unidades es imprescindible en Física.

Se llama **Magnitudes Fundamentales** a un conjunto básico de magnitudes en función del cual pueden expresarse todas las demás mediante las leyes físicas. Así, construir un **sistema de unidades** implica la elección de las unidades de las magnitudes fundamentales y derivar de ellas las demás.

El sistema internacional (SI), aceptado por convenios internacionales en prácticamente todo el mundo, considera hasta siete magnitudes fundamentales, que se muestran en la tabla 1.1.

Este sistema se conoce también como MKS, por las iniciales de las unidades fundamentales de las tres primeras magnitudes (metro, kilogramo, segundo). A partir de esas siete, aparece un gran número de unidades que se derivan de

MAGNITUD	UNIDAD	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura	kelvin	K
Intensidad lumínica	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

Cuadro 1.1: Magnitudes fundamentales del Sistema Internacional de unidades. En Física 1 solo utilizaremos algunas de ellas.

Potencia de 10	Prefijo	SÍMBOLO	Ejemplo
10^{-15}	femto	f	fs (femtosegundo)
10^{-12}	pico	p	pF (picofaradio)
10^{-9}	nano	n	nA (nanoamperio)
10^{-6}	micro	μ	μ Pa (micropascal)
10^{-3}	mili	m	mJ (milijulio)
10^3	kilo	k	kV (kilovoltio)
10^6	mega	M	MW (megawatio)
10^9	giga	G	GHz (gigahertzio)
10^{12}	tera	T	T Ω (teraohmio)

Cuadro 1.2: Prefijos con que se nombran los múltiplos y subdivisiones de las distintas unidades.

ellas (por ejemplo el ms^{-1} , unidad de velocidad). Algunas unidades derivadas importantes tienen nombre propio, como el Voltio (potencial eléctrico), el Julio (energía: $E \propto mv^2 \Rightarrow \text{Julio} = \text{kilogramo metro}^2/\text{segundo}^2$), el Newton (fuerza), etc.

Además del SI hay otros sistemas de unidades, como el CGS (por las iniciales de centímetro, gramo, segundo), que se usa en áreas específicas de la Física. Por otra parte, en disciplinas técnicas se utiliza el Sistema Técnico, cuyas magnitudes fundamentales son longitud (metro), fuerza (kilogramo-fuerza o simplemente kilogramo) y tiempo (segundo).

En muchas ocasiones, las unidades básicas son demasiado grandes o pequeñas para expresar la medida que nos interesa de modo razonable. En estos casos se utilizan los múltiplos y subdivisiones de las unidades (ver tabla 1.2).

MAGNITUD	UNIDADES	DIMENSIONES
Longitud	metro (m)	[L]
Masa	kilogramo (kg)	[M]
Tiempo	segundo (s)	[T]
Intensidad de corriente	amperio (A)	[I]
Carga eléctrica	culombio (C)	[Q] = [I] [T]
Energía	julio (J)	[M] [L] ² [T] ⁻²

Cuadro 1.3: Ecuación de dimensiones de algunas magnitudes fundamentales del sistema MKS, así como de la carga y de la energía.

1.2. Magnitudes físicas. Análisis dimensional

Para describir algunas magnitudes físicas basta una cantidad numérica y la unidad correspondiente. Es el caso de la masa o la temperatura, por ejemplo. Se conocen como **magnitudes escalares**.

Sin embargo, muchas magnitudes físicas requieren ser descritas mediante vectores, esto es, con módulo (con las correspondientes unidades), dirección, sentido (en ocasiones habrá que precisar también el punto de aplicación). Son las llamadas **magnitudes vectoriales**. Ejemplos de magnitudes vectoriales: velocidad, fuerza, campo eléctrico..

Para revisar el concepto de vector y sus tipos, así como algunas operaciones que se pueden realizar con ellos y sus propiedades, remitimos al lector al capítulo 2. En lo que sigue nos centraremos en las magnitudes escalares (o en el módulo de las magnitudes vectoriales) para introducir el concepto de análisis dimensional.

La expresión de una magnitud física en función de las fundamentales nos da las *dimensiones de la magnitud*. Llamamos **Ecuación de Dimensiones** a la expresión de cualquier magnitud en función de las magnitudes fundamentales en el correspondiente sistema de unidades.

Siguiendo con el ejemplo del sistema MKS, en la tabla 1.3 se proporciona la ecuación de dimensiones de algunas magnitudes fundamentales y derivadas.

Las ecuaciones que contienen magnitudes físicas han de ser **dimensionalmente consistentes**, es decir, sólo se pueden sumar o igualar términos con las mismas dimensiones. Este es un primer criterio de comprobación de la corrección de un resultado.

Ejemplo: Comprobar como ejercicio cuál de las dos expresiones que se proporcionan para la frecuencia de oscilación de la masa m (Fig. 1.1) es dimensionalmente consistente:

$$\nu_a = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2) m} \right]^{1/2}$$

$$\nu_b = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{k_1 + k_2}{m k_1 k_2} \right]^{1/2}$$

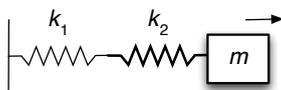


Figura 1.1: Masa oscilante m unida a dos muelles de constantes elásticas distintas.

1.3. Incertidumbre y cifras significativas

Cualquier medida va acompañada de una incertidumbre inherente a la misma. Si se mide un bolígrafo con una regla ordinaria, no tendría sentido decir, por ejemplo, que su longitud es 145,25 mm, porque la regla solo permite medir de forma “confiable” al mm más cercano. Por el contrario, si se utiliza un micrómetro, que mide distancias aproximándose al 0,01 mm más cercano, la medida anterior si que sería posible. Esa **incertidumbre** (también llamada **error**) se expresa habitualmente como un “ \pm ” que acompaña al valor numérico; así, en el primer caso diríamos que la longitud es 145 ± 1 mm, (o $14,5 \pm 0,1$ cm) . Eso debe interpretarse como que es poco probable que el bolígrafo mida más de 14,6 cm o menos de 14,4 cm. En el caso del micrómetro se expresaría la longitud como $145,25 \pm 0,01$ mm.

No es extraño expresar la incertidumbre en forma porcentual. Por ejemplo, si una resistencia viene expresada como $R = 680 \pm 10\%$ ohmios, debe interpretarse que lo más probable es que el valor real de la resistencia esté comprendido en un rango de ± 7 ohmios alrededor de 680.

A menudo no se da explícitamente la incertidumbre, sino que se indica con el número de **cifras significativas** (dígitos informativos) con el que se expresa la medida. Si se indica que un folio mide 31,5 cm de alto, hay que entender que los dos primeros dígitos (3 y 1) son correctos, pero que el tercero está afectado por un error de 0,1 cm.

Cuando se realizan cálculos con números con un cierto error, el resultado también estará afectado por una incertidumbre. Así, si se están multiplicando o dividiendo números, el resultado no puede tener más cifras significativas que el que menos tuviera de los números originales. La superficie de una hoja de papel de 31,5 cm de alto y 20,9 cm de ancho, será 658 cm^2 . Si se están sumando o restando dos números, el resultado no puede tener más dígitos significativos a la derecha de la coma decimal que el término que menos tenga. Por ejemplo, si se suma 11,24 más 13,1, el resultado da 24,3 no 24,34 (hasta las décimas, como el 13,1).

Es importante recordar que al reducir al número correcto de cifras significativas hay que **redondear**: la regla a seguir es que la última cifra significativa se aumentará en una unidad si la primera no significativa a su derecha es mayor o igual que 5 y se dejará igual si dicha cifra es menor que 5. Por ejemplo, si se desea redondear el número 1,3563342 a tres cifras significativas, lo correcto sería expresarlo como 1,36 y el número 1,4428638 como 1,44.

Cuando se utilizan números muy grandes o muy pequeños, es frecuente usar la **notación científica** que consiste en escribir la coma decimal tras la primera cifra significativa y a continuación el resto de cifras significativas. Finalmente, se multiplica ese número por 10 elevado a la potencia correspondiente. (Los números entre 0 y 10 se expresan sin la potencia). Por ejemplo, el número 0,00285 se expresaría como $2,85 \cdot 10^{-3}$. El uso de potencias de 10 es muy útil para aplicar bien el convenio de cifras significativas (3 en el ejemplo).

Para terminar, querríamos señalar que **exactitud** y **precisión** no son sinónimos en este contexto. La exactitud se refiere al grado de concordancia entre el valor exacto (“real”, “verdadero”) de la magnitud y el valor medido. La precisión se refiere, por una parte a la sensibilidad del aparato de medida. Una balanza de cocina bien calibrada, que es capaz de apreciar hasta 1 gramo, es menos precisa que una de laboratorio capaz de apreciar 0,1mg. Pero si ésta no está bien calibrada, no será exacta, aunque sea muy precisa. La precisión también hace referencia al grado de concordancia entre los resultados de las diferentes medidas.

Capítulo 2

PROPIEDADES VECTORIALES

Revisaremos el concepto de vector y sus tipos, así como algunas de las operaciones que se pueden realizar con ellos. Asimismo mostraremos algunas propiedades y aplicaciones de dichas operaciones. Se han recopilado aquellas que resultan esenciales para el desarrollo de la asignatura.

2.1. *Magnitudes vectoriales*

Retomando la clasificación de las magnitudes introducida en el capítulo 1.2, recordemos que muchas magnitudes físicas requieren ser descritas mediante vectores, esto es, con módulo (con las correspondientes unidades), dirección, sentido siendo relevante en ocasiones el punto de aplicación (origen del vector). Son las llamadas **magnitudes vectoriales**. Tal es el caso de la aceleración, la fuerza o los campos eléctrico y magnético.

Definición: Un vector es un segmento orientado.

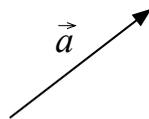


Figura 2.1: Un vector.

Existen distintos tipos de vectores desde un punto de vista matemático, pero cuyas diferencias son importantes a la hora de aplicar sus propiedades a las diferentes magnitudes físicas que tienen carácter vectorial.

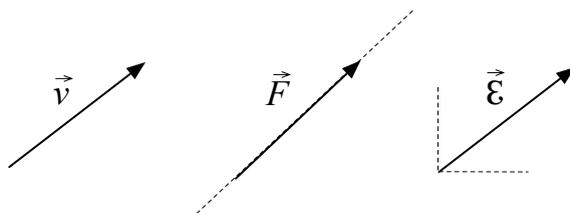


Figura 2.2: Ejemplos de vectores: libre (velocidad), deslizante (fuerza) y ligado (campo eléctrico).

Así, dependiendo de si su *punto de aplicación* puede trasladarse, los vectores se clasifican en **libres** (el origen puede trasladarse a cualquier punto, sin alterar el efecto de su acción: ej. velocidad de la luz), **deslizantes** (ej. el origen puede trasladarse a lo largo de la línea de acción del vector: fuerza aplicada sobre un sólido) o **ligados** (el origen no puede moverse: ej. el campo eléctrico en un punto dado).

Aquellos vectores tales que en su definición interviene un *giro*, se denominan **axiales** (como la velocidad angular, el par o momento de una fuerza o el momento angular). Todos los demás se clasifican en la categoría de **polares** (como el momento lineal). Es importante tener en cuenta que en una igualdad física los vectores a ambos lados de la igualdad deben ser del mismo tipo.

2.2. Representaciones coordenadas. Componentes de un vector

Todo vector admite representaciones en distintas bases del espacio. Generalmente, se suelen utilizar bases de vectores unitarios ortogonales:

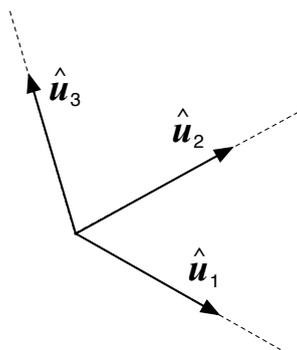


Figura 2.3: Vectores unitarios ortogonales.

Expresaremos los vectores en términos de la base del modo

$$\vec{a} = a_1 \hat{u}_1 + a_2 \hat{u}_2 + a_3 \hat{u}_3$$

siendo a_1 , a_2 y a_3 las **componentes del vector** en la base dada. Veámoslo de modo explícito en dos casos de bases ortogonales usuales en Física:

1. COORDENADAS CARTESIANAS

Fijemos un punto O en el espacio (origen del sistema de referencia) y consideremos tres direcciones perpendiculares preferentes X, Y y Z.

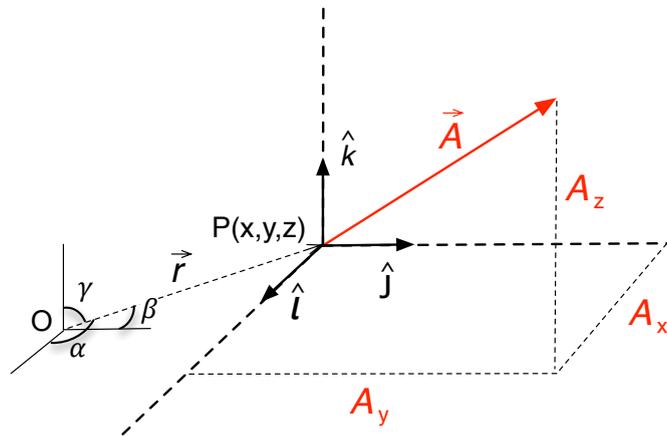


Figura 2.4: Componentes cartesianas del vector \vec{A} .

Los vectores unitarios correspondientes a esas direcciones \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} forman una base ortogonal en cada punto del espacio.

En este sistema, las coordenadas de un punto P vienen dadas por las componentes del vector de posición \vec{r} de dicho punto (\vec{r} =vector con origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto). Por otra parte, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ reciben el nombre de **cosenos directores** y determinar de forma unívoca la dirección del vector \vec{r} .

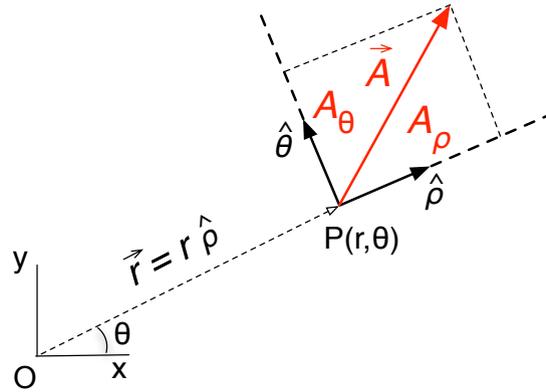
Un vector \vec{A} cualquiera con origen en P se puede representar como:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (2.1)$$

Nótese que los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} , son independientes del punto P elegido.

2. COORDENADAS POLARES EN EL PLANO

Fijemos de nuevo un punto O en el plano y consideremos un eje preferente (por convenio el X).

Figura 2.5: Componentes polares del vector \vec{A} .

En este caso, como se indica en la figura, la posición del punto P se especifica mediante las coordenadas r y θ , que corresponden a la distancia desde el origen y el ángulo con el eje X . Debe notarse que la base ortogonal $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ es distinta en cada punto del plano $P(r, \theta)$.

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_\rho \hat{\rho} + A_\theta \hat{\theta} \\ A_\rho &= A_\rho(r, \theta) \\ A_\theta &= A_\theta(r, \theta)\end{aligned}$$

Resultan útiles las siguientes expresiones, que relacionan las componentes cartesianas y polares de un punto determinado, así como los vectores unitarios en éste.

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \tan \theta = y/x \\ x &= r \cos \theta \quad ; \quad y = r \sin \theta\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad ; \quad \hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \\ \hat{i} &= \cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{\theta} \quad ; \quad \hat{j} = \sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{\theta}\end{aligned}$$

Estos conceptos quedarán más claros al aplicarlos en diferentes casos, que mostrarán la utilidad de usar sistemas coordenados adaptados a diferentes situaciones. Por ahora, se recomienda practicar con ellas de modo explícito mediante el ejercicio que se propone a continuación.

Ejemplo: Considérese un vector \vec{A} , con origen en el punto (1,2) y extremo en (4,3) expresados en coordenadas cartesianas. Obténgase las componentes

cartesianas y polares de \vec{A} . Representétese gráficamente el vector y sus componentes en ambos sistemas.

2.3. Operaciones con vectores: propiedades

Revisemos de modo escueto algunas operaciones que se pueden realizar con vectores y sus propiedades.

1. SUMA (el resultado es un vector)

Dados dos vectores \vec{a} y \vec{b} en componentes cartesianas, su suma se obtiene aplicando:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k} \quad (2.3)$$

También puede efectuarse la operación suma mediante la siguiente construcción geométrica, que muestra la suma de dos vectores realizada de modo gráfico (regla del paralelogramo).

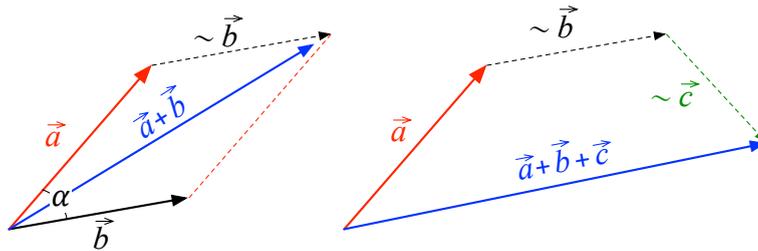


Figura 2.6: Interpretación gráfica de la suma de vectores.

En la construcción de la izquierda de la Fig. 2.6 puede verse que en este caso el módulo del vector suma se calcula aplicando el teorema del coseno:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 a b \cos \alpha}$$

Recordemos algunas propiedades de la suma:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \\ |\vec{a} + \vec{b}| &\leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \end{aligned} \quad (2.4)$$

2. PRODUCTO ESCALAR (es un escalar)

El producto escalar de dos vectores \vec{a} y \vec{b} definidos en coordenadas cartesianas se calcula así:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

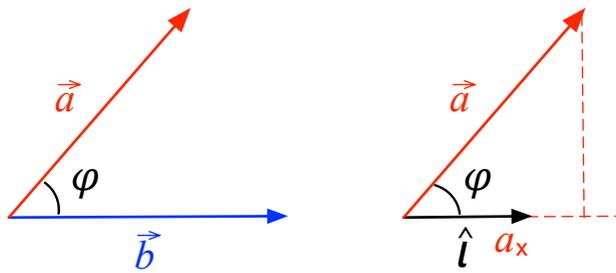


Figura 2.7: Interpretación geométrica del producto escalar.

En su interpretación geométrica (ver Fig. 2.7):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \varphi \quad (2.5)$$

Donde φ es el ángulo formado por \vec{a} y \vec{b} llevados a un origen común, y a y b los módulos de los vectores.

Nótese que $\vec{a} \cdot \vec{b}$ nos proporciona la proyección de \vec{a} sobre \vec{b} si \vec{b} es unitario (en general, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \text{ proy}_a b = b \text{ proy}_b a$). Aprovechando esta propiedad, se plantea el siguiente ejercicio: dadas las expresiones vistas en las ecuaciones 2.2 de cambio de coordenadas cartesianas a polares, partiendo de las directas obtenga las inversas.

Pista: $\hat{\rho} \cdot \hat{i} = \cos \theta$; $\hat{\theta} \cdot \hat{i} = -\sin \theta$ ($\hat{i} = \cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{\theta}$).

3. PRODUCTO VECTORIAL (es otro vector)

Dadas las componentes cartesianas de los vectores \vec{a} y \vec{b} , su producto vectorial \vec{c} en coordenadas cartesianas se expresa:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} \quad (2.6)$$

En su interpretación geométrica :

$$|\vec{c}| = a b \sin \varphi = S$$

S es el área del paralelepípedo definido por los vectores \vec{a} y \vec{b} cuando se hace coincidir su punto de aplicación, y \vec{c} apunta en la dirección perpendicular al plano que forman \vec{a} y \vec{b} .

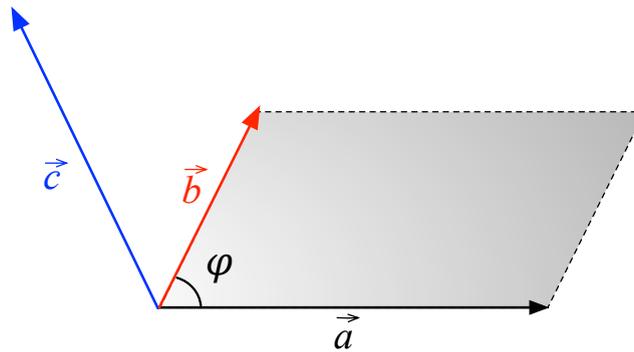
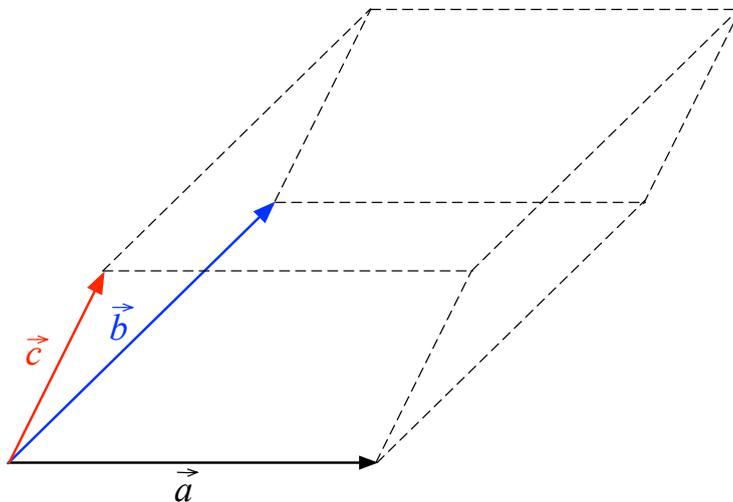


Figura 2.8: Producto vectorial.

Figura 2.9: Producto mixto: $V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$.

4. PRODUCTO MIXTO (es un escalar)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (2.7)$$

Se propone como ejercicio obtener su expresión en función de las componentes cartesianas de los vectores, utilizando las definiciones de producto escalar y vectorial en componentes cartesianas.

En su interpretación geométrica, el producto mixto corresponde al volumen del paralelepípedo formado por \vec{a} , \vec{b} y \vec{c}

PROPIEDADES: Se muestran a continuación algunas propiedades de las operaciones con vectores que pueden resultar de utilidad:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c}) (\vec{a} \cdot \vec{d})$$

Capítulo 3

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS Y ANALÍTICAS

En este tercer capítulo de la sección introductoria se presenta una recopilación de algunas propiedades geométricas y analíticas que deben conocerse bien.

3.1. Geometría básica

En los temas siguientes utilizaremos con frecuencia la relación entre un ángulo y el arco que abarca.

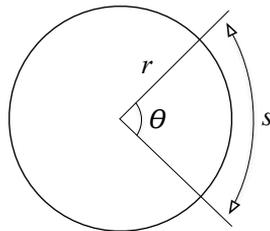


Figura 3.1: Circunferencia de radio r , ángulo central θ y arco abarcado s .

Definición del ángulo en radianes:

$$\theta = s/r \quad \text{radianes}$$

Es importante saber identificar la igualdad entre ángulos opuestos, alternos, o formados por segmentos perpendiculares, como muestra la figura.

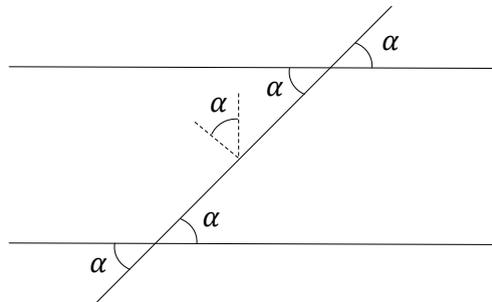


Figura 3.2: Igualdad entre diferentes ángulos definidos por secantes entre rectas paralelas o segmentos perpendiculares.

3.2. Trigonometría básica

Recordemos las definiciones básicas de la trigonometría y algunas relaciones que pueden ser útiles a lo largo de la asignatura.

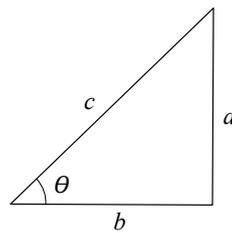


Figura 3.3: Triángulo rectángulo: notación utilizada en las definiciones de las razones trigonométricas.

Definiciones:

$$\text{sen } \theta = a/c$$

$$\text{cos } \theta = b/c$$

$$\text{tan } \theta = a/b$$

Relación fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$

Otras relaciones trigonométricas de utilidad:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A \pm B}{2} \cos \frac{A \mp B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = 2 \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{B - A}{2}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

Circunferencia trigonométrica: Es una construcción muy útil, que permite visualizar de modo sencillo la relación entre las funciones trigonométricas de ángulos que difieren en ciertos valores notables, como $\pi/2, \pi, \dots$. Por ejemplo:

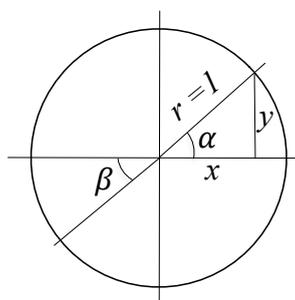


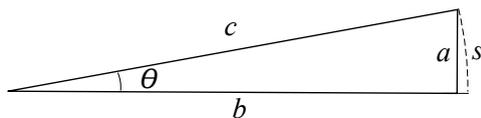
Figura 3.4: Circunferencia trigonométrica (radio unidad).

$$y = \operatorname{sen} \alpha \quad ; \quad x = \cos \alpha$$

$$\text{Si } \beta = \pi + \alpha: \quad \operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen} \alpha, \quad \cos \beta = -\cos \alpha.$$

Aproximaciones útiles:

Para finalizar esta parte, mostraremos una propiedad que nos resultará útil más adelante, y se refiere al caso límite de ángulos muy pequeños. Como

Figura 3.5: Aproximación $a \approx s$.

se deduce de la figura, en ese caso podemos aproximar con gran precisión los valores de algunas funciones trigonométricas mediante expresiones muy sencillas.

De manera exacta, tenemos $\theta = s/c$

Pero además, si el ángulo θ es muy pequeño, $s \approx a$ y entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= a/c \approx s/c = \theta \text{ rad} \\ \operatorname{tan} \theta &= a/b \approx s/b \approx s/c = \theta \text{ rad} \\ \operatorname{cos} \theta &= b/c \approx 1 \text{ (en una primera aproximación); } \operatorname{cos} \theta \approx 1 - \theta^2/2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.3. Cálculo diferencial e integral

En muchos casos, las leyes que expresan relaciones entre magnitudes físicas involucran expresiones diferenciales (derivadas) o integrales. En este apartado recordaremos algunas definiciones básicas para funciones de una variable. Nos apoyaremos en la figura 3.6, que recoge las ideas esenciales. Derivar una función es una operación que nos proporciona información local, en concreto nos dice cómo cambia la función en un punto determinado (si aumenta o disminuye al realizar pequeños desplazamientos en su variable). Por el contrario, la integración es una operación que proporciona información global del comportamiento de la función sobre una zona de su dominio. En el caso de una única variable, esto corresponde al área bajo la gráfica entre dos límites fijados. En términos más precisos, esto se expresa como sigue.

1. **Derivada de una función.** En la figura 3.6 se ilustra el concepto de derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0 . Nótese que indicamos que al incrementar la variable en Δx , el valor de la función se ve incrementado en Δf . El cociente entre dichos incrementos, que es lo que vamos a

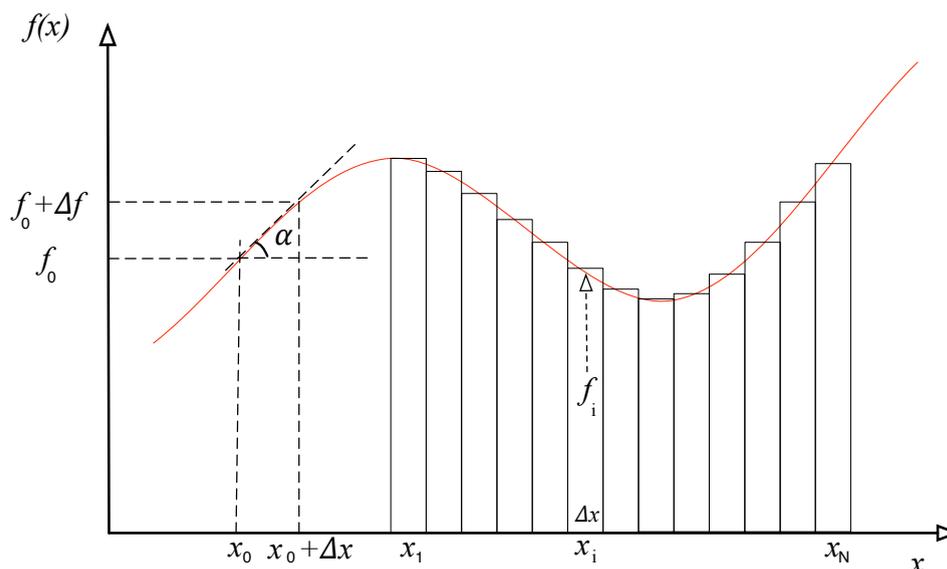


Figura 3.6: Aproximación a los conceptos de derivada e integral.

entender como derivada, puede interpretarse de modo geométrico. Si los incrementos son muy pequeños ($\Delta x \rightarrow 0$, en cuyo caso lo denominaremos diferencial: dx), la función se confunde con su tangente en ese punto y el cociente de incrementos corresponde a la tangente del ángulo α :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \tan \alpha$$

Así pues, la expresión df/dx es algo más que una notación; nos va a permitir obtener $df = f'(x) dx$. Esto justifica manipulaciones habituales, que realizaremos a lo largo del texto, del tipo:

$$\frac{dv}{dt} = -k v \Rightarrow dv = -k v dt \quad (3.2)$$

2. **Integral de una función.** El concepto de integral definida de una función también admite una interpretación geométrica sencilla (ver Fig. 3.6). En el caso que se muestra, representamos la suma incremental de los elementos de área rectangulares $f_i \Delta x_i$, que obviamente aproximarán el área bajo la gráfica en el caso límite ($\Delta x_i \rightarrow 0$). Esto se indica:

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i f(x_i) \Delta x_i$$

El concepto de *integral* de la función no debe confundirse con el de *primitiva* de la función. Éste último hace referencia al modo que habitualmente

tenemos de evaluar la integral de una función. Así pues, si definimos $F(x)$ (primitiva de $f(x)$) como aquella que cumple $F'(x) = f(x)$, se va a verificar

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = F(x_N) - F(x_1)$$

Esto puede demostrarlo el lector aplicando la relación $df = f'(x) dx$ de forma reiterada en el sumatorio anterior.

Como es bien sabido, encontrar la primitiva de una función puede resultar muy complicado fuera de los casos elementales. Existen técnicas que nos pueden ayudar como son los cambios de variable, integración por partes, etc. No obstante, insistiendo una vez más en que una cosa es integrar una función y otra hallar su primitiva, debemos indicar que en muchas ocasiones se aplican otros métodos, por ejemplo de tipo computacional, que pueden resultar muy convenientes.

Continuando con la expresión 3.2, como $dv = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \Delta v$ podemos escribir:

$$\frac{dv}{v} = -kdt; \quad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = \int_0^t -kdt$$

siendo $v(t)$ la velocidad en el instante t , y v_0 la velocidad en el instante inicial. Resolviendo las dos integrales -directas en este caso- se obtiene la función $v(t)$

$$\ln v(t) - \ln v_0 = \ln \frac{v(t)}{v_0} = -kt \rightarrow v(t) = v_0 e^{-kt}$$

3.4. Gradiente de una función escalar

Con cierta frecuencia, en Física se utilizan los conceptos de derivada direccional y de gradiente, cuyo significado es fácil de comprender en términos de la definición de derivada tratada en el punto anterior. La idea fundamental, que generaliza el concepto de derivada de una función, es la siguiente: si la función que nos interesa depende de más de una variable (por ejemplo $f(x, y)$)

los incrementos de ésta tendrán relación con los valores de Δx y Δy y con un nuevo aspecto, la tasa de variación de ambos ($\Delta y/\Delta x$). Puesto que este cociente define un ángulo en el plano XY que es donde la función toma valores, hablaremos de derivada direccional. En términos sencillos, la variación de la función depende no sólo de cuánto nos movamos, sino de hacia dónde nos movamos. Veámoslo con un ejemplo.

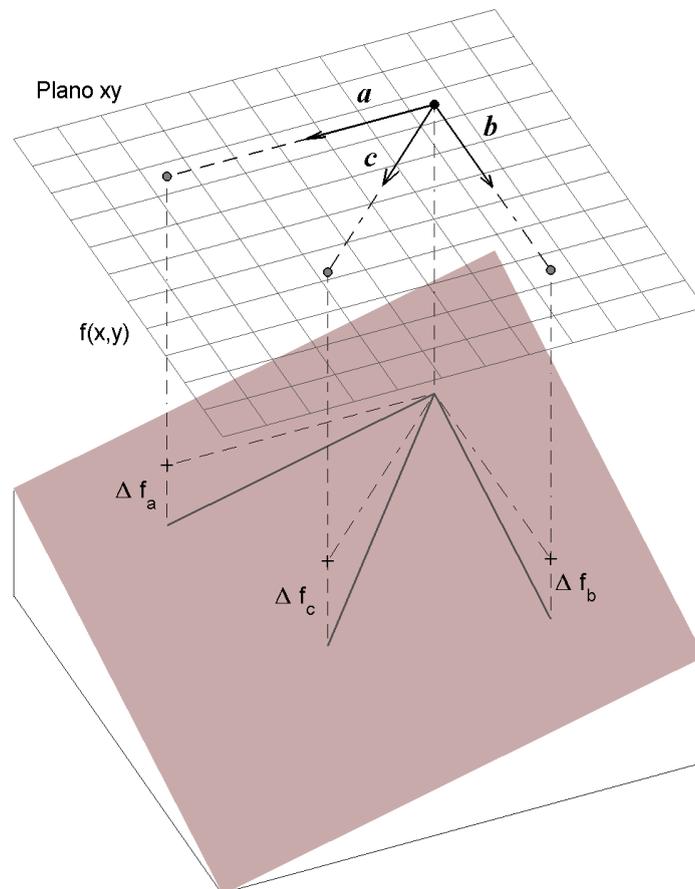


Figura 3.7: Aproximación al concepto de derivada direccional y gradiente.

Consideraremos la función que representa la profundidad de una piscina medida desde la superficie del agua. El fondo está inclinado, de modo que

puede expresarse mediante la relación $f(x, y) = p_0 + p_1x + p_2y$ siendo p_0, p_1 y p_2 constantes positivas. Evidentemente, tal como muestra la figura, si nos colocamos en un punto determinado de coordenadas (x, y) las variaciones de profundidad dependen de la dirección en la que nos movamos. Hemos representado tres casos, dados por variaciones a lo largo de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$ y $\hat{\mathbf{c}}$ sobre el plano XY , y está claro que para desplazamientos de la misma longitud, la variación en profundidad es mayor a lo largo de la dirección de $\hat{\mathbf{c}}$. Matemáticamente lo expresaremos del siguiente modo.

1. Derivada direccional

Se define la **derivada direccional** dada por el desplazamiento a lo largo de la dirección definida por el vector $\hat{\mathbf{c}}$ como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + \epsilon \hat{\mathbf{c}}) - f(\vec{r})}{\epsilon}$$

donde $\vec{r} \equiv (x, y)$ y $\epsilon \equiv \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

En el caso de que el vector de dirección coincida con alguno de los de la base cartesiana, hablaremos de derivada parcial respecto a la coordenada correspondiente. Así, en el ejemplo que mostramos ($\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{j}}$), y la derivada parcial respecto a x será:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + \epsilon \hat{\mathbf{i}}) - f(\vec{r})}{\epsilon}$$

De forma análoga se puede escribir la derivada parcial respecto a y .

2. Gradiente

En el apartado anterior, al tratar el concepto de derivada de una función $f(x)$, se ha visto que es posible escribir $df = f'(x) dx$.

Planteemos ahora la cuestión en el caso de una función que depende de varias variables; se pretende averiguar la relación entre la variación df y un desplazamiento $d\vec{r}$ (que puede llevar cualquier dirección). Escribamos por el momento, por analogía con la expresión anterior, $df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$, siendo $d\vec{r}$ un desplazamiento arbitrario (dx, dy) y $\vec{\nabla} f$ un vector cuyo significado vamos a discutir, apoyándonos en la figura 3.8.

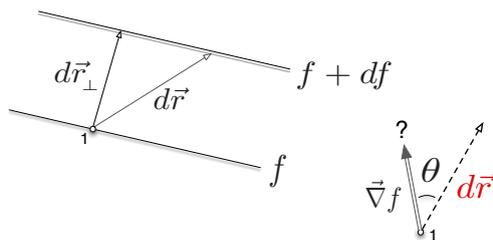


Figura 3.8: Aproximación al concepto de gradiente.

En la figura se han representado dos líneas en el plano XY en las que el valor de la función es constante (f y $f + df$, respectivamente). Tomemos como referencia un punto cualquiera 1 (sobre la línea f), en el que $\vec{\nabla} f$ tendrá un valor y llevará una dirección determinada. Es evidente que partiendo del punto 1 hay una infinidad de desplazamientos $d\vec{r}$ que permiten alcanzar $f + df$, y que el más corto, $d\vec{r}_\perp$, proporciona la mayor tasa de variación de la función con respecto al desplazamiento. Volviendo a la expresión de df ,

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \nabla f dr \cos\theta \quad ; \quad \frac{df}{dr} = \nabla f \cos\theta$$

donde df/dr representa la derivada direccional de f a lo largo de la dirección genérica de $d\vec{r}$ y θ es el ángulo entre $\vec{\nabla} f$ y dicha dirección. Evidentemente el máximo valor se dará para $\cos\theta = 1$. Como ya se ha dicho, la derivada direccional es máxima a lo largo de $d\vec{r}_\perp$, de donde resulta que el vector que hemos introducido $\vec{\nabla} f$ debe llevar la dirección de la variación máxima ($\vec{\nabla} f \parallel d\vec{r}_\perp$), y que el módulo de $\vec{\nabla} f$ coincide con el valor de la derivada direccional a lo largo de esa dirección. A $\vec{\nabla} f$ se le denomina **gradiente** de la función f .

En la práctica, y para una función de dos variables, se puede calcular en coordenadas cartesianas mediante la expresión:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j}$$

Se propone como ejercicio obtener el vector gradiente para el ejemplo dado en la figura 3.7, y evaluar los incrementos que sufre la función f , es decir df_a, df_b, df_c para variaciones a lo largo de las direcciones indicadas. (Sol.: $\vec{\nabla} f = (p_1, p_2)$ sobre el plano XY)

Aprovecharemos el ejemplo utilizado para poner de manifiesto el interés de estos conceptos en la Física. La función $f(x, y)$ puede representar la energía potencial gravitatoria de una partícula puntual sobre la superficie

mencionada (bastaría multiplicar por su masa, por la aceleración de la gravedad, y cambiar el signo $U(x, y) = -m g f(x, y)$). Si dicha partícula se apoyase sin fricción sobre la superficie y la depositáramos en un punto de coordenadas (x, y) se deslizaría hacia el fondo a lo largo de la línea definida por la dirección de $\vec{\nabla} f$ (trayectoria central en el dibujo), o lo que es lo mismo de $-\vec{\nabla} U$. Diremos, por tanto, que las líneas de fuerza vienen dadas por la dirección del gradiente de la energía potencial (cambiado de signo).

Parte II

FUNDAMENTOS DE MECÁNICA

INTRODUCCIÓN

La parte II de este manual está dedicada a los fundamentos de Mecánica Clásica (o newtoniana) de una partícula. Se van a manejar conceptos fundamentales, con muchos de los cuales los alumnos están ya familiarizados. No obstante, es imprescindible estudiar a fondo esta parte, ya que va a sentar las bases de buena parte de lo que se estudie posteriormente.

La mecánica es una teoría del movimiento; así, algunas de las preguntas que van a surgir - y a las que deberemos dar respuesta- son: ¿respecto a quién o qué se mueve una partícula? ¿por qué cambia su movimiento? ¿cuáles son las causas de ese cambio?

La mecánica introduce claramente el carácter direccional de algunas de las magnitudes físicas involucradas en el análisis del movimiento de un cuerpo (por ejemplo su posición, su velocidad, la fuerza ejercida), lo que implica la necesidad de establecer un sistema de referencia, siendo necesario representar de forma correcta dichas magnitudes.

Se va a comenzar con un capítulo de cinemática, en el que se verá cómo describir el movimiento de una partícula -en función del tiempo- mediante las magnitudes posición, velocidad y aceleración, en general en varias dimensiones.

Se continuará con los capítulos de dinámica, uno de cuyos sus focos será el análisis de las fuerzas como responsables del cambio del estado de movimiento de una partícula. Será igualmente fundamental el estudio de qué magnitudes se conservan, mediante el análisis de los principios de conservación de la energía y del momento.

Capítulo 4

CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA

La Cinemática es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos. La pregunta fundamental a la que deberá dar respuesta lo estudiado en este tema será: ¿dónde está la partícula en cualquier instante de tiempo?

En Cinemática sólo se trabaja con dos magnitudes fundamentales: longitud y tiempo ([L] y [T]).

4.1. Vectores posición, velocidad y aceleración

En mecánica clásica no relativista, el tiempo es una magnitud absoluta: el intervalo Δt entre dos sucesos dados es el mismo para todos los sistemas de referencia. Así pues, en lo que sigue hablaremos de una única variable tiempo (t) sea cual sea el sistema de referencia.

La magnitud que contiene toda la información sobre la posición de la partícula es su **vector de posición** $\vec{r}(t)$. El vector $\vec{r}(t)$ va cambiando cuando se mueve la partícula. La curva que describe el extremo de $\vec{r}(t)$ es la **trayectoria de la partícula** (Fig. 4.1).

Ejemplo: Si $\vec{r}(t) = t^2 \hat{i} + t \hat{j}$, ¿qué trayectoria describe la partícula?

Solución: Las ecuaciones paramétricas del movimiento son $x(t) = t^2$, $y(t) = t$. Si despejamos t en la segunda ecuación y lo sustituimos en la primera, se obtiene: $x = y^2$, que nos informa de que la trayectoria que describe la partícula es una parábola.

Nótese que la ecuación de la trayectoria no contiene información temporal, al despejar la hemos “ocultado”.

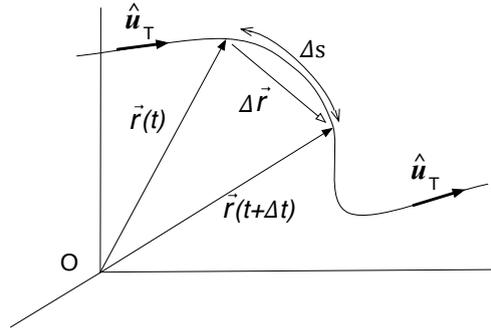


Figura 4.1: Vectores de posición y trayectoria.

Además de saber dónde está la partícula en todo momento, suele interesar conocer a qué ritmo ha llegado hasta allí. La magnitud que nos proporciona dicha información es la **velocidad**.

Cuando se habla de velocidad, a veces nos referimos a la **velocidad media**. En general:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_0)}{t_f - t_0}$$

Pero esta magnitud no informa sobre los detalles del movimiento: unos tramos han podido hacerse más rápidamente que otros, o incluso la partícula ha podido detenerse en el trayecto. Para obtener información del detalle instantáneo del movimiento se introduce la **velocidad instantánea**:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Observad que \vec{v} **siempre es tangente a la trayectoria**. Si llamamos \hat{u}_T al vector unitario tangente a la trayectoria en cada punto de la misma:

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_T = v \hat{u}_T \quad (4.1)$$

¿Cómo la calculamos? En coordenadas cartesianas, el vector velocidad:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Por último, la velocidad de la partícula también puede cambiar. La información de esos cambios nos la proporciona el **vector aceleración**:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (4.2)$$

En coordenadas cartesianas:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}$$

Obtener la velocidad y la aceleración a partir de $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ no plantea mayor dificultad, sólo hay que derivar las expresiones. Sin embargo, para calcular $\vec{v}(t)$ y $\vec{r}(t)$ a partir de $\vec{a}(t)$ y $\vec{v}(t)$, respectivamente, debemos integrar y además necesitamos conocer algún dato del movimiento (las condiciones iniciales, $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$ o, alternativamente, los valores de \vec{r} y \vec{v} en un instante t dado).

4.2. Ejemplos de movimientos. Sistemas de referencia.

Vamos a ver varios ejemplos de cómo se puede estudiar el movimiento de una partícula mediante el manejo de las magnitudes cinemáticas.

1. **Movimiento con aceleración constante:** $\vec{a}=\text{constante}$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = \int \vec{a} dt = \vec{a} \int dt$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \vec{a} t$$

Cuando $\vec{v}(0)$ lleva la misma dirección que \vec{a} , se tiene un **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en el que la velocidad no cambia de dirección.**

En cuanto a la posición:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \int \vec{v} dt$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \vec{v}(0) t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

2. **Movimiento con aceleración no constante:** $\vec{a}(t)$

Supongamos que la aceleración de la partícula (en la dirección x en este ejemplo) aumenta proporcionalmente con el tiempo: $\vec{a}(t) = 3t\hat{i}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = \int \vec{a} dt = \int 3t\hat{i} dt$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \frac{3t^2}{2}\hat{i}$$

Se propone como ejercicio obtener la expresión de la posición en cualquier instante de tiempo. Es importante tener presente que si no se conocen las condiciones iniciales nos queda una cierta indeterminación en la solución.

3. Descripción del movimiento usando coordenadas polares: movimiento circular.

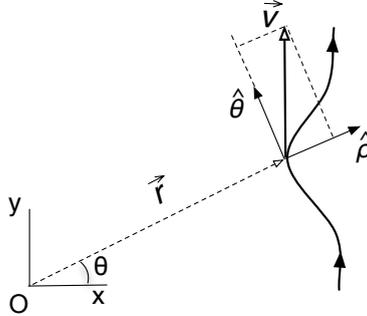


Figura 4.2: Vectores unitarios de las coordenadas polares en un punto de la trayectoria de vector posición \vec{r} .

Conviene recordar que la base de vectores ortogonales en coordenadas polares se define para cada punto del espacio en función de la ubicación del origen de coordenadas, de tal forma que se cumple la relación $\vec{r} = r \hat{\rho}$ (ver Fig. 4.2). A partir de ella se calcula la velocidad, derivando respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \hat{\rho}) = \frac{dr}{dt} \hat{\rho} + r \frac{d\hat{\rho}}{dt} \quad (4.3)$$

Para hacer esta derivada, hay que tener en cuenta la relación entre las bases $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ e \hat{i} , \hat{j} .

$$\hat{\rho} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

Así,

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{j} \quad (4.4)$$

Sustituyendo:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{\rho} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \quad (4.5)$$

Se propone como ejercicio comprobar que, una vez realizadas las correspondientes derivadas y reagrupando términos, las componentes de la aceleración son:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 \right) \hat{\rho} + \left(2\omega \frac{dr}{dt} + r \frac{d\omega}{dt} \right) \hat{\theta} \quad (4.6)$$

donde $\omega = d\theta / dt$ es lo que conocemos como **velocidad angular**.

Caso particular: movimiento circular

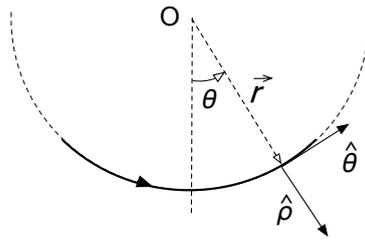


Figura 4.3: Movimiento circular: notación de las variables utilizadas.

En una trayectoria circular, la distancia de cualquier punto al centro es constante. La ubicación más lógica para el origen de coordenadas polares es el centro de la circunferencia, porque en este caso particular y con esta elección del origen de coordenadas, las expresiones vistas para el movimiento en coordenadas polares se simplifican considerablemente:

$$|\vec{r}| = r = \text{constante}$$

$$\vec{v} = r \omega \hat{\theta} \Rightarrow \omega = v/r$$

La velocidad, siempre tangente a la trayectoria, en el movimiento circular solo tiene componente en la dirección del vector unitario $\hat{\theta}$. En cuanto a la aceleración:

$$\vec{a} = r \frac{d\omega}{dt} \hat{\theta} - r \omega^2 \hat{\rho} = \frac{dv}{dt} \hat{\theta} - \frac{v^2}{r} \hat{\rho} \quad (4.7)$$

Así, el uso de coordenadas polares permite separar la aceleración en dos componentes con significado físico: una componente que refleja los cambios en el módulo de \vec{v} (dirección de $\hat{\theta}$) y otra que informa sobre los

cambios en la dirección de la velocidad (aceleración centrípeta, en la dirección de $\hat{\rho}$).

Coordenadas intrínsecas. Componentes intrínsecas de la aceleración.

Para un movimiento plano general, pueden extenderse los resultados anteriores del modo siguiente:

En geometría diferencial se demuestra que para una “curva regular” cualquiera existe en cada punto una circunferencia que tiene con ésta lo que se denomina un contacto de segundo orden. Dejando al margen detalles técnicos, esto significa que hay un “buen solapamiento” a nivel local entre la curva y dicha circunferencia. Ésta recibe el nombre de **circunferencia osculatriz**, y al centro y radio de dicha circunferencia se les llama respectivamente **centro de curvatura** y **radio de curvatura**.

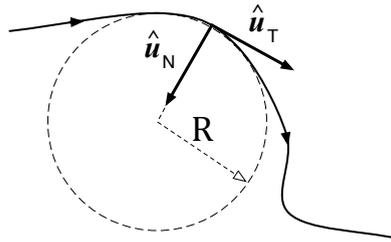


Figura 4.4: Movimiento en coordenadas intrínsecas. Se muestra la circunferencia osculatriz

Este concepto permite definir para cada punto de un movimiento plano general un nuevo sistema de referencia, el **sistema de coordenadas intrínsecas**, que tiene como origen el centro de curvatura y como base ortonormal la que se muestra en la figura 4.4: un vector perpendicular a la trayectoria en el punto considerado dirigido hacia el centro de la circunferencia (vector normal \hat{u}_N) y un vector tangente a la trayectoria y con el sentido dado por el sentido del movimiento (vector tangencial \hat{u}_T).

Este nuevo sistema de coordenadas nos recuerda el de coordenadas polares utilizado para el movimiento circular, pero los vectores unitarios no coinciden: en la dirección radial $\hat{\rho}$ y \hat{u}_N tienen sentidos opuestos, y en la tangencial $\hat{\theta}$ y \hat{u}_T serán iguales u opuestos dependiendo del sentido del movimiento.

Adaptando las expresiones vistas para el movimiento circular al sistema de coordenadas intrínsecas (ver Fig. 4.4) y sustituyendo r por R (radio

de curvatura) se obtiene:

$$\vec{a} = R \omega^2 \hat{\mathbf{u}}_N + R \frac{d\omega}{dt} \hat{\mathbf{u}}_T$$
$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{u}}_N + \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{u}}_T$$

Las componentes de la aceleración en el sistema de coordenadas intrínsecas reciben el nombre de **aceleración normal** (asociada al cambio de dirección de \vec{v}) y **aceleración tangencial** (asociada a los cambios del módulo de la velocidad).

Capítulo 5

DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA: FUERZAS Y MOMENTOS

La Mecánica Clásica o newtoniana es una teoría del movimiento ¹ que se basa en los conceptos de masa y fuerza, y los relaciona con las magnitudes cinemáticas: posición, velocidad y aceleración.

En este capítulo introduciremos la dinámica newtoniana aplicándola al caso más simple: una partícula, entendiendo como tal un ente que carece de estructura interna (se considera dicha estructura irrelevante para el estudio de su movimiento) y cuya posición puede identificarse con un “punto”. Esto es, estudiaremos la dinámica de cualquier objeto cuyas dimensiones sean irrelevantes para el estudio del problema concreto que nos ocupe.

5.1. *Leyes de Newton*

Son las leyes fundamentales de la Mecánica Clásica. Éste es el enunciado de las leyes proporcionado por su autor, Isaac Newton, en su obra *Principios Matemáticos de Filosofía Natural y su Sistema del Mundo*, publicada en 1687:

- **LEY PRIMERA:** *Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo o movimiento uniforme en línea recta, salvo que se vean forzados a cambiar ese estado por fuerzas impresas.*

¹No hay que olvidar por tanto que nuestro objetivo es averiguar dónde está la partícula en cualquier instante de tiempo.

- **LEY SEGUNDA:** *El cambio del movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y se hace en la dirección de la línea recta en que se imprime esa fuerza.*
- **LEY TERCERA:** *Para toda acción hay siempre una reacción opuesta e igual. Las acciones recíprocas de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y dirigidas hacia partes opuestas.*

Hay que tener muy presente el carácter axiomático de estas leyes que a continuación vamos a analizar en detalle, pensando fundamentalmente en su posterior aplicación.

1. Primera ley: sistemas de referencia inerciales.

La primera ley de Newton también se conoce como **ley de la inercia**. En un castellano más actual, nos dice que todo cuerpo continúa en su estado de reposo o movimiento con velocidad constante (rectilíneo y uniforme) salvo que actúe sobre él una fuerza neta.

Los cuerpos se “oponen” a cambiar su estado de movimiento (tienen una ‘inercia’).

Es importante tener presente que esta ley no distingue entre un cuerpo en reposo y otro que se mueve a velocidad constante: a efectos de la primera ley de Newton, todos los sistemas con movimiento relativo a velocidad constante son indistinguibles, y la validez de esta ley se reduce a ellos. Estos sistemas reciben el nombre de **sistemas inerciales**.

En la figura 5.1 vemos un ejemplo de sistema no inercial: el objeto, apoyado sobre una mesa completamente lisa, adquiere una aceleración $-\vec{A}$ para un observador en el interior del camión y que se mueve por tanto con O' a pesar de que **no** actúa ninguna fuerza sobre él.

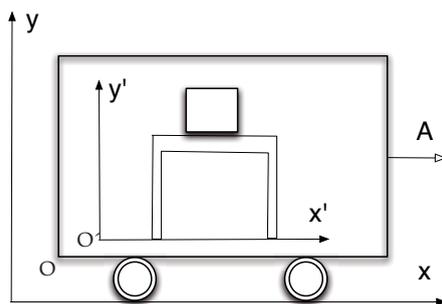


Figura 5.1: La primera ley de Newton no se cumple para un observador situado dentro del camión que está acelerando.

2. Segunda ley: ecuación de movimiento. Fuerza, masa y peso.

En la formulación de las leyes de Newton juegan un papel fundamental no solo las magnitudes vistas en cinemática sino un nuevo concepto que introduciremos ahora: la masa inercial.

“La fuerza ínsita de la materia es un poder de resistencia de todos los cuerpos, en cuya virtud perseveran para mantener su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta”.

Lo que en su formulación original Newton denominaba “fuerza ínsita”, es la **masa inercial** o **masa inerte** (m_i). Es una magnitud que proporciona una medida de la oposición de un cuerpo al cambio de su estado de movimiento. La expresión matemática de la segunda ley de Newton es:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}) \quad (5.1)$$

Antes de continuar con el estudio de la segunda ley conviene profundizar en el concepto de masa. Además de la masa inercial, cuyo sentido acaba de explicarse, no hay que olvidar que la fuerza de atracción de la Tierra sobre un cuerpo en puntos próximos a la superficie se expresa en términos de la **masa gravitatoria** (m_g), que se define como una propiedad que hace que los cuerpos experimenten la atracción gravitatoria ² (un objeto “pesa” porque tiene masa gravitatoria).

$$\vec{P} = m_g \vec{g}$$

Experimentos cuidadosos demuestran que $m_i = m_g$, con lo que en adelante suprimiremos los subíndices y la denotaremos simplemente *masa*.

Una vez aclarado este concepto, retomemos la ecuación 5.1. En los casos en que la masa no varía con el tiempo, la segunda ley puede resumirse así: la aceleración de un objeto es inversamente proporcional a su masa y directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él.

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (5.2)$$

Así, si conocemos en todo momento \vec{F} podremos obtener la aceleración \vec{a} , y por tanto caracterizar por completo el movimiento (conocidas las condiciones iniciales). En este sentido puede decirse que la segunda ley de Newton nos proporciona la **ecuación de movimiento** de la partícula.

²Aunque fuera del ámbito de la Física solemos hablar de masa y peso indistintamente (se dice “un peso de 10 kg”) es importante recordar que la masa es una característica intrínseca del cuerpo y el peso depende de dónde esté el cuerpo. Así, el peso de un cuerpo de masa m en la Luna es seis veces menor que en la Tierra, pero haría falta aplicarle la misma fuerza que en la Tierra para proporcionarle una misma aceleración.

Cuando actúen varias fuerzas sobre un cuerpo habrá que calcular la **resultante de las fuerzas**, entendida como la suma vectorial de todas las que actúen sobre él. Si llamamos \vec{F}_T a la fuerza resultante, esto se indica así:

$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

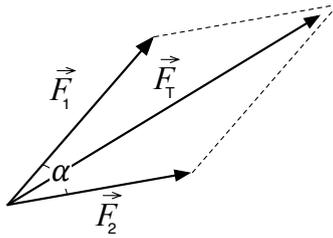


Figura 5.2: Obtención de la resultante de varias fuerzas.

En la figura 5.2 indicamos cómo obtener la resultante con el método gráfico que permite sumar las fuerzas de dos en dos (ver el repaso de la suma vectorial de la sección 2.3). Aplicando el teorema del coseno:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow F_T^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \alpha$$

Si usamos coordenadas cartesianas podemos obtener el mismo resultado sumando componentes:

$$\left. \begin{aligned} F_{Tx} &= \sum_{i=1}^N F_{ix} \\ F_{Ty} &= \sum_{i=1}^N F_{iy} \end{aligned} \right\} F_T = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2}$$

En el caso particular de que $\vec{a}=0$, se dice que la partícula está en equilibrio, siendo la ecuación correspondiente:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$$

Sobre esto volveremos en el apartado 5.3

3. Tercera ley: acción y reacción. Ejemplos.

Las fuerzas entre distintos cuerpos siempre aparecen por pares: si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, el cuerpo B a su vez ejerce una fuerza sobre el A igual y de sentido opuesto: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

En el apartado 5.3 insistiremos en la importancia de la tercera ley. Por el momento simplemente veremos un ejemplo sencillo, ilustrado en la figura 5.3, identificando en él las parejas de fuerzas de acción y reacción a las que se refiere la tercera ley de Newton.

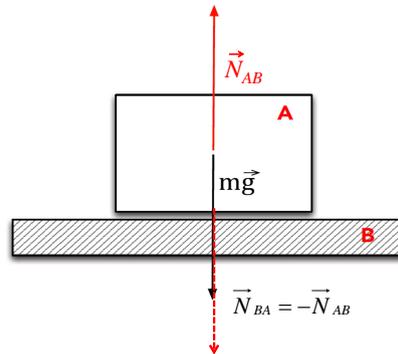


Figura 5.3: Fuerza perpendicular a la superficie, ejercida por B sobre el cuerpo A, \vec{N}_{AB} . La correspondiente reacción a la acción \vec{N}_{AB} es la fuerza \vec{N}_{BA} ejercida por A sobre B.

Cuando apoyamos un cuerpo A sobre una superficie rígida B, sobre el cuerpo se ejerce una fuerza perpendicular a la superficie. Es la denominada fuerza normal, ejercida por la superficie sobre el cuerpo: \vec{N}_{AB} (ver Fig. 5.3). La correspondiente “pareja” sería la fuerza \vec{N}_{BA} ejercida por el cuerpo sobre la superficie, cumpliéndose que: $\vec{N}_{BA} = -\vec{N}_{AB}$. Al analizar las fuerzas sobre un determinado cuerpo prestad atención al hecho de que este tipo de fuerzas no se equilibran entre sí, por la sencilla razón de que cada una actúa sobre un cuerpo distinto.

4. Rango de aplicación de las leyes de Newton. Sistemas de referencia no inerciales. LECTURA OPCIONAL

Como se ha mostrado en el ejemplo de la Figura 5.1, estrictamente las leyes de Newton sólo son válidas en sistemas de referencia **inerciales**. No obstante, en sistemas no inerciales (acelerados) podemos hacer una formulación en que las leyes de Newton sean válidas mediante la introducción de ‘pseudofuerzas’ que dependen de la aceleración del sistema.

Nos centraremos en un caso particular sencillo: sistemas con aceleración traslacional (a modo del ejemplo del camión antes citado).

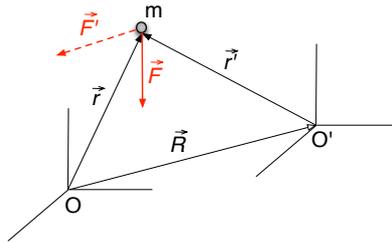


Figura 5.4: Sistemas de referencia inercial (O) y no inercial (O').

En XYZ: $\vec{F} = m \vec{a}$.

Ahora bien, si la posición de la partícula en los sistemas O y O' viene dada por \vec{r} y \vec{r}' respectivamente, se puede escribir $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \Rightarrow \vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$.

Entonces:

$$\vec{F} = m \vec{A} + m \vec{a}' \Rightarrow \vec{F} - m \vec{A} = m \vec{a}'$$

Introduciendo la fuerza ficticia (también denominada fuerza de inercia) $\vec{F}' = -m \vec{A}$ se seguirá cumpliendo la segunda ley de Newton en el sistema X'Y'Z':

$$\vec{F} + \vec{F}' = m \vec{a}'$$

5.2. Tipos de fuerzas: aplicadas y de ligadura

Puede hablarse de distintos tipos de fuerzas exteriores actuando sobre un sistema atendiendo a que su origen sea activo o pasivo:

- **Fuerzas aplicadas** (\vec{F}): son aquellas cuyo valor no depende de otras fuerzas que puedan actuar o no sobre el sistema.
- **Fuerzas de ligadura o de reacción** (\vec{R}): son las que tienen su origen en la respuesta de otros elementos que imponen limitaciones en las posiciones que puede ocupar el sistema que nos ocupa y en el movimiento que puede realizar (Fig.5.5). Veremos que estas fuerzas son fundamentales a la hora de plantear y resolver problemas de estática.

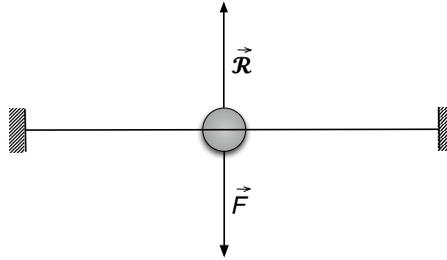


Figura 5.5: Fuerza de ligadura \vec{R} sobre una partícula insertada en una varilla rígida y sobre la que actúa una fuerza aplicada \vec{F} .

Conocer la expresión de las ligaduras ‘a priori’ no es posible. Para determinarlas hemos de conocer el resto de fuerzas que actúan sobre el sistema.

Veamos algunos ejemplos:

- Fuerza de **reacción o de ligadura normal**:

Supongamos una partícula de masa m apoyada sobre el suelo. Sobre m actúan su peso $\vec{P} = M \vec{g}$ y la fuerza \vec{N}_s que ejerce el suelo sobre m , conocida como **fuerza de reacción normal** o simplemente **normal**. En la situación de la figura 5.6 a), sin ninguna otra fuerza actuando sobre la partícula, \vec{N}_s compensa \vec{P} , cumpliéndose: $\vec{N} = -M \vec{g}$. Como veremos en el apartado siguiente, esta ecuación corresponde a la condición de equilibrio de la partícula.

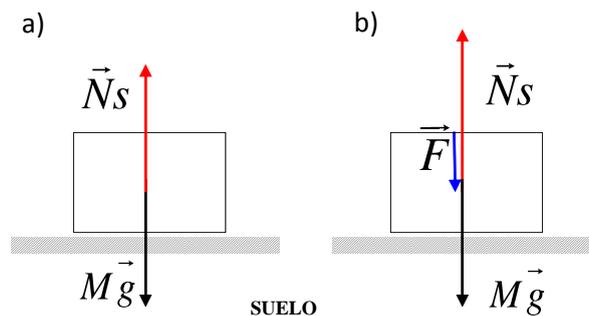


Figura 5.6: Fuerza normal ejercida por la superficie sobre el cuerpo.

Si ahora aplicamos sobre la misma partícula una fuerza \vec{F} vertical y

hacia abajo y la partícula sigue en reposo sin hundirse (como en la figura 5.6 b)), \vec{N}_s deberá aumentar para compensar tanto $\vec{\mathcal{P}}$ como \vec{F} : $\vec{N}_s \equiv -M \vec{g} - \vec{F}$

■ **Tensión** (cuerdas y cables):

Supongamos una cuerda inextensible (no se deforma), con un extremo fijo, que se mantiene tensa al aplicar una fuerza \vec{F} (ver Fig. 5.7) en el otro extremo.

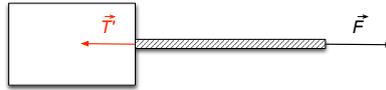


Figura 5.7: Cuerda tensa bajo la acción de una fuerza.

Si aplicamos la segunda ley de Newton, considerando que la cuerda tiene una masa m_c podremos calcular la tensión de la cuerda:

$$\vec{F} + \vec{T}' = m_c \vec{a}. \text{ Si } m_c \approx 0 \Rightarrow \vec{T}' = -\vec{F}$$

Si consideramos un segmento de esa misma cuerda y lo aislamos del resto “idealmente”, volviendo a aplicar la segunda ley de Newton:



Figura 5.8: Fuerzas que actúan sobre un segmento de cuerda.

Si la masa del segmento $\Delta m_c \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \approx 0 \Rightarrow \vec{T}_1 = -\vec{T}_2$. De modo que la tensión actúa sobre cada elemento de cuerda como una fuerza aplicada a cada extremo, con valor neto nulo y que se transmite íntegramente de extremo a extremo. Es importante tener en cuenta que *la tensión será constante a lo largo de la cuerda siempre que la cuerda no tenga masa*: si nos fijamos en el fragmento de cuerda, $\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$, tanto en equilibrio como cuando hay aceleración del sistema.

Supongamos ahora un objeto de masa m colgado de una cuerda inextensible y sin masa, en una situación de equilibrio, como en la figura de la izquierda: $\vec{T} = -m \vec{g}$. Mientras no sobrepasemos el límite de resistencia de la cuerda, cualquier fuerza externa actuando sobre m se verá compensada por la tensión: $\vec{T} = -m \vec{g} - \vec{F}$ (figura de la derecha).

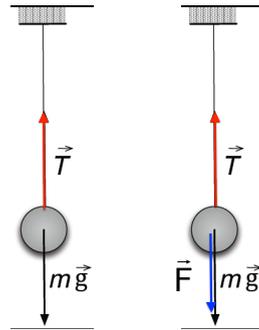


Figura 5.9: Tensión de una cuerda o cable.

Como segundo ejemplo, supongamos dos masas m y M apoyadas sobre un suelo liso y unidas por una cuerda. Si tiramos del conjunto con una fuerza \vec{F} la cuerda "se tensa", estableciéndose una tensión T a lo largo de ella. Es posible estudiar el movimiento del bloque m bajo la acción de \vec{T} . La tensión de la cuerda depende de \vec{F} ; proponemos verificar que $T = m F / (m + M)$.

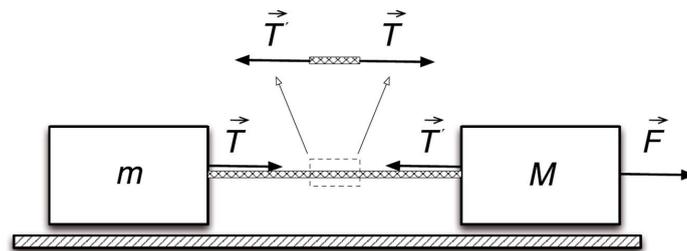


Figura 5.10: Tensión de la cuerda que une a las dos masas.

- Fuerza de rozamiento.** El rozamiento es un tipo muy frecuente de ligadura que surge cuando desplazamos una superficie material sobre otra o cuando, aunque no haya desplazamiento, se ejerce una fuerza con componente paralela a la superficie. Vamos a fijarnos en el cuerpo de la figura, sobre el que se ejerce una fuerza \vec{F} . El bloque no se hunde en el suelo, debido a la fuerza de ligadura perpendicular (la normal) que será $\mathcal{N} = \mathcal{R}_\perp = F_\perp + mg$.

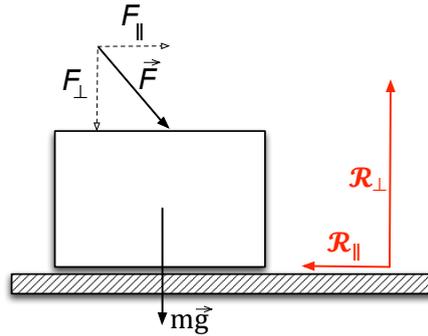


Figura 5.11: Fuerzas de ligadura en el apoyo de un bloque sobre una superficie con fricción.

Por su parte, la existencia de rozamiento implica la aparición de \mathcal{R}_{\parallel} . Experimentalmente se ve que el bloque de la figura permanece en equilibrio si $F_{\parallel} \leq \mu_e \mathcal{R}_{\perp}$. Por tanto, la componente horizontal de la reacción $\mathcal{R}_{\parallel} \leq \mu_e \mathcal{R}_{\perp}$. Esa componente horizontal es lo que se conoce como fuerza de rozamiento estático: $F_R = \mathcal{R}_{\parallel}$

Así, \mathcal{R}_{\parallel} podrá tomar distintos valores, pero con el límite impuesto por la desigualdad anterior, es decir $\mathcal{R}_{\parallel}^{max} = \mu_e \mathcal{R}_{\perp}$. El coeficiente de proporcionalidad μ_e recibe el nombre de **coeficiente de rozamiento estático**.

Una vez que se inicia el movimiento, se observa una disminución de μ que adquiere el valor denominado **coeficiente de rozamiento dinámico** μ_d :

$$\mathcal{R}_{\parallel} = F_R = \mu_d \mathcal{R}_{\perp} \equiv \mu_d N.$$

μ_d y μ_e dependen de la naturaleza de las superficies, pero no del tamaño. Por otra parte, μ_d depende de \vec{v} , pero para velocidades entre 1 cm/s y varios m/s puede considerarse constante.

Materiales	μ_e	μ_d
Acero sobre acero	0.7	0.6
Latón sobre acero	0.5	0.4
Cobre sobre hierro fundido	1.1	0.3
Vidrio sobre vidrio	0.9	0.4
Teflón sobre teflón	0.04	0.04
Teflón sobre acero	0.04	0.04
Caucho sobre hormigón (seco)	1.0	0.80
Caucho sobre hormigón (húmedo)	0.30	0.25
Esquí encerado sobre nieve (0° C)	0.1	0.05

Cuadro 5.1: Valores aproximados de los coeficientes de fricción.

5.3. Diagramas de fuerzas. Ejemplos de situaciones de equilibrio

Para analizar el comportamiento dinámico o la condición de equilibrio de una partícula, resulta fundamental dibujar correctamente las fuerzas que actúan sobre la misma. Llamaremos **diagrama de cuerpo libre** al diagrama de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Para trazarlo, hay que identificar el objeto considerado y dibujar las fuerzas aplicadas sobre el mismo. Hay que dibujar asimismo las fuerzas de ligadura, ejercidas por los elementos externos al objeto.

Fijémonos en la figura 5.12 donde se han dibujado las fuerzas sobre m , sobre M y sobre el sistema $(m+M)$ considerado como un todo. Como vimos en el apartado 5.1 al hablar de la tercera ley de Newton, dada una fuerza (acción) ejercida por un cuerpo M sobre otro cuerpo m , su correspondiente reacción será igual pero de signo contrario, y estará aplicada en M . No pueden equilibrarse al plantear el diagrama de fuerzas sobre cada cuerpo aislado, porque cada una de esas fuerzas actúa sobre un cuerpo distinto.

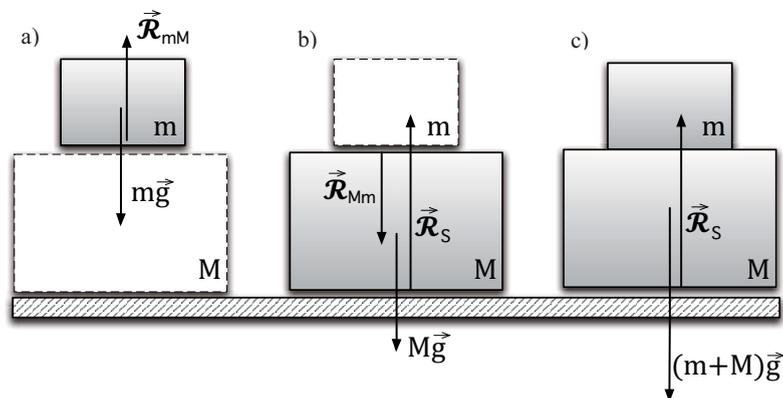


Figura 5.12: Diagramas de cuerpo libre asociados a un sistema de dos bloques. a) Fuerzas sobre el bloque superior; b) Sobre el inferior; c) Sobre el sistema completo.

Así, en el ejemplo de la figura 5.12:

$$\vec{\mathcal{R}}_{mM} = -\vec{\mathcal{R}}_{Mm}$$

Como se ha mencionado ya, desde el punto de vista de las fuerzas que actúan sobre una partícula, diremos que está en equilibrio si la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella se anula:

$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$$

Apliquemos esta condición a los tres diagramas de cuerpo libre que surgen en la figura 5.12.

- I) la condición de equilibrio al sistema completo de la figura 5.12 (las dos partículas juntas):

$$\vec{\mathcal{P}}_T + \vec{\mathcal{R}}_S = 0 \Rightarrow (m + M) \vec{g} + \vec{\mathcal{R}}_S = 0$$

Y si ahora aplicamos la condición de equilibrio a las partículas aisladas:

II) Partícula de masa m : $m \vec{g} + \vec{\mathcal{R}}_{mM} = 0$

III) Partícula de masa M : $M \vec{g} + \vec{\mathcal{R}}_{Mm} + \vec{\mathcal{R}}_S = 0$

Nótese que realmente las tres ecuaciones no son independientes. De hecho, si sumamos las ecuaciones II) e III), y aplicamos la tercera ley de Newton, obtenemos la ecuación I).

Al resolver los problemas hay que tener cuidado al pasar de las anteriores expresiones vectoriales a las correspondientes relaciones entre los módulos de las fuerzas. Así, si se elige el vector unitario \hat{j} en la dirección vertical y sentido hacia abajo:

$$\vec{\mathcal{P}}_T = (m + M) g \hat{j} \text{ y } \vec{\mathcal{R}}_S = -R_s \hat{j}.$$

La condición de equilibrio del sistema se expresaría:

$$(m + M) g \hat{j} - R_s \hat{j} = 0$$

siendo el módulo de la reacción normal igual al módulo del peso del sistema completo.

5.4. Momento lineal y angular

5.4.1. Momento e impulso lineal. Ley de conservación.

El **momento lineal** o **cantidad de movimiento** de una partícula se define como:

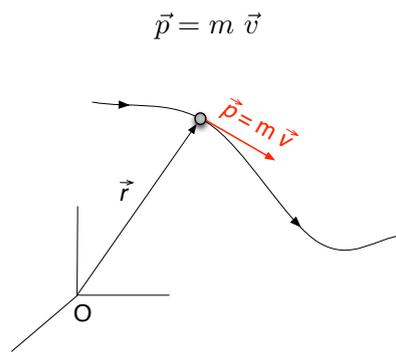


Figura 5.13: Momento lineal de una partícula. Como la velocidad, el momento lineal es tangente a la trayectoria en cada punto.

Es una magnitud que da menos información que m y \vec{v} por separado. Sin embargo, \vec{p} es la magnitud relevante en la segunda Ley de Newton, que como decíamos, en su forma “completa” se expresa (entendiendo \vec{F} como la fuerza neta)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

y sólo si m permanece constante (como ocurre en el caso de una partícula) toma la forma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

La expresión $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ nos permite obtener información sobre la dinámica de la partícula bajo diferentes puntos de vista:

- $\vec{p} = \text{constante} \iff \vec{F} = 0$

Se trata de la **ley de conservación del momento lineal**, que identifica las fuerzas como responsables del cambio de momento lineal de las partículas:

Si sobre un sistema no actúan fuerzas externas, su momento lineal permanece constante (y viceversa).

- La variación de momento lineal en un intervalo de tiempo proporciona también información relevante sobre el movimiento. Definimos $\vec{\mathcal{I}}$, magnitud denominada **impulso lineal** de la fuerza \vec{F} , como

$$\vec{\mathcal{I}} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} dt = \Delta\vec{p} \equiv \vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_0) \quad (5.3)$$

Veamos algunas propiedades y analicemos la información que puede extraerse si se conoce el impulso:

- Si la fuerza permanece constante en el tiempo, la integral es inmediata y tenemos:

$$\vec{F} (t_f - t_0) = \Delta\vec{p} = m \vec{v}_f - m \vec{v}_0 = \vec{\mathcal{I}} \quad (5.4)$$

En este caso, el impulso (medida de la variación del momento lineal) coincide con el producto de la fuerza por el intervalo de tiempo en el que actúa.

- Si $\vec{\mathcal{I}} = 0$, eso garantiza que los valores del momento lineal inicial y final coinciden, pero no informa detalladamente sobre su evolución.

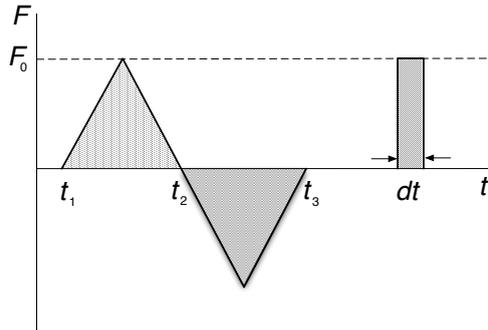


Figura 5.14: Gráficas de la evolución temporal de la fuerza.

En el primer caso de la gráfica 5.14, el impulso es nulo, $\vec{p}(t_3) = \vec{p}(t_1)$ y sin embargo \vec{p} ha ido variando. Por ejemplo, $\vec{p}(t_2) \neq \vec{p}(t_1)$.

- Comparemos ahora el efecto de una fuerza muy intensa actuando durante un intervalo muy corto, con el de una fuerza que se prolonga en el tiempo pero es más débil: si el impulso lineal es el mismo, la variación de momento lineal será la misma. Esto es interesante en la descripción de fuerzas muy intensas actuando durante un breve intervalo de tiempo (por ejemplo en el análisis de choques y percusiones). Lo visualizamos en el segundo caso de la figura. Es obvio

que $\vec{\mathcal{L}} = \vec{F}_0 \Delta t$. Si F_0 es muy grande aunque Δt sea muy pequeño ($\Delta t \rightarrow 0$), se tiene $\vec{\mathcal{L}} \neq 0$.

Continuando con el ejemplo anterior, analicemos ahora el impulso de una fuerza finita que dura un tiempo infinitesimal. En este caso:

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \Delta \vec{p} = 0$$

No se produce variación de momento apreciable. Por este motivo, al analizar el problema de la explosión de una granada se desprecia por ejemplo $\Delta \vec{p}$ debido a la gravedad.

5.4.2. Momento e impulso angular. Ley de conservación.

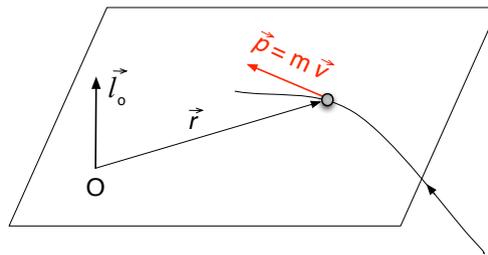


Figura 5.15: Definición de momento angular.

Para completar el análisis del movimiento de una partícula introduciremos la magnitud **momento angular**, que se calcula respecto a un punto:

$$\vec{l}_o = \vec{r} \times \vec{p}$$

En el ejemplo de la figura el momento angular se calcularía respecto al punto O, siendo \vec{r} el vector de posición (instantánea) de la partícula respecto al citado punto. (ver Fig. 5.15).

Analicemos ahora los aspectos de la dinámica de la partícula que quedan patentes en su momento angular. De forma análoga a lo visto para \vec{p} , cuya variación viene dada por la fuerza que actúa sobre la partícula, veremos cuál es la magnitud asociada a las variaciones del momento angular:

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{\tau}_o \quad (5.5)$$

Al producto $\vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{\tau}_o$, se le denomina **momento o par de la fuerza** \vec{F} respecto de O. El momento de la fuerza es un vector perpendicular al

plano definido por los vectores \vec{F} y \vec{r} (vector de posición del punto de aplicación de la fuerza respecto a O). Veremos que esta magnitud $\vec{\tau}_o$, que pone de manifiesto la influencia del **punto de aplicación de la fuerza**, es de capital importancia al analizar la dinámica de los objetos no puntuales; de momento quedémonos con su definición y con su papel como responsable de las variaciones del momento angular. La ecuación

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}_o \quad (5.6)$$

nos proporciona la **ley de conservación del momento angular**: *El momento angular de una partícula respecto a un punto O se conserva si el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre ella respecto a dicho punto es nulo.*

Análogamente a lo visto para el impulso lineal, definiremos el **impulso angular** $\vec{\mathcal{J}}$ del siguiente modo:

$$d\vec{\mathcal{J}} = \vec{\tau} dt = (\vec{r} \times \vec{F}) dt = \vec{r} \times d\vec{\mathcal{I}} \quad (5.7)$$

Integrando:

$$\vec{\mathcal{J}} = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{J}}(t_2) - \vec{\mathcal{J}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau} dt$$

La utilidad de este concepto deriva de la ecuación 5.7 que relaciona impulso lineal y angular. Por ejemplo, nos permitirá relacionar las variaciones de velocidad lineal y angular de objetos sometidos a percusiones.

Para finalizar este apartado, planteamos un par de ejercicios a modo de ejemplos de cálculo de momento angular de una partícula.

Ejemplo 1: Para una partícula en órbita circular uniforme, evalúese \vec{l}_o y $\vec{l}_{o'}$ en los instantes marcados. ¿Se conserva \vec{l} ?

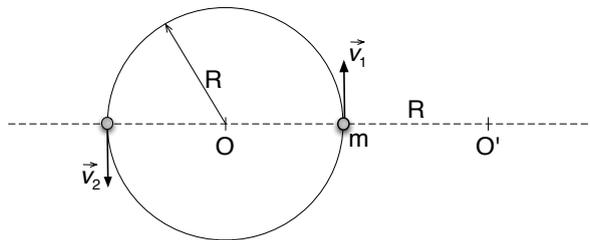


Figura 5.16: Ejemplo 1: movimiento circular uniforme entorno al punto O .

Solución:

El momento angular de la partícula respecto a O en las dos posiciones marcadas será:

$$\vec{l}_o(t_1) = \vec{l}_o(t_2) = m R v \hat{\mathbf{k}} = m R^2 \omega \hat{\mathbf{k}} = \text{constante}$$

donde hemos tenido en cuenta, como se vio al estudiar el movimiento circular, que $v = \omega R$. La fuerza que actúa sobre la partícula en este ejemplo tiene necesariamente dirección radial y por tanto su momento respecto al centro O de la trayectoria es cero y el momento angular es constante. Ahora bien, si se calcula respecto a O', es inmediato ver que el momento angular no se conserva:

$$\vec{l}_{o'}(t_2) = 3 m R v \hat{\mathbf{k}} \quad \text{y} \quad \vec{l}_{o'}(t_1) = -m R v \hat{\mathbf{k}} \quad (5.8)$$

Ejemplo 2: Evalúese el momento angular de una partícula en movimiento rectilíneo respecto a un punto O, a distancia d de la recta.

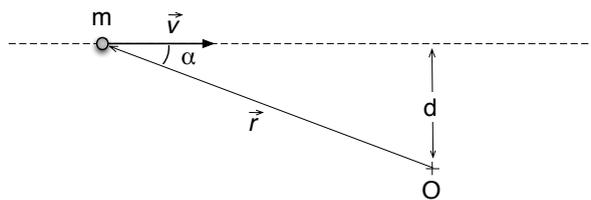


Figura 5.17: Ejemplo 2.

$$l_o = m r v \text{sen } \alpha = m v d$$

$$\vec{l}_o = -m v d \hat{\mathbf{k}}$$

5.5. Ejemplos de aplicación

5.5.1. Movimiento de una partícula bajo la acción de fuerza de rozamiento viscoso.

- **Fuerza de rozamiento viscoso** (\vec{F}_v):

Se la denomina también **fuerza de arrastre**. Está asociada a la presencia de un fluido que se opone a que una partícula se mueva en su seno.

Aunque en general todos los fluidos la ofrecen, la resistencia que ofrecen los líquidos por ejemplo el agua, es claramente mayor que la ofrecida por el aire.

Cuando \vec{v} es pequeña, la fuerza de fricción viscosa es proporcional a \vec{v} y de sentido opuesto:

$$\vec{F}_v = -k \eta \vec{v}$$

- k es el coeficiente de fricción viscosa, que depende de la geometría del objeto que se mueve dentro del fluido. Para objetos esféricos $k = 6 \pi R$ (ley de Stokes).
- η es una característica del fluido llamada **viscosidad**. Es una medida de la fricción interna entre unas moléculas y otras (dice lo “pastoso” que es el fluido).

La unidad de viscosidad en el sistema CGS es el poise: $1 \text{ poise} \equiv 1 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Se propone como ejercicio deducir de la ecuación de dimensiones de la viscosidad esta equivalencia de unidades.

En la práctica, se suele agrupar k y η en un único parámetro, denotado con la letra b , escribiéndose $\vec{F}_v = -b\vec{v}$. Analicemos a continuación la dinámica de un objeto que cae en el seno de un fluido viscoso. Si se deja caer una partícula de masa m por un fluido viscoso, se observa que \vec{v} aumenta al principio, porque como la velocidad es próxima a cero, también la fuerza viscosa es pequeña. No obstante, poco a poco v aumenta y también lo hace la fuerza viscosa. La aceleración entonces disminuye hasta llegar a una situación estacionaria, con v constante.

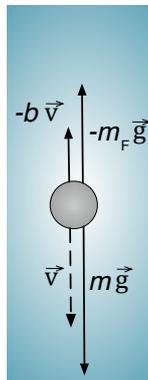


Figura 5.18: Fuerzas que actúan sobre una partícula que cae por un fluido viscoso.

Si aplicamos la segunda Ley de Newton (ver Fig. 5.18 en que se representan las fuerzas que actúan sobre la partícula):

$$m a = m g - m_F g - b v$$

donde $m_F g$ es el peso del fluido desalojado por la partícula, esto es, la fuerza de empuje que experimenta la partícula (principio de Arquímedes).

Se llama **velocidad límite** (v_{lim}) a la velocidad de la partícula al alcanzar la situación estacionaria ($a = 0$):

$$v_{lim} = \frac{(m - m_F) g}{b} \quad (5.9)$$

Si considerásemos el empuje despreciable: $v_{lim} = m g/b$.

Volviendo al caso de empuje no despreciable, si consideramos que la partícula es esférica de radio R y densidad ρ_o , y el fluido de densidad ρ_F y viscosidad η :

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho_o \frac{4}{3} \pi R^3 \\ m_F = \rho_F \frac{4}{3} \pi R^3 \\ b = 6 \pi R \eta \end{array} \right\} v_{lim} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 g (\rho_o - \rho_F)}{6 \pi R \eta} = \frac{2}{9} \frac{g R^2 (\rho_o - \rho_F)}{\eta}$$

Es sencillo estudiar en el laboratorio la caída de bolitas de acero de distintos diámetros en un tubo lleno de un líquido viscoso. Mediante la relación anterior y los datos experimentales puede obtenerse la viscosidad η del líquido.

Se propone como ejercicio el cálculo de la velocidad límite (en unidades del Sistema Internacional) de una gota de agua cayendo en aire y una bolita de acero en glicerina (líquido viscoso).

Datos: diámetro de la gota de agua y de la bolita de acero $d = 1 \text{ mm}$, densidad del agua $\rho_{agua} = 1 \text{ g/cm}^3$, densidad del aire $\rho_{aire} = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$, viscosidad del aire $\eta_{aire} = 1.81 \cdot 10^{-4} \text{ poises}$, densidad del acero $\rho_{acero} = 7.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, densidad de la glicerina $\rho_{glicerina} = 1.3 \text{ g/cm}^3$, viscosidad de la glicerina $\eta_{glicerina} = 8.33 \text{ poises}$.

Solución: $v_{lim}(\text{gota}) = 30.0 \text{ m/s}$, $v_{lim}(\text{bolita}) = 4.3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$.

Capítulo 6

DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA: TRABAJO Y ENERGÍA

En el capítulo anterior se ha introducido el concepto de fuerza, núcleo de la Mecánica Clásica como teoría del movimiento. Conceptualmente, una vez conocidas las fuerzas que actúan sobre una partícula, podemos determinar con precisión los detalles de su movimiento. Esto será posible en tanto seamos capaces de resolver la ecuación de movimiento $\vec{F} = d(m\vec{v})/dt$. En la práctica, esto no es siempre posible, por una variedad de razones. Realmente, salvo en casos excepcionalmente sencillos (por lo que se refiere a las dependencias de \vec{F} respecto al espacio o al tiempo) resolver la segunda ley de Newton puede ser matemáticamente muy complicado. No obstante, debe tenerse en cuenta que en muchos casos la información exhaustiva que proporciona la solución de dicha ecuación no resulta necesaria. Por ejemplo, nos puede bastar con conocer la velocidad con la que la partícula llega a un punto concreto, sin necesidad de tener datos sobre la trayectoria que haya seguido en función del tiempo.

Los conceptos que vamos a introducir en este capítulo: trabajo, energía, leyes de conservación,... atienden precisamente a la cuestión anterior. Mostraremos cómo resolver de una manera simplificada una variedad de problemas de indudable interés práctico en los cuales la variable tiempo no resulta relevante, apoyados en un conocimiento “global” de las fuerzas que actúan.

6.1. Trabajo

Vamos a introducir una nueva magnitud relacionada con la dinámica de una partícula: el **trabajo**.

Supongamos una partícula de masa m que se desplaza a lo largo de una trayectoria bajo la acción de una fuerza \vec{F} .

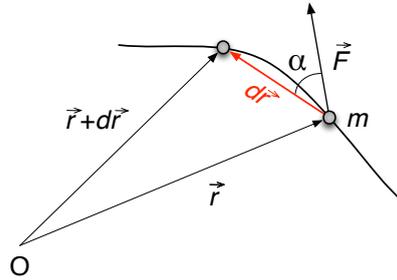


Figura 6.1: El trabajo elemental realizado por \vec{F} es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento $d\vec{r}$.

El **trabajo elemental** dW realizado por la fuerza \vec{F} se define como el producto escalar:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $d\vec{r}$ es un diferencial del desplazamiento de la masa m .

En el caso de la figura 6.1, $dW \equiv \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos \alpha$. El trabajo total a lo largo de un recorrido será:

$$W = \int_{\text{trayectoria}} dW = \int_{\text{trayectoria}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

En particular, si la masa se desplaza entre los puntos de vector posición \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , denotaremos:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (6.1)$$

El trabajo tiene las dimensiones : $[W] = [M] [L]^2 [T]^{-2}$, y en el Sistema Internacional se mide en julios ($J = N m$).

Nótese que para que se realice un trabajo es **necesario que la fuerza tenga una componente en la dirección del desplazamiento**.

Ejemplo 1: Trabajo bajo una fuerza constante.

Al calcular el trabajo realizado por una fuerza constante, dicha fuerza puede “salir” de la integral:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Supongamos que se trata de la fuerza gravitatoria:

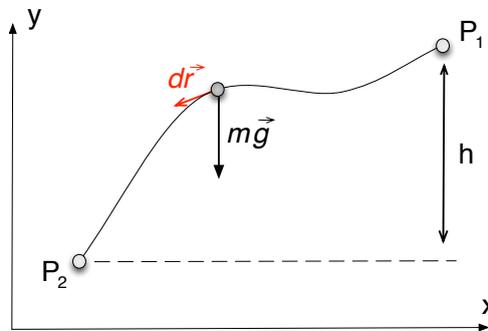


Figura 6.2: Trabajo de la fuerza de atracción gravitatoria, que puede considerarse constante cerca de la superficie terrestre.

$$\vec{F} = -m g \hat{j}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{F} \perp \hat{i}$ y que el ángulo entre \vec{F} y \hat{j} es de 180° :

$$W = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = m g (y_1 - y_2) = m g h$$

El trabajo realizado por la fuerza de gravedad es independiente de la trayectoria recorrida, dependiendo únicamente de la diferencia de altura entre las posiciones inicial y final.

Ejemplo 2: Péndulo simple.

Vamos a analizar ahora el trabajo realizado por las fuerzas que actúan en el sistema de la Fig. 6.3. Por lo que respecta a la tensión, no realiza trabajo porque no tiene componente en la dirección del desplazamiento.

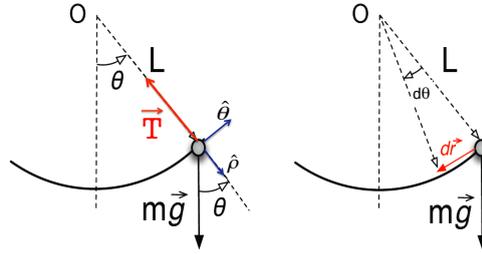


Figura 6.3: Péndulo simple de masa m y longitud del hilo L .

Calculemos entonces el trabajo realizado por el peso:

$$dW = (m \vec{g}) \cdot d\vec{r}$$

El trabajo realizado es el producto del desplazamiento por la *componente del peso en la dirección del desplazamiento*, que denotaremos \vec{P}_t (componente tangencial del peso).

$$\vec{P}_t = -m g \sin \theta \hat{\theta} \quad ; \quad d\vec{r} = +L d\theta \hat{\theta}$$

$$dW = -m g L \sin \theta d\theta$$

Nótese que $dW > 0$ porque fuerza y desplazamiento van en el mismo sentido (en la situación del dibujo: $\sin \theta > 0$ y $d\theta < 0$). Integrando:

$$W_{\theta \rightarrow 0} = \int_{\theta}^0 -m g L \sin \theta d\theta = m g L [\cos \theta]_{\theta}^0 = m g L [1 - \cos \theta]$$

A modo de resumen del ejemplo, diremos que cuando la masa se dirige hacia los puntos de amplitud máxima, el trabajo que realiza la gravedad es negativo y tiende a disminuir la velocidad de la partícula. En cambio, cuando se dirige al punto $\theta = 0$, el trabajo realizado por la gravedad es positivo y aumenta la velocidad de la masa.

6.2. Potencia

En muchas ocasiones interesa conocer el “ritmo” con que se realiza trabajo (se transmite energía) sobre la partícula. La magnitud que representa este concepto es la **potencia** (\mathcal{P}). Definiremos a continuación la *potencia instantánea*.

Para ello, recordemos que dW , el trabajo en un recorrido infinitesimal, se ha definido como: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Expresando \vec{r} en función de la velocidad de la partícula escribiremos:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \mathcal{P} dt \quad (6.2)$$

donde se ha definido la potencia instantánea como $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = dW/dt$.

En cuanto a sus dimensiones: $[\mathcal{P}] = [M] [L]^2 [T]^{-3}$, y se mide en vatios ($W = J/s$).

En muchos casos es interesante conocer la *potencia media* (potencia promediada durante un intervalo de tiempo representativo), definida como sigue:

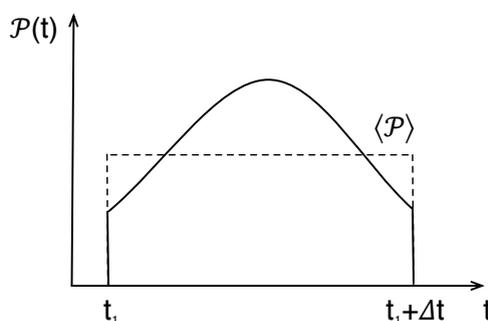


Figura 6.4: Concepto de potencia promedio.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} \rangle &\equiv \bar{\mathcal{P}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} \mathcal{P} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{W_{total}}{\Delta t} \end{aligned}$$

donde W_{total} es el trabajo realizado por la fuerza en el intervalo de tiempo Δt . Es evidente que $\langle \mathcal{P} \rangle$ puede interpretarse como aquel valor de potencia constante que produciría el mismo trabajo total en el intervalo de tiempo considerado.

6.3. Energía cinética

Consideremos la fuerza total que actúa sobre una partícula:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (6.3)$$

En el caso en que la masa permanezca constante, el trabajo realizado sobre la partícula puede expresarse como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

A partir de la fórmula anterior se puede encontrar una relación sencilla entre el trabajo total que realiza la fuerza y la modificación de la velocidad de la partícula sobre la que actúa. Así, el trabajo que realiza la fuerza \vec{F} cuando la masa m se desplaza de \vec{r}_1 a \vec{r}_2 :

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Si definimos la **energía cinética** como:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

entonces, el trabajo realizado por la fuerza \vec{F} en la trayectoria entre los puntos 1 y 2 se puede expresar así:

$$W_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1$$

El trabajo de la fuerza total aplicada (el trabajo que realizan todas las fuerzas que actúan sobre una partícula) es igual a la variación de su energía cinética (se “invierte” en modificar T .)

Hay que tener presente que el trabajo proporciona una información parcial: nos dice cómo cambia el módulo de la velocidad entre los puntos extremos de la trayectoria, pero no da información de lo que ocurre en el trayecto.

Ejemplo: Trabajo realizado por una fuerza central.

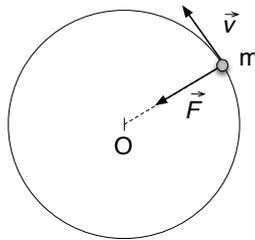


Figura 6.5: Trayectoria circular de una partícula bajo la acción de una fuerza central.

En el ejemplo de la figura, la fuerza que actúa sobre la partícula es central, en dirección radial. Esa fuerza es la causante de la aceleración normal o centrípeta de la partícula en su trayectoria circular.

$$\vec{F} = m \vec{a}_N \quad (6.4)$$

$$\vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow dW = 0 \Rightarrow \Delta T = 0. \quad (6.5)$$

Como vemos, si una partícula describe una trayectoria circular bajo la acción de una fuerza dirigida hacia el centro de dicha trayectoria, su energía cinética no varía. Si \vec{F} tuviera una componente tangencial el módulo de la velocidad cambiaría y $\Delta T \neq 0$.

6.4. Fuerzas conservativas y disipativas. Energía potencial

En general, el trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento entre dos puntos depende de la trayectoria. Existe, sin embargo, un tipo particular de fuerzas para las que esto no es así y el trabajo depende exclusivamente de la posición de los puntos inicial y final de la trayectoria¹ no del camino seguido. Este tipo de fuerzas reciben el nombre de **fuerzas conservativas**:

$$\int_{1, C_1}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{1, C_2}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \forall C_1, C_2$$

Entre las fuerzas conservativas se encuentran la gravitatoria, la elástica y la electrostática. Por su parte, entre las no conservativas se encuentran las que dependen de la velocidad o el tiempo y las fuerzas de rozamiento.

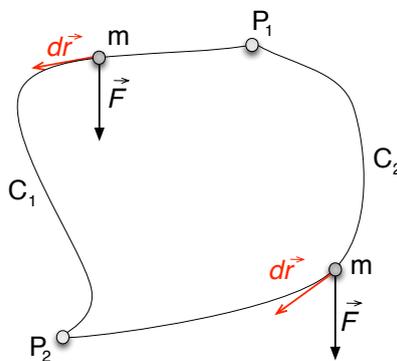


Figura 6.6: Desplazamiento de una partícula entre dos puntos, a lo largo de diferentes trayectoria, C_i .

Para una fuerza conservativa, como el trabajo sólo depende de los puntos

¹En lo que sigue, y por brevedad, denotaremos P_1 y P_2 o simplemente 1 y 2 los puntos inicial y final de la trayectoria, (\vec{r}_1 y \vec{r}_2 hasta el momento).

de partida y llegada, el trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada será nulo:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall C \text{ cerrada}$$

Para demostrarlo, basta con considerar dos puntos que dividan C en los dos caminos C_1 y C_2 (ver figura 6.6):

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{1, C_1}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{2, C_2}^1 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Puesto que W no depende del camino, [$\int_{1, C_1}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{1, C_2}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$], cambiando los límites de integración obtenemos que:

$$\int_{1, C_1}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{2, C_2}^1 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Entonces, sustituyendo el primer sumando por su valor, obtenemos:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Dado que el trabajo realizado por una fuerza conservativa sólo depende de los puntos de partida y de llegada, se puede definir una función escalar llamada **energía potencial**, $\mathcal{U}(\vec{r})$, tal que:

$$\Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}(\vec{r}) - \mathcal{U}(\vec{r}_o) = -W = - \int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

donde \vec{r}_o es un punto arbitrario de referencia.

Es importante tener en cuenta que, de acuerdo con la definición anterior, es la **diferencia de energía potencial** entre dos puntos lo que está definido sin ambigüedad. Despejando en la relación anterior podemos expresar el valor de la energía potencial en un punto \vec{r} , pero sin olvidar que la estamos refiriendo al valor que adquiere en uno de referencia \vec{r}_o . (Se suele elegir $\mathcal{U}(\vec{r}_o) = 0$).

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = \mathcal{U}(\vec{r}_o) - \int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Es importante tener presente que para poder definir una función de energía potencial, la fuerza tiene que ser necesariamente conservativa (la energía potencial tiene que ser independiente de la “historia” de la partícula). Lo podemos enfatizar mediante la relación $\Delta\mathcal{U} = -W_c$, donde llamamos W_c al trabajo de las fuerzas conservativas.

Las fuerzas no conservativas evidentemente pueden realizar trabajo, pero el valor de éste no queda determinado por lo que ocurre en los puntos inicial y final, sino que depende además del camino seguido entre ellos.

Antes de comentar algunos ejemplos de fuerzas conservativas, podemos anticipar que la relación entre \mathcal{U} y \vec{F} se puede invertir para obtener la fuerza a partir de la energía potencial. Más concretamente, restringiéndonos a problemas unidimensionales, tendremos que:

$$d\mathcal{U} = -F dx \Rightarrow F = -\frac{d\mathcal{U}}{dx}$$

Ejemplo 1: fuerza y energía potencial gravitatoria:

Recordemos que la fuerza gravitatoria se expresa:

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}, \quad (6.6)$$

donde G es la constante de gravitación universal ($G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$), m_1 y m_2 las masas de los cuerpos que se atraen, r la distancia que los separa y \hat{r} un vector unitario en la dirección que une ambos cuerpos.

Pensemos en la atracción ejercida por la Tierra, de masa M_T , sobre un cuerpo de masa m . Es sencillo comprobar que la fuerza gravitatoria es conservativa calculando el trabajo entre dos posiciones genéricas cualesquiera de m :

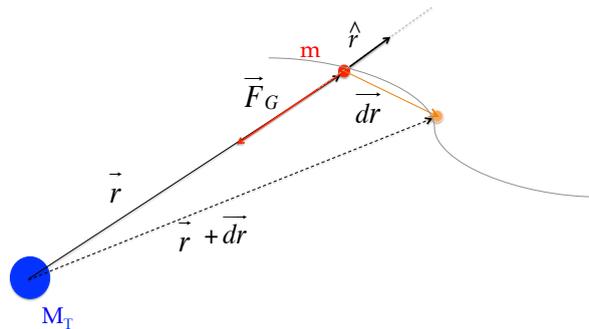


Figura 6.7: Fuerza gravitatoria ejercida por M_T sobre una partícula de masa m , en una posición dada por \vec{r} respecto a M ; la dirección de la fuerza viene dada por la de \vec{r} .

$$W = -\int_{r_0}^r \frac{G M_T m}{r^2} \hat{r} d\vec{r} = -\int_{r_0}^r \frac{G M_T m}{r^2} dr = \frac{G M_T m}{r} \Big|_{r_0}^r = G M_T m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Vemos que el trabajo solo depende de las posiciones extremas de la partícula, quedando demostrado que la fuerza gravitatoria es conservativa.

La forma más sencilla de calcular la energía potencial gravitatoria es calcular el trabajo de la fuerza gravitatoria y utilizar la expresión:

$$W = -\Delta\mathcal{U}$$

Si pensamos en el ejemplo 1 estudiado al hablar del trabajo realizado por una fuerza constante (sección 6.1, figura 6.2), es inmediato reconocer que el trabajo calculado corresponde a menos la variación de energía potencial gravitatoria: el trabajo realizado por el peso cuando la partícula iba de la posición 1 a la 2 era positivo, lo que implica que disminuye su energía potencial gravitatoria.

Ejemplo 2: energía potencial elástica:²

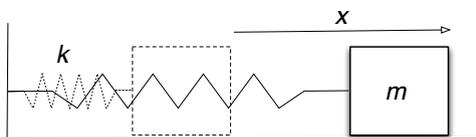


Figura 6.8: La fuerza elástica de compresión ejercida por el resorte cuando se ha estirado respecto a su longitud natural. Se ha representado en trazo discontinuo la situación en que el resorte está sin estirar y la posición de la masa viene dada por $x=0$.

Supongamos un resorte ideal de constante elástica k unido a un bloque de masa m (ver Fig. 6.8). Veamos que la fuerza elástica $\vec{F} = -k\vec{x}$ resulta ser conservativa:

$$\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(0) = - \int_{x'=0}^x \vec{F} \cdot d\vec{x}' = - \int_0^x (-k x') dx' = \frac{1}{2} k x^2$$

²Se estudiará en profundidad la fuerza elástica en los próximos capítulos; por el momento nos detendremos en la comprobación de su carácter conservativo

6.5. Variación/Conservación de la energía mecánica

Consideremos una partícula sometida a la acción simultánea de fuerzas conservativas y no conservativas:

$$\vec{F} = \vec{F}_{nc} + \vec{F}_c$$

El trabajo realizado por dichas fuerzas será:

$$W = W_{nc} + W_c$$

Aplicando lo visto anteriormente:

$$\left. \begin{array}{l} W_c = -\Delta\mathcal{U} \\ W = \Delta T \end{array} \right\} \Rightarrow W_{nc} = \Delta T + \Delta\mathcal{U}$$

Si definimos la **energía mecánica** $E \equiv T + \mathcal{U}$, la ecuación anterior nos indica:

$$\Delta E = W_{nc}, \quad (6.7)$$

resultado que debe entenderse del siguiente modo: *en presencia de fuerzas no conservativas, la ecuación anterior permite determinar el cambio de energía mecánica que producen dichas fuerzas.* Dicha expresión nos da un método para resolver problemas con fuerzas no conservativas si podemos evaluar W_{nc} de algún modo. Por otra parte, si solo actúan fuerzas conservativas recuperamos el conocido teorema de conservación de la energía: *si sobre una partícula sólo actúan fuerzas conservativas (no existe acción de fuerzas no conservativas), la energía mecánica se conserva.*³:

$$W_{nc} = 0 \Rightarrow E = \text{constante.}$$

6.6. Representación gráfica y estudio de las curvas de energía potencial

Como decíamos más arriba, en ausencia de fuerzas no conservativas (como podría ser el rozamiento), la energía mecánica se conserva: $E = T + \mathcal{U}$

³Es importante entender la afirmación que dice que la energía mecánica se “conserva” cuando no existen fuerzas de tipo no conservativo. Uno de los principios más asentados del conocimiento científico es que la energía se conserva siempre. Lo que ocurre es que el trabajo producido por fuerzas no conservativas puede convertirse en otras formas de almacenamiento energía, diferentes de la cinética o potencial

=*constante*. Cumpliéndose esa condición y conociendo la relación entre fuerza (conservativa) y energía potencial, que en una dimensión no es sino:

$$U(x) = - \int F dx \Rightarrow F_x = - \frac{dU}{dx}$$

estamos en condiciones de obtener información del movimiento a partir de las propiedades de $U(x)$. Vamos a verlo con un ejemplo:

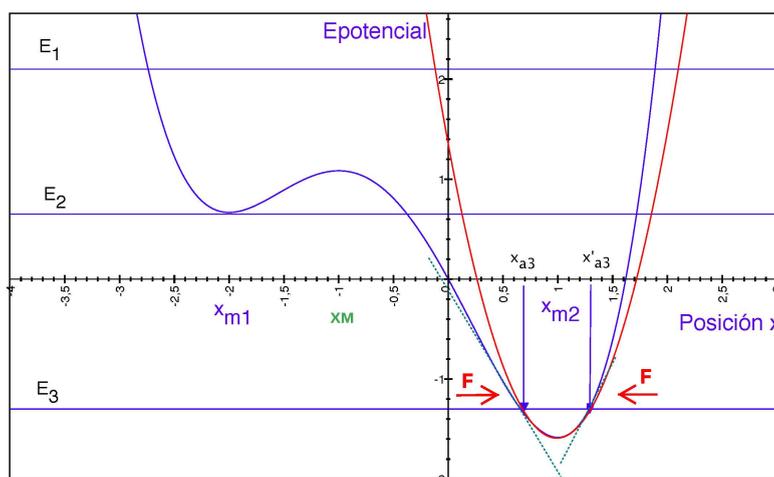


Figura 6.9: Representación gráfica de una función de energía potencial de una partícula, junto a diversos posibles valores de energía mecánica.

- Posiciones de equilibrio: son los puntos en que la derivada de $U(x)$ se anula, esto es, los máximos y mínimos de la función.

La energía potencial de la figura 6.9 presenta dos mínimos, x_{m1} y x_{m2} , y un máximo x_M que corresponden con las posiciones de equilibrio de la partícula.

- Direcciones y sentidos de la fuerza: como \vec{F} es la derivada de la energía potencial cambiada de signo, su signo es opuesto al de la pendiente de la curva. En el ejemplo de la figura, fijémonos en el mínimo en x_{m2} . Allí la partícula estará en equilibrio. Para $x > x_{m2}$ la pendiente es positiva, luego \vec{F} será negativa, dirigida hacia la posición de equilibrio, y para $x < x_{m2}$ la pendiente es negativa luego \vec{F} será positiva, dirigida de nuevo hacia la posición de equilibrio. Tenemos así una fuerza que conduce continuamente a la partícula hacia la posición de equilibrio; x_{m2} será una posición de equilibrio estable. Un análisis análogo en torno a x_M nos conduce a identificarlo como una posición de equilibrio inestable. Con

carácter general se identifican los mínimos de $U(x)$ como posiciones de equilibrio estable y sus máximos como posiciones de equilibrio inestable. A fuerzas como las que se acaban de describir, que tienden a llevar de nuevo a la partícula a su posición de equilibrio, se las denomina “fuerzas recuperadoras”.

- Puntos de retorno. Dependiendo del valor de la energía mecánica E_i de la partícula, esta va a poder describir distintos movimientos. Vamos a centrarnos, por ejemplo, en un nivel como el etiquetado como E_3 en la gráfica. Con esa energía la partícula solo puede moverse en torno a x_{m2} , con un movimiento acotado entre x_{a3} y x'_{a3} (puntos de retorno). La partícula no puede estar fuera de ese rango porque su energía potencial nunca puede superar el valor de su energía mecánica; los puntos de retorno por tanto son las abscisas de los puntos de intersección entre la curva $U(x)$ y el nivel -constante- E . Veremos que la situación que acabamos de describir se corresponde con un **movimiento oscilatorio** en torno al mínimo, con una amplitud dada por x_{a3} y x'_{a3} que depende del valor de la energía. Para valores de energía mecánica mayores que E_3 (como las E_2 y E_1 de la figura), la partícula podría recorrer un rango más amplio de posiciones a lo largo del eje x .

Parte III

MOVIMIENTO OSCILATORIO

INTRODUCCIÓN

Existen muchos movimientos que se repiten una y otra vez. Es decir, si pensamos en las magnitudes cinemáticas, la posición, velocidad y aceleración de la partícula toman el mismo valor a intervalos regulares de tiempo. Nos referiremos entonces a movimientos periódicos u oscilaciones. Un movimiento periódico se caracteriza porque existe una posición de equilibrio estable; cuando el sistema se ve alejado de dicha posición, actúa una fuerza que tiende a devolverlo al equilibrio.

En la parte III se va a estudiar la dinámica de sistemas mecánicos oscilantes. Se comenzará por el Movimiento Armónico Simple (MAS, oscilaciones armónicas), para pasar a analizar en los capítulos siguientes el movimiento de los sistemas oscilantes sometidos a fuerzas disipativas (oscilaciones amortiguadas) o a fuerzas externas periódicas (oscilaciones forzadas).

Capítulo 7

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Comenzamos con este capítulo el estudio de la dinámica de sistemas mecánicos oscilantes. Nos centraremos en el análisis de la dinámica de las oscilaciones armónicas, analizando algunos de los ejemplos paradigmáticos. La metodología común será plantear la ecuación de movimiento del sistema (segunda ley de Newton) y resolverla (o al menos comprobar la solución propuesta).

7.1. Ecuaciones básicas y ejemplos

Existen múltiples ejemplos de sistemas oscilantes. Se caracterizan por una magnitud física (posición, velocidad, aceleración...) cuyos valores se repiten a intervalos regulares de tiempo.

Un ejemplo interesante es el movimiento armónico simple que encontramos, por ejemplo, cuando se tiene una masa sujeta a un muelle y se estudia su movimiento respecto a la posición de equilibrio.

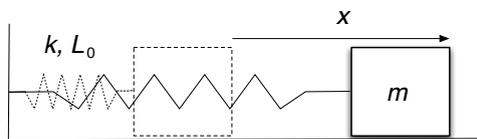


Figura 7.1: Si se estira el muelle una cierta longitud x respecto a su longitud natural L_0 , cuando se suelta la masa m comienza a oscilar.

Sea x la distancia de m respecto a su posición de equilibrio; corresponde al cambio de longitud que experimenta el muelle respecto a L_0 (ver Fig. 7.1). Al

estirar el muelle, este ejerce sobre m una fuerza proporcional a dicha distancia, siendo la constante de proporcionalidad (k), la *constante elástica del muelle* :

$$F = -k x$$

Escribiendo la segunda Ley de Newton:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

Para indicar derivada con respecto al tiempo en lo que sigue colocaremos un punto sobre la variable que se deriva, y si la derivada es doble dos puntos. Con esta notación, la ecuación¹ correspondiente al movimiento de m será:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

Es inmediato comprobar que si, como ocurre en este caso, la aceleración es proporcional al desplazamiento y con signo opuesto, la solución del movimiento es una oscilación armónica:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

siendo $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. En esta expresión A es la amplitud de la oscilación, ω_0 es la frecuencia angular natural ($\omega_0 = 2 \pi \nu = 2 \pi / \mathcal{T}$, expresada en el SI en rad/s) y δ es el desfase que viene dado por la posición a $t = 0$. ν es la frecuencia, medida en hertzios ($\text{Hz} = \text{ciclos/s} = \text{s}^{-1}$) y \mathcal{T} el periodo medido en segundos. La figura 7.2 ilustra la interpretación gráfica de estos parámetros para el caso $\delta = \pi/2$, es decir $x = A \cos(\omega_0 t + \pi/2) = A \sin(\omega_0 t)$.

Hemos de destacar que las características de la solución se extienden a cualquier sistema cuya ecuación dinámica se pueda expresar como:

$$\ddot{\xi} = -\omega_0^2 \xi$$

siendo ξ una magnitud física cualquiera (mecánica, térmica, eléctricas, etc).

¹Este tipo de ecuación, que ha surgido al aplicar la segunda ley de Newton, se denomina ecuación diferencial. Para entender su significado pensemos que la función $x(t)$ que satisfaga dicha relación entre derivadas nos proporcionará el movimiento del sistema (es la solución de la ecuación diferencial). Existen métodos de resolución sistemáticos, pero aquí operaremos de modo empírico.

Entonces, sumando las dos expresiones se tiene:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

Puede verse que es constante. Es inmediato ver que podemos tomar el punto de velocidad nula (puntos de retroceso en el lenguaje del capítulo 6) como referencia sencilla para calcular la energía del sistema oscilante.

Veamos en este caso qué información puede extraerse del análisis de la curvas de energía potencial, siguiendo el estudio planteado en el capítulo 6.

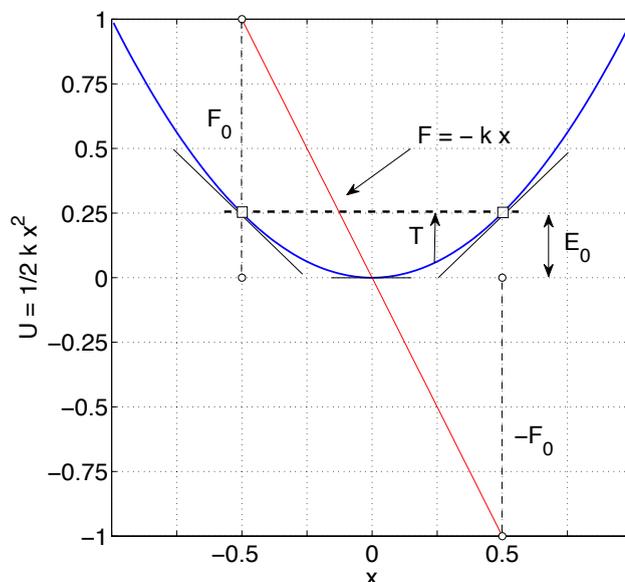


Figura 7.3: Representación gráfica de la energía potencial elástica asociada a la fuerza $F = -kx$ frente a x .

Se muestra en la figura la parábola que representa a la energía potencial elástica en función de la posición. Para un valor dado de energía total (llamémoslo E_0), la oscilación tendrá lugar en torno al equilibrio y con una cierta amplitud. En nuestro ejemplo, si tomamos en particular $E_0 = 0.25$, dado que $E = T + U$ y T sólo puede ser positiva o nula, los valores admisibles de U son los que pertenecen al intervalo $0 \leq U \leq 0.25$. Dicho de otro modo, la partícula realiza oscilaciones entre los puntos $x = -0.5$ y $x = 0.5$, que serían los “puntos de retorno” como indica el gráfico. En dichos extremos tenemos $E = U$, es decir, la partícula se detiene ($v = 0$) y sólo tiene energía potencial. Tras detenerse, y debido a la fuerza $F = -kx$, “acelera” hacia la posición de equilibrio, donde la energía

potencial es nula y la total coincide con la cinética $E = T \Leftrightarrow U = 0$. Las propiedades del movimiento de la partícula sometida a la fuerza elástica del ejemplo analizado son, en realidad, aplicables a situaciones mucho más generales. En realidad, lo dicho puede aplicarse a cualquier sistema sometido a una “fuerza recuperadora”, que definiremos como aquella que produce el retorno a la posición de equilibrio de la partícula sobre la que actúa.

■ **Energías cinética y potencial medias:**

Vamos a evaluar $\langle T \rangle$ y $\langle U \rangle$, valores promedio de las energías cinética y potencial, respectivamente, tomando como referencia un intervalo temporal igual al periodo \mathcal{T} .

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \text{sen}^2(\omega_0 t + \delta)$$

$$\langle T \rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} T dt = \frac{m A^2 \omega_0^2}{2 \mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \text{sen}^2(\omega_0 t + \delta) dt$$

Calculando la integral se obtiene:

$$\langle T \rangle = \frac{m A^2 \omega_0^2}{2 \mathcal{T}} \frac{\mathcal{T}}{2} = \frac{1}{4} k A^2$$

De forma análoga puede calcularse el valor medio de la energía potencial:

$$\langle U \rangle = \frac{k A^2}{2 \mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \text{cos}^2(\omega_0 t + \delta) dt = \frac{1}{4} k A^2$$

Se tiene por tanto que los valores medios corresponden en ambos casos a la mitad del valor de la energía mecánica E .

$$\langle U \rangle = \langle T \rangle = \frac{1}{2} E$$

■ **Deducción de la ecuación de movimiento a partir de la expresión de la energía:**

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Al ser la energía mecánica constante, su derivada respecto al tiempo debe ser cero.

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m 2 \dot{x} \ddot{x} + \frac{1}{2} k 2 x \dot{x} \Rightarrow m \ddot{x} + k x = 0$$

Despejando encontramos la ecuación diferencial de movimiento:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x \text{ siendo } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

7.3. Ejemplos

Ejemplo 1: Objeto colgado de un muelle vertical (Fig. 7.4)

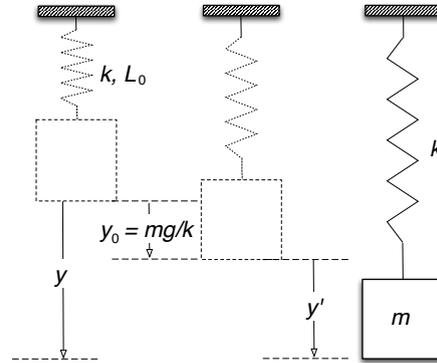


Figura 7.4: Objeto de masa m colgado de un muelle vertical.

Ahora, la ecuación de movimiento es:

$$\begin{aligned} m \ddot{y} &= -k y + m g = -k y' \Rightarrow m \ddot{y}' = -k y' \\ \Rightarrow \ddot{y}' &= -\frac{k}{m} y' \end{aligned}$$

De modo que si referimos el movimiento a la posición de equilibrio (dibujo central en la figura) podemos “olvidarnos” de la gravedad, ya que recuperamos la ecuación del movimiento armónico simple.

Por otra parte, podemos verificar que la expresión de la energía potencial total (elástica más gravitatoria) tomando como referencia la posición de equilibrio es:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} k y'^2$$

Ejemplo 2: El péndulo simple.(Fig. 7.5)

En un péndulo simple (partícula de masa m en el extremo de un hilo inextensible de longitud L ; movimiento restringido a un plano) el movimiento cuando se ve apartado del equilibrio y se le deja evolucionar libremente es oscilatorio, pero como veremos a continuación sólo es armónico (M.A.S.) para pequeños desplazamientos fuera del equilibrio.

En la dirección del hilo (radial), la tensión menos la componente radial del peso proporciona una aceleración centrípeta.

$$T - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{L}$$

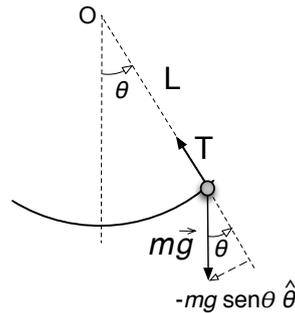


Figura 7.5: Esquema de un péndulo simple, mostrando las fuerzas que actúan sobre la partícula de masa m . Se muestra la componente tangencial del peso. $\theta > 0 \Rightarrow F_\theta = -mg \text{sen} \theta < 0$.

En cuanto a la dirección tangencial, la segunda ley de Newton nos proporciona información del movimiento (incluida la modificación del módulo de \vec{v}):

$$F_T = m a_T, \text{ donde}$$

$$a_T = \dot{v} = L \dot{\omega} = L \ddot{\theta} \equiv L \alpha$$

Sustituyendo a_T en la expresión anterior:

$$-m g \text{sen} \theta = m L \ddot{\theta}$$

La ecuación anterior no corresponde en general a un M.A.S., pero para $\theta < 10^\circ$ podemos utilizar la aproximación $\text{sen} \theta \approx \theta$, y obtenemos la ecuación de un M.A.S.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \theta$$

Por analogía con lo visto al analizar el sistema masa-muelle,² se tiene que en el caso de las oscilaciones de baja amplitud del péndulo simple la frecuencia angular natural de la oscilación libre viene dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Y la posición de la partícula vendrá dada por: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$

En la siguiente sección se profundizará en el hecho de que la aparición de oscilaciones armónicas para pequeñas amplitudes es una propiedad muy general, como ya se indicó en el capítulo 6 al analizar las curvas de energía potencial.

²La frecuencia se calcula como la raíz cuadrada de la constante que acompaña al desplazamiento en la ecuación de movimiento.

Ejercicios propuestos:

1. Análogamente a lo que se acaba de mostrar, se propone al lector que obtenga la ecuación de movimiento para las oscilaciones del péndulo simple a partir de la ecuación de su energía; teniendo en cuenta que $E = T + U = \text{constante} \Rightarrow dE/dt = 0$.

2. Se plantea igualmente la siguiente pregunta: ¿cuál es el valor medio - en un periodo- de la potencia suministrada por el muelle en el caso de la figura 7.1? Recordad que $\mathcal{P}_{ins} = Fv$ y que habrá que evaluar $\langle \mathcal{P}_{ins} \rangle$ en un periodo.

7.4. Pequeñas oscilaciones. Aproximación armónica

En esta sección se va a ver que, en general, los sistemas oscilantes no armónicos pueden ser descritos como si lo fuesen en tanto en cuanto nos limitemos a oscilaciones de pequeña amplitud (“pequeñas oscilaciones”).³ Cuando no se cumpla dicha condición, el comportamiento se hace sumamente complejo.

Comenzaremos recordando algunos aspectos tratados en el análisis de sistemas oscilantes mediante argumentos de fuerza/energía, a los que aquí se dará una fundamentación matemática general.⁴ Hasta el momento se han establecido de modo muy genérico las condiciones que cumple un sistema que oscila en torno a un punto de equilibrio. Limitándonos a casos unidimensionales y tomando $x_{eq} = 0$, la fuerza recuperadora F y su energía potencial asociada $U = -\int F dx$ deben ser tales que

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} > 0, \quad x < 0$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = 0, \quad x = 0$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} < 0, \quad x > 0$$

Nótese que la energía potencial asociada presenta un mínimo en $x = 0$, posición de equilibrio estable.

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, muy generales, vamos a concretar la forma de F y U apoyándonos en razonamientos basados en la interpre-

³Salvo en situaciones muy excepcionales que no vamos a analizar aquí.

⁴Se recomienda releer la sección 6.6, además de la 7.2 que se acaba de ver.

tación del concepto de derivada (Cap. 3). Asumiendo continuidad en la función F y sus derivadas (algo natural desde el punto de vista físico), podemos decir que en puntos x suficientemente próximos al origen, la fuerza F sería reemplazable por una aproximación lineal, f , cuya pendiente es la derivada $F'(x=0)$. De acuerdo con esto, se puede aproximar F como

$$F(x) \approx f(x) = -\mathcal{K}x \quad , \quad x \rightarrow 0 \quad (7.1)$$

donde $\mathcal{K} = -F'(x=0)$. Vemos en la figura 7.6 que $F(x)$ se aproxima por una recta de pendiente negativa y que pasa por el punto $x=0$.⁵ Integrando esa fuerza se encuentra la energía potencial asociada:

$$\mathcal{U}(x) \approx u(x) = \frac{1}{2}\mathcal{K}x^2 \quad , \quad x \rightarrow 0 \quad (7.2)$$

La expresión de la energía con dependencia cuadrática en x se conoce como **aproximación armónica** de la energía potencia, y corresponde a la función parabólica de la figura. Nótese que $\mathcal{K} = -F'(x=0) = d^2\mathcal{U}/dx^2|_{x=0}$.

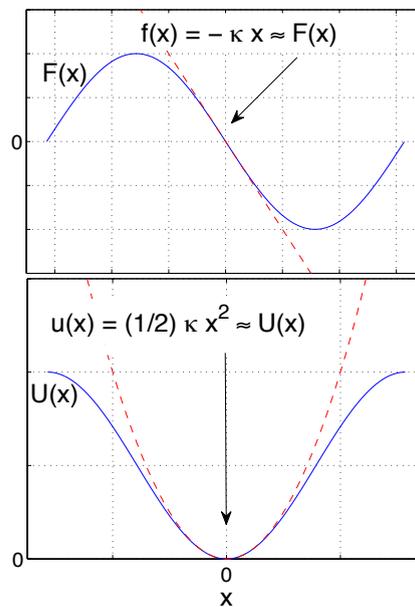


Figura 7.6: Representación gráfica de la fuerza recuperadora $F = -a \sin(bx)$ y su energía potencial asociada $\mathcal{U} = (a/b) - (a/b) \cos(bx)$, junto con las aproximaciones lineal/cuadrática.

⁵ Esto implica reconocer simplemente que, en un entorno suficientemente pequeño, una curva y su recta tangente son muy parecidas.

En otras palabras, cualquier movimiento oscilatorio” provocado por una fuerza $F(x)$, puede aproximarse por una oscilación armónica. La constante \mathcal{K} representa la de un “muelle equivalente”, cuyo efecto sería indistinguible del de la fuerza propiamente dicha, para oscilaciones de pequeña amplitud. En la figura 7.6 la fuerza recuperadora es de la forma $F(x) = -a \operatorname{sen}(bx)$ con a y b constantes positivas. En este caso tendríamos por tanto que $\mathcal{K} = a \cdot b$. Nótese que esa fuerza es la del péndulo simple estudiado en el apartado anterior, para el que hemos visto que la fuerza “recuperadora” es $F_T = -mg \operatorname{sen} \theta$.

Evidentemente, el rango de validez de la aproximación armónica dependerá de cada problema concreto. De modo genérico, lo que puede asegurarse es que en el entorno de la posición de equilibrio la oscilación es “casi armónica”, con una constante recuperadora dada por la ecuación anterior.

Llegados a este punto, vamos a ver que las condiciones de que la posición de equilibrio sea $x=0$ y que la energía potencial en el equilibrio sea cero se pueden obviar sin que las conclusiones extraídas pierdan validez. Para ilustrarlo, vamos a suponer una energía potencial como la analizada en la sección 6.6 cuya dependencia con la posición es algo más complicada.

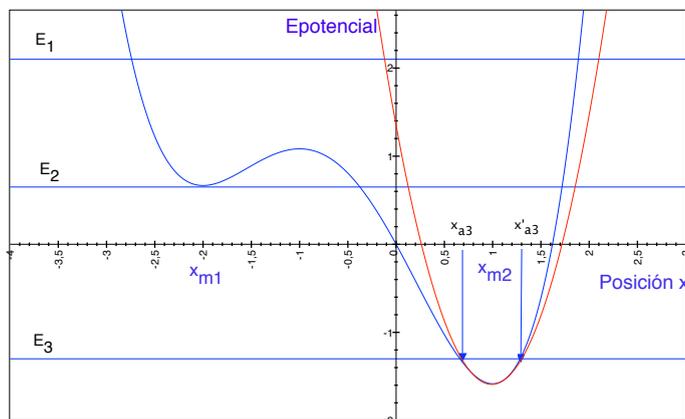


Figura 7.7: Curva de energía potencial frente a la posición de la partícula. Se indican los dos puntos de equilibrio estable: x_{m1} y x_{m2} . Se muestra asimismo la parábola que corresponde a la aproximación armónica, válida en el entorno del mínimo x_{m2} .

La función de la figura 7.7 presenta dos mínimos, x_{m1} y x_{m2} , que corresponden con las dos posiciones de equilibrio estable. Dependiendo del valor de la energía mecánica E_i de la partícula, esta va a poder describir distintos movimientos. Vamos a centrarnos en un nivel de energía como el etiquetado como E_3 en la gráfica. Con esa energía la partícula va a describir una oscilación en torno a x_{m2} y acotada entre x_{a3} y x'_{a3} (puntos de retorno). De acuerdo con

lo que se acaba de ver, la energía de la partícula podrá describirse, de forma aproximada pero esencialmente correcta,⁶ como:

$$\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(x_{m2}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathcal{U}}{dx^2} \right|_{x=x_{m2}} (x - x_{m2})^2 \quad (7.3)$$

donde simplemente se ha sustituido la distancia respecto al equilibrio (x) de la expresión 7.2, por la actual ($x - x_{m2}$), y donde se ha tenido en cuenta que la energía potencial toma un valor no nulo en la posición de equilibrio, $\mathcal{U}(x_{m2}) \neq 0$. Se interpreta por tanto que la partícula describirá una oscilación, esencialmente armónica, de frecuencia $\omega_0 = \sqrt{\mathcal{K}/m}$, siendo $\mathcal{K} = d^2\mathcal{U}/dx^2|_{x=x_{m2}}$ y amplitud $A = x'_{a3} - x_{m2} = x_{m2} - x_{a3}$.

Explicación alternativa opcional

Hay un modo alternativo de justificar las ecuaciones 7.1 y 7.2 basado en el desarrollo en serie de Taylor. Recordemos que para una función $f(x)$, en torno a $x = 0$, este desarrollo proporciona una representación polinómica dada por la serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=0} x^n \quad (7.4)$$

Respecto a la fuerza, dado que se anula en la posición de equilibrio (tomada aquí en $x = 0$), tendría como primer término no nulo el de orden lineal. Podemos decir

$$F(x) = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=0} x + O(x)^2 \quad (7.5)$$

En cuanto a la energía potencial, puede expresarse como

$$\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathcal{U}}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 + O(x)^3 \quad (7.6)$$

donde hemos usado $\mathcal{U}(x = 0) = 0$ y $\mathcal{U}'(x = 0) = 0$. Cuando el desplazamiento respecto al equilibrio está restringido (=valores de x pequeños), la expresión de la energía que resulta de despreciar $O(x)^3$ es una buena aproximación para la energía del oscilador:

$$\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathcal{U}}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 \quad (7.7)$$

⁶Los valores de x compatibles con la energía E_3 son cercanos a x_{m2} , con lo que las distancias al mínimo siempre serán pequeñas. Al calcular las potencias sucesivas de la diferencia ($x - x_{m2}$) cada vez la contribución es menos importante, por lo que se desprecian los términos para $n > 2$ sin cometer grandes errores.

Y se encuentra de nuevo la expresión de la **aproximación armónica** para la energía potencial. A la vista de esta ecuación y de la 7.2, se puede ver que la *constante de muelle* equivalente para cualquier problema de pequeñas oscilaciones puede obtenerse como

$$\mathcal{K} = -\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2\mathcal{U}}{dx^2} \right|_{x=0} \quad (7.8)$$

Capítulo 8

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Vamos a estudiar la dinámica de un oscilador sometido además a la acción de una fuerza de fricción de tipo viscoso como la introducida en la sección 5.5.1. Comenzaremos planteando la ecuación diferencial de movimiento; analizaremos a continuación el comportamiento del sistema en función del valor de la constante de amortiguamiento en relación a la frecuencia angular natural del oscilador.

8.1. *Ecuaciones básicas.*

En los movimientos oscilatorios reales se disipa energía debido a la presencia inevitable de fuerzas de fricción. Eso da lugar a una disminución paulatina de la amplitud de oscilación.

Vamos a contemplar el caso de amortiguamiento de tipo viscoso (ver Fig.8.1) y estudiaremos sus características principales. No obstante, existen otros tipos de fricción que serán tratados como problemas de aplicación. Centrándonos en el que nos ocupa, una buena descripción para la fricción es:

$$\vec{F}_v = -b \vec{v} \quad (8.1)$$

siendo la fuerza de fricción proporcional y de sentido opuesto a la velocidad. b es un parámetro que depende del medio viscoso (en concreto, de su viscosidad η) y de la geometría del objeto sumergido en él. Entonces, la ecuación de movimiento queda:

$$m \ddot{x} = -k x - b \dot{x} \quad (8.2)$$

Dividiendo por m la ecuación anterior y agrupando en el primer miembro se llega a:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (8.3)$$

A b/m lo denominaremos **constante de amortiguamiento**, γ .

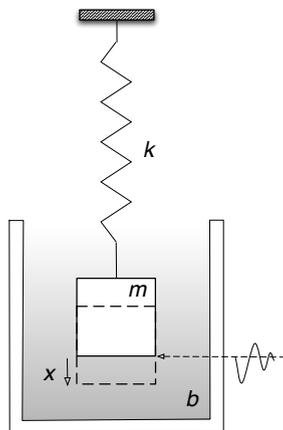


Figura 8.1: Esquema de un oscilador mecánico amortiguado. La masa m , sujeta a un muelle de constante k , se halla además sumergida en un líquido viscoso, lo que la somete a una fuerza adicional $-b\dot{x}$.

El análisis de la solución exacta de esta nueva ecuación diferencial se aplazará hasta el apartado siguiente. Aquí comenzaremos por proponer una solución aproximada, que nos permitirá ir conociendo las propiedades del sistema. Nos basaremos en una serie de consideraciones físicas razonables, que permitirán hacer una formulación matemática básica del problema:

1. Si b es muy pequeño es razonable suponer que el sistema oscilará con una frecuencia muy parecida a la frecuencia natural del sistema. En estas condiciones, la *frecuencia de las oscilaciones amortiguadas* será $\omega_1 \approx \omega_0$.
2. De la misma manera, si el amortiguamiento es débil, la pérdida de energía en cada ciclo (1 ciclo= 1 oscilación) debida a la fricción se puede suponer muy pequeña, y la energía puede tratarse de forma similar a la de un MAS. En el MAS el valor medio de la energía cinética y de la potencial coinciden: $\langle U \rangle = \langle T \rangle = \frac{1}{2}E$. Si expresamos la tasa de pérdida de energía con el tiempo (potencia instantánea= $\vec{F}\vec{v}$) asociada a la fricción como $F_v\dot{x}$, se tiene que:

$$\frac{dE}{dt} = F_v \dot{x} = -b \dot{x}^2 \quad (8.4)$$

Y como el cuadrado de la velocidad es proporcional a la energía:

$$\frac{dE}{dt} \sim -\frac{b}{m} E = -\gamma E \quad (8.5)$$

Se considera que el tiempo característico en el que la energía E varía de forma apreciable es muy grande comparado con el periodo de oscilación. En estas condiciones, podemos considerar que la energía "casi" se conserva en el intervalo de unos pocos ciclos. En la Fig. 8.2 se ha representado esa condición para la amplitud, de forma que no apreciamos cambios si nos fijamos en unas cuantas oscilaciones, aunque sí que se produce una disminución en escalas más largas de tiempo. La ecuación obtenida es fácil de resolver:

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma E \Rightarrow \frac{dE}{E} = -\gamma dt \Rightarrow E = E_0 e^{-\gamma t} \quad (8.6)$$

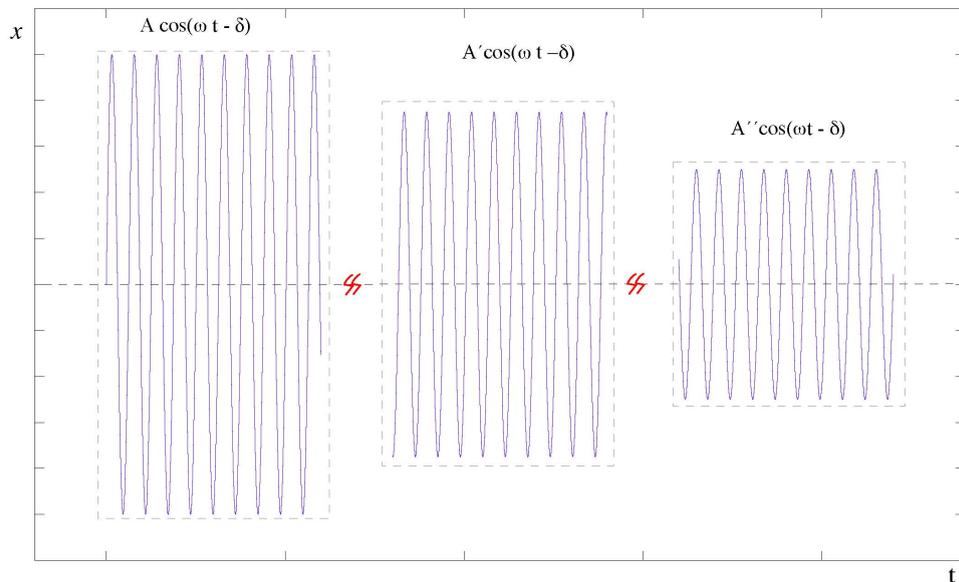


Figura 8.2: Representación de la hipótesis cuasi-estacionaria en las oscilaciones amortiguadas. La amplitud disminuye con el tiempo, pero, como lo hace lentamente, se mantiene prácticamente constante en intervalos de varias oscilaciones.

Con esto tendríamos ya una información parcial sobre el movimiento del sistema. Para el caso de una leve fricción viscosa, la energía decrece de modo exponencial. Esta característica es muy importante y, entre otras cosas, nos permite definir el denominado *factor de calidad*, proporcional

al cociente entre la energía en un instante t : $E(t)$ y la pérdida de energía en un ciclo, $\Delta E = E(t + T) - E(t)$.¹

$$Q \equiv 2 \pi \frac{E}{|\Delta E|} \quad (8.7)$$

De acuerdo con (8.6), cuando el amortiguamiento es débil puede verse que $\Delta E \approx E\gamma T$, con lo que Q puede escribirse también como $Q = \omega_1/\gamma = \omega_0/\gamma$.

3. De acuerdo con lo que se acaba de ver, la amplitud de oscilación puede también tratarse en la hipótesis "cuasi-estacionaria" de la figura 8.2 Recordemos que en el M.A.S. la energía se relaciona con la amplitud del modo:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow \frac{E}{E_0} = \frac{A^2}{A_0^2} \Rightarrow A^2 = A_0^2 e^{-\frac{b}{m} t} \Rightarrow A = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t} \quad (8.8)$$

donde $A_0 \equiv A(t = 0)$.

8.2. Discusión de la solución exacta de la oscilación amortiguada

En este apartado, vamos a estudiar la solución exacta de la ecuación de movimiento. No entraremos en el detalle de los métodos sistemáticos de resolución de ecuaciones diferenciales, limitándonos aquí a presentar una hipótesis plausible de la forma de la solución, y dando al lector las pautas para verificar su corrección. El argumento es el siguiente: como ya dijimos, para valores de b muy pequeños la solución de la ecuación de movimiento debe asemejarse a la del M.A.S., pero con una amplitud que en lugar de permanecer constante, decrece poco a poco. Puesto que en esta hipótesis "cuasiestacionaria" (válida si b es muy pequeño) se mostró que el decaimiento en amplitud sigue un patrón exponencial ecuación 8.8), supondremos que la solución exacta toma la forma

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (8.9)$$

que corresponde a un M.A.S. de frecuencia angular ω_1 y amplitud decreciente.

¹En general podemos interpretar físicamente la magnitud física Q en términos de la pérdida relativa de energía.

Puede verificarse que la hipótesis anterior es correcta sin más que derivar y sustituir en la ecuación de la ley de Newton. De hecho, para que así sea, la frecuencia ω_1 debe tomar el valor:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (8.10)$$

Puede observarse que para que ω_1 tenga sentido como frecuencia de oscilación, debe verificarse que $\omega_0 > \gamma/2$. Denominaremos a esa condición como de “**Amortiguamiento débil**”. Diremos que la solución exacta del movimiento oscilatorio amortiguado viscoso en condiciones de amortiguamiento débil toma la forma:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - (\gamma^2/4)} t + \phi) \quad (8.11)$$

Es el momento de introducir una consideración importante: el movimiento de un oscilador amortiguado va a mostrar características muy diferentes en función del signo de la diferencia entre los parámetros ω_0^2 y $\gamma^2/4$.

Pueden distinguirse tres situaciones, que se detallan a continuación:

- (i) Amortiguamiento débil o subamortiguamiento: $\gamma/2 < \omega_0 \Rightarrow \omega_1 > 0$ es la frecuencia de la oscilación. Es el caso ya descrito, que se interpreta como una oscilación similar a un M.A.S. de frecuencia ω_1 , pero donde la amplitud presenta un decaimiento exponencial (tanto menos acusado cuanto menor sea el amortiguamiento)
- (ii) Amortiguamiento crítico: $\gamma/2 = \omega_0 \Rightarrow \omega_1 = 0$. Cuando se da esta situación **el sistema no va a oscilar**, siendo la solución de la forma:

$$x_{crit}(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (8.12)$$

Los valores de A y B son característicos de cada movimiento, estando determinados por las condiciones iniciales (posición y velocidad en $t=0$): $A=x(0)$ y $B= \dot{x}(0) + (\gamma/2)x(0)$

- (iii) Sobreamortiguamiento: $\gamma/2 > \omega_0 \Rightarrow \omega_1 = i\sqrt{(\gamma/2)^2 - \omega_0^2}$. Aparece una frecuencia “imaginaria”, indicación de que el sistema tampoco oscila en estas condiciones. La forma que adquiere la solución del movimiento del oscilador sobreamortiguado es:

$$x_{sup}(t) = A_1 e^{-(\frac{\gamma}{2} + \beta)t} + A_2 e^{-(\frac{\gamma}{2} - \beta)t} \quad (8.13)$$

Nótese que hemos definido la constante (con dimensiones de $[T]^{-1}$) $\beta \equiv \sqrt{(\gamma/2)^2 - \omega_0^2}$ para simplificar la notación. A_1 y A_2 se determinarán igualmente a partir de las condiciones iniciales.

En la figura 8.3 se representa la solución del movimiento de un oscilador amortiguado para cada uno de los casos discutidos anteriormente. Deben destacarse varios aspectos: (i) la modulación de amplitud de la solución oscilante para el caso subamortiguado, que viene dada por el factor exponencial, (ii) en las soluciones crítica y sobreamortiguada no llega a producirse una oscilación y (iii) la solución sobreamortiguada se separa menos del equilibrio (para condiciones iniciales idénticas), pero regresa hacia este con más lentitud que la crítica.

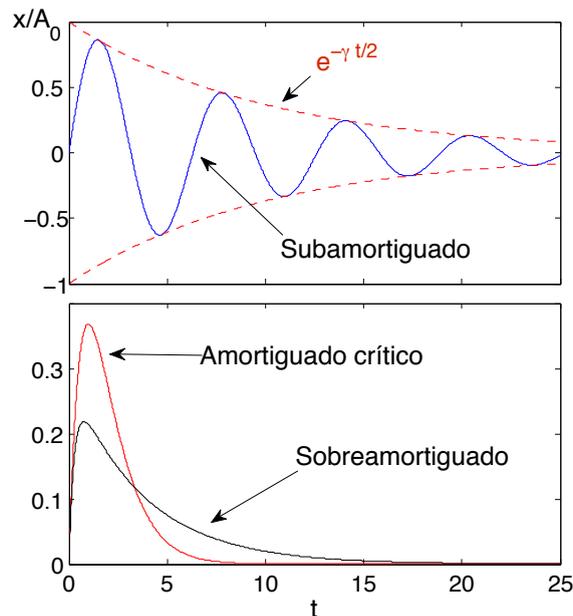


Figura 8.3: Soluciones subamortiguada, crítica y sobreamortiguada para un oscilador armónico sometido a una fuerza de fricción creciente ($\gamma/\omega_0 = 0.2, 2$ y 4 , respectivamente) y con las mismas condiciones iniciales.

Lectura opcional (hasta el final de la sección)

Para finalizar este capítulo, vamos a reconsiderar la evolución de la energía del sistema. Recordemos que bajo la hipótesis cuasiestacionaria obteníamos el decrecimiento exponencial de la energía, dado por la expresión 8.6. Realmente, puesto que se conoce ya la forma exacta de la solución $x(t)$ de la oscilación, se puede obtener la forma exacta para la energía que debería parecerse a la aproximada tanto más cuanto mejor pueda aplicarse la citada hipótesis, esto

es, cuando en un conjunto de varias oscilaciones la amplitud haya decaído muy poco. Es posible evaluar de manera exacta la energía del sistema para un caso subamortiguado partiendo de la ecuación (8.11), y teniendo en cuenta que:

$$E(t) = U + T = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (8.14)$$

A modo de ejemplo, se muestra en la figura 8.4 la evolución de la energía para un sistema con $m = 1 \text{ kg}$, $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$, $\gamma = 0,2 \text{ s}^{-1}$. Aunque puede apreciarse la diferencia entre la dependencia $E(t)$ exacta y la aproximada, esta proporciona una descripción aceptable. Se comprueba fácilmente que disminuyendo γ el acuerdo mejora notablemente. En general, para valores del factor de calidad superiores a 5 ($Q = \omega_0/\gamma > 5$), la fórmula exponencial $E = E_0 e^{-\gamma t}$ da resultados razonables, por lo que la usaremos para describir el decaimiento de la energía con el tiempo.

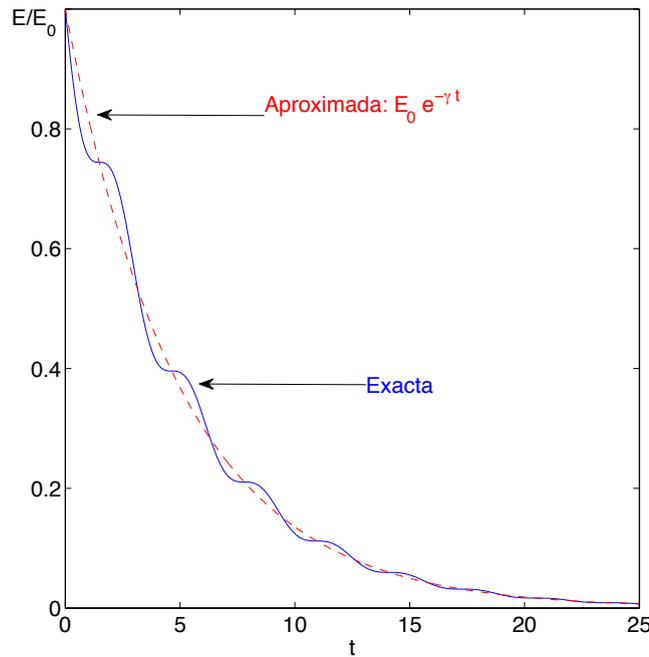


Figura 8.4: Evolución temporal de la energía mecánica de un oscilador subamortiguado. Se compara la expresión exacta, obtenida a partir de 8.14 con la solución aproximada dada por 8.6. Se ha tomado $m = 1, \omega_0 = 1, \gamma = 0.2$ como en el ejemplo anterior.

Capítulo 9

OSCILACIONES AMORTIGUADAS Y FORZADAS

En este capítulo se introduce un nivel más en la complejidad del oscilador. Además de considerar la acción de la fuerza recuperadora y la de amortiguamiento viscoso sobre la partícula, supondremos que se le aplica una fuerza externa de tipo oscilante. Sin pérdida de generalidad¹ la tomaremos de la forma $F_0 \cos \omega t$, con F_0 una cierta amplitud (máximo valor de la fuerza externa aplicada) y ω su frecuencia angular, siendo en general ambos parámetros “variables”. Si se deja transcurrir tiempo suficiente, el movimiento del sistema es una oscilación armónica, de frecuencia ω (la de la fuerza externa) y cuya amplitud depende del valor de ω en relación con ω_0

9.1. *Ecuaciones básicas y soluciones*

Un planteamiento básico de sistema amortiguado y forzado puede hacerse en términos del esquema que muestra la figura 9.1, que no es otra cosa que el prototipo del capítulo anterior, al cual se introduce una fuerza adicional a través de la vibración del soporte.

¹Basándonos en el Teorema de Fourier, podemos afirmar que cualquier acción periódica de frecuencia ω puede construirse por superposición de funciones armónicas $\sin(\omega_n t)$ y $\cos(\omega_m t)$, (con $\omega_n = n\omega$; $\omega_m = m\omega$), que actúan como base de funciones. Además, la restricción de la forma $\cos(\omega t)$ no afecta a las propiedades que aquí estudiaremos ya que se relaciona básicamente a las condiciones iniciales, aspecto no fundamental en lo que sigue.

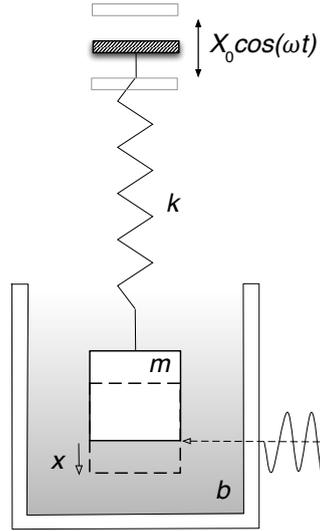


Figura 9.1: Esquema de un oscilador mecánico amortiguado y forzado.

Puede verificarse que cuando el soporte del muelle oscila del modo indicado: $X_0 \cos(\omega t)$, esto se traduce en una acción del tipo $F_0 \cos(\omega t)$ sobre el bloque de masa m , siendo $F_0 = kX_0$. Así pues, la ecuación de movimiento del sistema ($ma = \sum F_i$) va a quedar:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t \quad (9.1)$$

Una vez más, prescindiremos del análisis matemático detallado para resolver esta ecuación. Nos limitaremos a ofrecer argumentos físicos razonables sobre la forma que ha de tener la solución y estudiaremos la validez mediante sustitución directa en la ecuación diferencial. En primer lugar debe notarse que los fenómenos físicos involucrados en este problema guardan relación con varias escalas de tiempo, relacionadas con tres valores de frecuencia:

- (i) la frecuencia natural, a la que oscilaría el sistema en ausencia de fricción y de fuerza externa $\omega_0 = \sqrt{k/m}$
- (ii) la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas, no forzadas $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}$, que corrige a la anterior en presencia de fricción.
- (iii) la frecuencia de la fuerza externa oscilante ω .

9.1.1. Primera aproximación: régimen estacionario

Como se ha adelantado al principio del capítulo, a pesar de su tendencia natural el sistema acabará oscilando con frecuencia ω en respuesta a la fuerza externa. Plantearemos entonces su solución como:

$$x_E(t) = A \cos(\omega t - \delta), \quad (9.2)$$

entendiendo que esto será la solución válida una vez transcurrido un cierto tiempo “de acomodo” desde el comienzo de la oscilación. Se propone verificar que esa solución satisface la ecuación de movimiento 9.1, es decir que se cumple

$$m\ddot{x}_E = -kx_E - b\dot{x}_E + F_0 \cos(\omega t), \quad (9.3)$$

Para ello se derivará x_E y se sustituirá en la ecuación diferencial. Puede verse que la solución propuesta satisface la ecuación diferencial de movimiento anterior siempre y cuando los valores de amplitud y fase cumplan

$$\begin{aligned} A &= \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \\ \tan\delta &= \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned} \quad (9.4)$$

Más adelante analizaremos con detalle las implicaciones de las dependencias de los parámetros A, δ que caracterizan el M.A.S. que describe el sistema en el estado estacionario. Estudiemos primero el sentido de la solución (9.2) y su validez.

9.1.2. Solución completa: régimen transitorio y estacionario

Físicamente, la solución $x_E(t)$ representa una oscilación armónica que describe el comportamiento del sistema a largo plazo. Por otra parte, la ecuación diferencial 9.1 (ley de Newton) rige obviamente en todo momento. Cabe pues preguntarse: ¿qué es lo que ocurre para los valores del tiempo que van desde el instante inicial hasta que se establece el régimen estacionario armónico? Para resolver la aparente inconsistencia basta poner la vista en el capítulo anterior, en el cual se estudió la solución amortiguada. Supongamos que llamamos $x_T(t)$ a una cierta solución de la ecuación amortiguada, es decir, que cumple

$$m\ddot{x}_T = -kx_T - b\dot{x}_T. \quad (9.5)$$

Es obvio que la combinación $x = x_T + x_E$ cumple la ecuación 9.1 (ley de Newton para el oscilador forzado), como puede verse por mera sustitución. Puede decirse que la solución completa x se compone de una parte “transitoria” x_T que se amortigua con el tiempo y una parte “estacionaria” x_E que es una oscilación armónica simple. La suma de ambas, al transcurrir el tiempo, tiende asintóticamente a x_E .

Todo lo anterior se ilustra en la figura 9.2, que se ha obtenido combinando las soluciones descritas. Nótese que, efectivamente, tras un tiempo de acomodo se observa un M.A.S.

Por último, debemos aclarar que la forma exacta que adopta el transitorio inicial depende fuertemente de los parámetros que caracterizan al sistema ω_0, ω_1 (determinada por γ) y ω y que lo que aparece en la mencionada figura es propio de una elección concreta de valores. Recomendamos al lector estudiar la influencia de la relación entre ω y ω_0 .

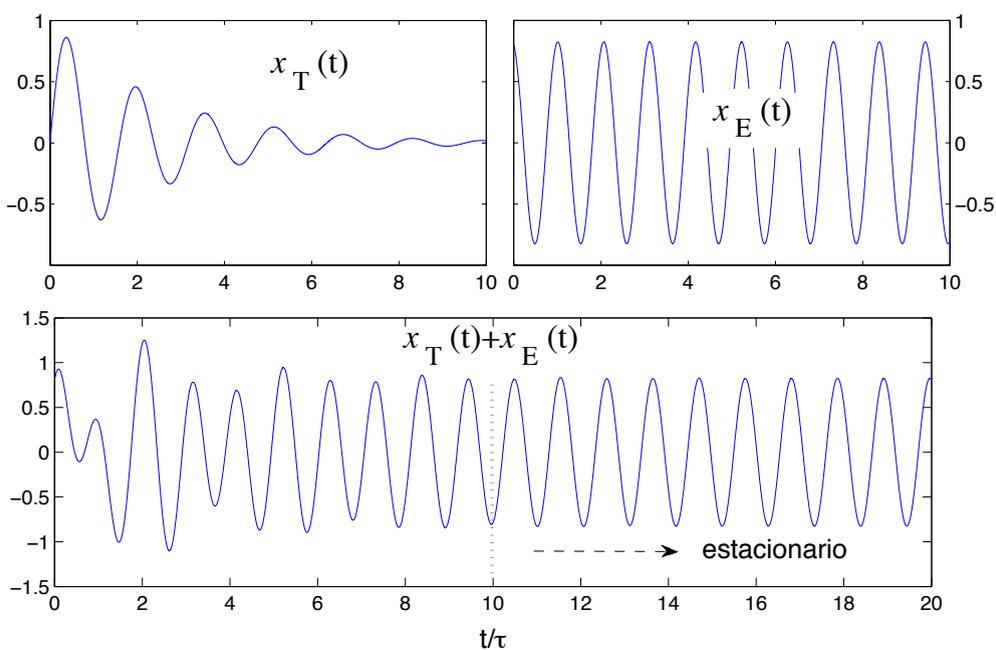


Figura 9.2: Solución de la ecuación de Newton para el desplazamiento del oscilador amortiguado y forzado de la figura 9.1. Se muestran las componentes “parciales” transitoria y estacionaria (arriba), así como la solución completa (abajo), suma de las anteriores.

9.2. Trabajo y energía

Evidentemente, al disponer de la solución $x(t)$ podemos analizar con detalle todas las magnitudes físicas de la dinámica del sistema, en particular sus energías cinética y potencial. Nos centraremos en el régimen estacionario, y dado que se trata de un fenómeno periódico, la magnitud física que adquiere sentido es el valor promedio de la potencia $\langle \mathcal{P} \rangle$, definida en el capítulo 6 .

Surge la cuestión de cuál de las tres fuerzas que actúan sobre el bloque (o combinación de ellas) tiene sentido utilizar para el cálculo de la potencia. En el régimen estacionario la respuesta es clara: por un lado, la potencia media asociada a la fuerza recuperadora es nula² mientras que, por otro lado, las asociadas a la fuerza de fricción (disipada) y la de la fuerza externa (absorbida) han de ser opuestas.

$$\langle \mathcal{P} \rangle_{dis} = - \langle \mathcal{P} \rangle_{abs}$$

Esto último ha de ser así porque si el sistema recibiese más o menos potencia de la que consume no podría mantener una oscilación de amplitud constante. Habría o bien un aumento neto de amplitud o una disminución, dependiendo de si entra más energía de la que sale o viceversa. Puede por tanto evaluarse la potencia media a partir de cualquiera de las dos expresiones anteriores; a continuación se recoge el cálculo basado en la fuerza disipativa.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} \rangle_{abs} &= - \langle \mathcal{P} \rangle_{dis} \\ \langle \mathcal{P} \rangle &= - \langle b\dot{x}_E^2 \rangle = \langle F_0 \cos(\omega t) \dot{x}_E \rangle \\ &= bA^2\omega^2 \langle \sin^2(\omega t - \delta) \rangle = -F_0 A\omega \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t - \delta) \rangle \\ &= \frac{bA^2\omega^2}{2} = \frac{F_0 A\omega}{2} \text{sen}(\delta) \end{aligned} \quad (9.6)$$

Sustituyendo A y $\text{sen}(\delta)$ por las expresiones que se deducen de (9.4),³ la potencia media se expresa como

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (9.7)$$

²Invitamos al lector a comprobarlo, como se propuso en el ejercicio nº 2 del capítulo 7.

³Recordad que $\text{sen}(\delta) = \tan(\delta)/\sqrt{1 + \tan^2(\delta)}$

Es evidente que los intercambios energéticos del sistema dependen notablemente de la relación entre los parámetros de oscilación. Este aspecto conduce al concepto de resonancia, que estudiaremos en el apartado siguiente.

9.3. Resonancia

Vamos a estudiar las características de la gráfica de amplitud A de la oscilación estacionaria frente a la frecuencia ω de la fuerza externa, haciendo hincapié en la información que puede obtenerse a partir de dicha representación.

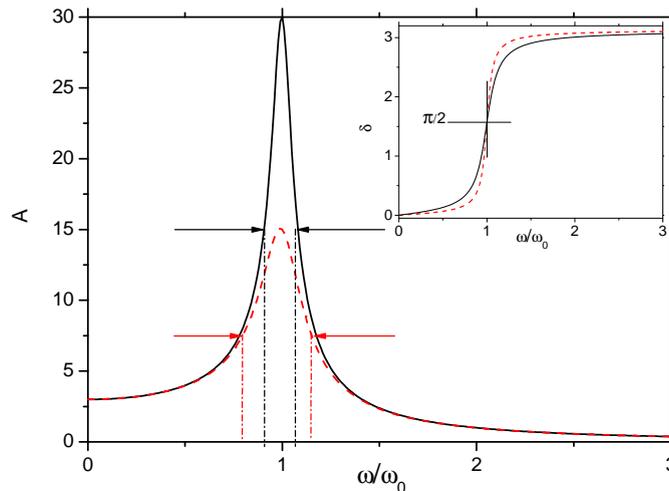


Figura 9.3: Curvas de resonancia en la amplitud de un oscilador amortiguado y forzado para dos valores del coeficiente de fricción. El mayor de ellos da lugar a la curva en línea discontinua. Se detalla también el comportamiento de la constante de fase δ .

Como ya se ha visto, tanto la amplitud de oscilación en el régimen estacionario, (expresión 9.4) como la potencia disipada/transferida (9.7) tienen una dependencia funcional singular en los parámetros físicos del oscilador. En concreto, es patente que la relación entre las frecuencias ω_0 y ω resulta crítica. Este hecho, de relevancia muy similar en ambos casos, se ilustra para la amplitud en la figura 9.3. Nótese el marcado máximo de la función $A(\omega)$ cuando la frecuencia aplicada es próxima la frecuencia libre del sistema ($\omega \approx \omega_0$). Este hecho se conoce como “resonancia” y tiene una interpretación física evidente: el acoplamiento entre la fuerza externa y el sistema oscilante resulta óptimo

cuando se le impulsa a su frecuencia natural de oscilación.⁴

Para finalizar, estudiaremos de modo cuantitativo el fenómeno de la resonancia. Nos centraremos en dos aspectos que quedan patentes en la figura 9.3. Es notable, que si bien la aparición del máximo para $\omega \approx \omega_0$ es un hecho general, la anchura de las curvas depende de modo evidente del valor del coeficiente de fricción, cosa que puede constatarse representando la ecuación (9.4) para diferentes valores de los parámetros como se hizo en la citada figura.

Mientras que la altura de la curva disminuye, su anchura aumenta conforme aumenta la fricción. Es inmediato comprobar a partir de la expresión de $A(\omega)$ en (9.4), que el valor que alcanza la amplitud en la resonancia en sistemas poco amortiguados es proporcional al factor de calidad:

$$A_{max} \approx A(\omega = \omega_0) = \frac{F_0/m}{\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{k}Q \quad (9.8)$$

donde F_0/k representa la amplitud de la oscilación en el caso de que la frecuencia de la fuerza externa fuera $\omega = 0$, es decir si actuamos instantáneamente con una fuerza F_0 no periódica. Gráficamente se corresponde con el valor de la ordenada en el origen de la figura 9.3.

Existe un modo normalizado de cuantificar la anchura de una curva como la que estamos analizando. Se usa el criterio de “medir” la anchura a mitad de la altura máxima, llamémosla $\Delta\omega$. Nuestro objetivo aquí es aplicarlo al caso de la curva de la amplitud de la oscilación forzada, pero también es aplicable a la de potencia media. Para encontrar la “anchura” $\Delta\omega$ de la gráfica, se buscan los dos valores de frecuencia para los que la amplitud es la mitad de la máxima. Para ello, matemáticamente hay que plantear la ecuación $A_{max}/2 = A(\omega)$, y resolverla en la variable ω :

$$\frac{A_{max}}{2} \approx \frac{F_0/m}{2\gamma\omega_0} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \quad (9.9)$$

Es evidente que la resolución implica una ecuación polinómica de grado 4. Procederemos mediante un método aproximado, basándonos de nuevo en argumentos de tipo físico y geométrico. Comencemos notando que al elevar al cuadrado los miembros de la igualdad se obtiene

$$4\gamma^2\omega_0^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2 = [(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)]^2 + \gamma^2\omega^2 \quad (9.10)$$

⁴En realidad, es sencillo demostrar que el máximo de amplitud aparece para la frecuencia $\omega_{max} = \omega_0\sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$. Sin embargo, en osciladores poco amortiguados Q es elevado y se cumple $\omega_{max} \approx \omega_0$.

Resolviendo esta ecuación, tendremos los dos valores de ω indicados en la figura 9.3 (dos frecuencias para cada curva). La diferencia entre esos dos valores, proporciona la anchura de la curva. La resolución se simplifica si el problema se centra en sistemas de poca fricción. Como se decía antes, mediante una evaluación numérica puede comprobarse gráficamente que cuanto menor sea el valor del coeficiente de fricción γ , tanto más estrechas (y elevadas) serán las curvas de $A(\omega)$. Entonces, suponiendo que nos encontramos en el caso de una gráfica “estrecha” podemos hacer la siguiente aproximación para evaluar su anchura a altura mitad⁵

$$(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega) = \omega_0 \Delta\omega \quad (9.11)$$

de donde, sustituyendo en la ecuación 9.10, inmediatamente obtenemos la cuantificación deseada

$$4\gamma^2\omega_0^2 \approx \omega_0^2\Delta\omega^2 + \gamma^2\omega_0^2 \Rightarrow 3\gamma^2 = (\Delta\omega)^2 \Rightarrow \Delta\omega = \sqrt{3}\gamma \quad (9.12)$$

Es decir, como ya habíamos adelantado, la anchura de la curva aumenta con la fricción, de hecho mediante una sencilla regla de proporcionalidad. Mediante un análisis muy similar al que hemos mostrado, puede obtenerse el ancho de la curva de *resonancia en potencia*. Esta curva, que corresponde a la función $\langle \mathcal{P} \rangle (\omega)$ dada por la ecuación (9.7), presenta igualmente una estructura de máximo (estrictamente en ω_0) con una anchura. $\Delta\omega_p = \gamma$.

⁵La aproximación se basa en lo siguiente. Queremos evaluar de forma aproximada una expresión que involucra dos valores muy similares, $\omega_0, \omega_>$ o bien $\omega_0, \omega_<$. Se puede entonces sustituir su suma por el doble de uno de ellos ($2\omega_0$) sin que el resultado cambie de modo apreciable, pero no podemos sustituir su diferencia por 0 ya que eso conlleva un error relativo infinito. Pensemos por ejemplo, que tenemos el caso $\omega_0 = 1000$, $\omega_> = 1001$ y $\omega_< = 999$, ...

Parte IV

DINÁMICA DE SISTEMAS DE
PARTÍCULAS

INTRODUCCIÓN

Ya hemos analizado diferentes aspectos de la dinámica de una partícula. Partiendo de los conceptos básicos introducidos con las leyes de Newton (fuerza, masa inercial y variación del momento lineal) se desarrollaron los conceptos de trabajo, energía y leyes de conservación, cuya utilidad para describir/resolver diferentes tipos de movimientos resulta incuestionable.

En esta parte que comenzamos veremos cómo estos mismos conceptos van a ser fundamentales para el estudio de sistemas de partículas. De hecho, veremos que la dinámica de los sistemas no requiere nuevas ideas, sino que se formula en los mismos términos, combinándolos del modo adecuado.

Capítulo 10

CENTRO DE MASAS: ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

La complejidad de los sistemas con muchas partículas no permite, en general, hacer una descripción detallada del movimiento de cada una de ellas mediante técnicas sencillas. No obstante, introduciendo algunos nuevos conceptos y extendiendo el uso de magnitudes aditivas (momento lineal del sistema, energía del sistema, etc), podremos plantear y resolver algunos problemas que ayuden a caracterizar la dinámica global del sistema. Veremos que para cada sistema de partículas existe un punto especial (su denominado Centro de Masas) cuya mecánica responde a ecuaciones sencillas y bien conocidas. El movimiento de dicho punto nos dará idea de cómo se desplaza el sistema de modo genérico. En lo que sigue vamos a ver cómo definir la posición de dicho punto y cómo obtener la información de su trayectoria.

10.1. *Definición de Centro de Masas: ejemplos*

Se demostrará en lo que sigue que en todo sistema existe un punto llamado **Centro de Masas**, que posee una propiedad muy notable: se mueve como lo haría una partícula de masa igual a la del sistema (concentrada en su posición), sometida a la acción de la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

Definimos las coordenadas del Centro de Masas de un sistema de partículas de masas m_i situadas en posiciones dadas por los vectores \vec{r}_i de la siguiente

manera:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (10.1)$$

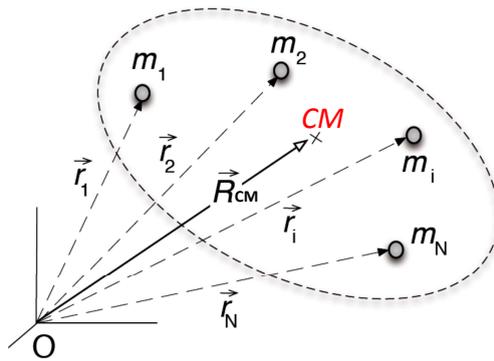


Figura 10.1: Sistema de partículas puntuales m_1, m_2, \dots, m_N y posición de su Centro de Masas. Si en lugar de partículas puntuales se tienen objetos extensos, \vec{r}_i haría referencia a la posición del centro de masas de cada objeto.

En cuerpos continuos, como se verá en el ejemplo del apartado 10.1.1, la expresión anterior se convierte en:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \, dm \quad (10.2)$$

Nota: frecuentemente se identifica **Centro de Masas** y **Centro de Gravedad**. En realidad se trata de conceptos distintos, pero ambos puntos coinciden en la aproximación de \vec{g} uniforme, como veremos en el capítulo 12.

Notación Debemos tener presente que existen magnitudes físicas de carácter aditivo (es decir, la correspondiente al sistema es la suma de las individuales de cada elemento que lo compone) y otras que no lo son. En este capítulo y subsiguientes, se utilizará la notación que se indica a continuación en la tabla. z representa una magnitud física de las que presentan carácter aditivo en el sistema (momento lineal, momento angular, energía).

Notación	Qué representa:
z_i	magnitud física de la partícula i
Z	magnitud física del sistema: $Z = \sum_i z_i$
Z^*, z_i^*	magnitudes referidas al sistema Centro de Masas: $Z^* = \sum_i z_i^*$

Cuadro 10.1: Notación utilizada en sistemas de partículas.

10.1.1. Ejemplo: Centro de Masas de un alambre semicircular

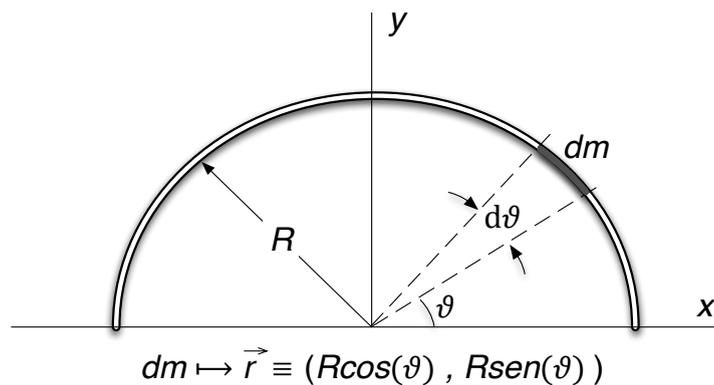


Figura 10.2: Esquema de cálculo del Centro de Masas de un semianillo con densidad lineal de masa $\lambda = M/\pi R$.

Por simetría es evidente ver que $X_{CM}=0$ (el CM debe estar sobre el eje y de la figura 10.2)

$$Y_{CM} = \frac{\int y \, dm}{\int dm}$$

$$\int y \, dm = \int y \, \lambda \, R \, d\theta = \int_0^N (R \, \text{sen} \, \theta) \, \lambda \, R \, d\theta = \lambda \, R^2 \int_0^N \text{sen} \, \theta \, d\theta = 2 \, \lambda \, R^2$$

Como $M = \int dm = \lambda \pi R$:

$$Y_{CM} = 2 R/\pi$$

10.2. Momento lineal y angular de un sistema de partículas

10.2.1. Velocidad y aceleración del Centro de Masas.

Vamos a verificar que, tal como se dijo, la “pseudopartícula” CM (posición \vec{R}_{CM} , masa $M = \sum m_i$) se mueve sometida a las leyes de la dinámica, debido a las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema. Para determinar la velocidad y la aceleración del CM derivamos la expresión de sus coordenadas:

$$\begin{aligned} M \vec{R}_{CM} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \\ M \vec{V}_{CM} &= \sum_i m_i \vec{v}_i \\ M \vec{A}_{CM} &= \sum_i m_i \vec{a}_i \end{aligned} \quad (10.3)$$

Para relacionar esta última expresión con la segunda ley de Newton, separamos la fuerza que actúa sobre cada partícula, \vec{F}_i , como suma de la acción exterior, por una parte, y su interacción con el resto del sistema por otra. Denotaremos como \vec{F}_{ij} la fuerza que la partícula “j” ejerce sobre la “i”. Supondremos que ambas interacciones verifican las leyes de Newton.

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^E + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad (10.4)$$

Ahora bien, si la interacción interna es newtoniana:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} &= 0 \quad \forall i, j \\ \vec{F}_{ii} &= 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} M \vec{A}_{CM} &= \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i (\vec{F}_i^E + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}) = \\ &= \sum_i \vec{F}_i^E + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} = \sum_i \vec{F}_i^E \end{aligned}$$

Con lo que resulta

$$M \vec{A}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i^E \equiv \vec{F}^E \quad (10.5)$$

En conclusión: **El CM se mueve como una partícula de masa M sometida a la acción de la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema.**

10.2.2. Momento lineal. Conservación.

Definimos el momento lineal de un sistema de partículas como la suma de los individuales (de cada partícula):

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_{CM} \quad (10.6)$$

Entonces, la derivada temporal del momento lineal del sistema será:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = M \vec{A}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i^E = \vec{F}^E \quad (10.7)$$

resultado fundamental que dice que el momento lineal de un sistema de partículas **no sometido a acciones externas** se mantiene constante.

10.2.3. Momento angular. Conservación.

El momento angular de un sistema de partículas se define igualmente como la suma de los momentos angulares particulares:

$$\vec{L}_0 = \sum_i \vec{l}_{0i} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad (10.8)$$

Donde \vec{r}_i es la posición de la partícula i respecto a O.

El momento angular de un sistema de partículas posee varias propiedades que van a resultar de interés. Una de ellas se refiere a la consideración de la relación entre el momento angular del sistema y el de “la pseudopartícula CM”. Al contrario de lo que hemos visto que ocurre con el momento lineal, en este caso ambas magnitudes no van a coincidir (al menos en una situación general). Esto puede deducirse del siguiente análisis, basado en la relación que existe entre la posición (y la velocidad) de una partícula expresada respecto a un origen O, y las correspondientes magnitudes referidas al CM. Es inmediato ver en la figura 10.3 que:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^* + \vec{R}_{CM} \quad (10.9)$$

y derivando respecto al tiempo se tiene que:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{V}_{CM} \quad (10.10)$$

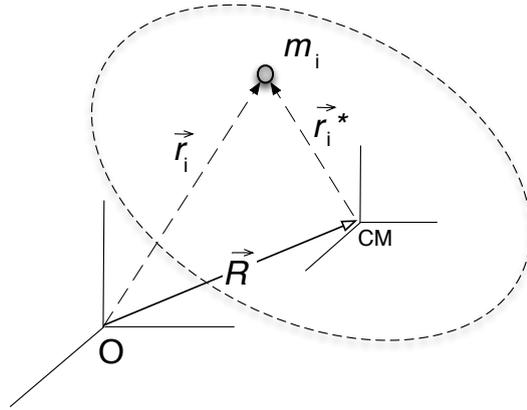


Figura 10.3: Relación vectorial entre el vector de posición referido al origen en O y referido al CM.

Sustituyendo las expresiones (10.9) y (10.10) en la ecuación del momento angular del sistema (ecuación 10.8) se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i^* + \vec{R}_{CM}) \times (\vec{v}_i^* + \vec{V}_{CM}) \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i^* \times \vec{v}_i^* + \sum_i m_i \vec{R}_{CM} \times \vec{v}_i^* \\ &\quad + \sum_i m_i \vec{r}_i^* \times \vec{V}_{CM} + \sum_i m_i \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} \end{aligned} \quad (10.11)$$

Teniendo en cuenta que se anulan tanto la velocidad del CM referida al CM (sumatoria del segundo término en la expresión anterior, $\vec{V}_{CM}^* = 0$) como la posición del CM referida al CM (tercer término, $\vec{R}_{CM}^* = 0$), se tiene que:

$$\vec{L}_0 = \vec{L}^* + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM} \quad (10.12)$$

Así pues, \vec{L}_0 se puede expresar como el momento angular del sistema relativo al CM (\vec{L}^* en la expresión anterior) más el momento angular de la "pseudopartícula" CM.

Ley de conservación: Veamos ahora la evolución temporal del momento angular total. Para simplificar, consideremos un sistema formado por dos partículas, aunque el resultado tendrá validez general.

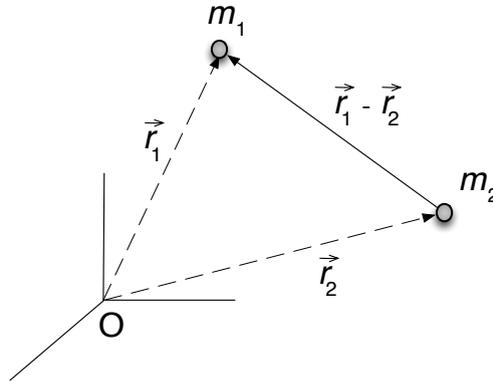


Figura 10.4: Sistema formado por dos partículas.

$$\vec{L}_0 = \vec{l}_{10} + \vec{l}_{20}$$

Tomando derivadas y aplicando la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{l}_{10}}{dt} &= \tau_{10} = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1^E + \vec{F}_{12}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^E + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} \\ \frac{d\vec{l}_{20}}{dt} &= \tau_{20} = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2^E + \vec{F}_{21}) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2^E - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^E + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2^E + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}$$

Pero como $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0$, se cumple:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0^E \quad (10.13)$$

Es decir, **el momento angular total respecto al punto 0 se conserva si las fuerzas exteriores tienen momento nulo respecto de ese punto.**

10.3. Energía de un sistema de partículas

10.3.1. Energía Cinética.

En la línea de lo anterior, definiremos la energía cinética de un sistema de partículas como la suma de las individuales:

$$T = \sum_i T_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \quad (10.14)$$

Del mismo modo que hicimos con el momento angular, resulta sencillo mostrar que la energía del sistema no va a coincidir en general con la de la partícula CM. Para ello basta sustituir \vec{v}_i en la ecuación 10.14 anterior por la expresión 10.10:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i^*)^2 \\ &= \sum_i \frac{m_i}{2} V_{CM}^2 + \sum_i \frac{m_i}{2} (\vec{v}_i^*)^2 + \sum_i m_i \vec{V}_{CM} \cdot \vec{v}_i^* \\ &= \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + T^* \end{aligned} \quad (10.15)$$

donde se pone de manifiesto que la energía cinética del sistema tiene dos "contribuciones": la energía cinética de la partícula CM y la "relativa" al CM.

10.3.2. Energía Potencial.

Si las fuerzas externas que actúan sobre las partículas de un sistema son conservativas, podemos asociar el trabajo que producen a la variación de un potencial. Para cada partícula tendremos: $dW_i^E = -d\mathcal{U}_i^E$. Entonces, para el conjunto de partículas del sistema se tiene

$$dW^E = \sum_i dW_i^E = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = - \sum_i d\mathcal{U}_i^E(\vec{r}_i) \quad (10.16)$$

Entonces, definimos la energía potencial total:

$$\mathcal{U}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, \dots) = \sum_i \mathcal{U}_i^E$$

10.3.3. Energía Mecánica. Teorema de conservación

Ahora podemos establecer la variación de la energía mecánica de un sistema de partículas sometido tanto a fuerzas internas como a fuerzas externas conservativas:

$$dT = dW^{int} + dW^E = dW^{int} - d\mathcal{U}$$

$$d(T + \mathcal{U}) = dE = dW^{int} \quad (10.17)$$

Resultado muy importante que puede interpretarse como: **La energía mecánica de un sistema sometido a fuerzas exteriores conservativas puede variar a expensas del trabajo producido por las internas.** Este principio explica, por ejemplo, el hecho de que un sistema inicialmente en reposo pueda adquirir energía cinética debido a la acción de fuerzas internas.

10.4. Consideraciones generales sobre el movimiento del sistema de partículas

Como hemos visto, existe un punto unívocamente definido para un sistema de partículas, su CM, cuyo movimiento corresponde al de una partícula de masa $M = \sum_i m_i$ que se viera sometida a las fuerzas externas.

Para dicha "partícula" se han obtenido las ecuaciones de movimiento $\vec{F}^E = M\vec{A}_{CM}$ y $d\vec{P}/dt = \vec{F}^E$, siendo $\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$. No obstante, resulta obvio que describir el movimiento del CM da una información parcial sobre la dinámica del sistema, que debe ser completada con otros aspectos.

En general, la información completa consiste en:

- Informar sobre cómo se mueve el centro de masa.
- Decir cómo se mueven las partículas respecto al centro de masas.

Ya hemos visto que este último aspecto está contenido en las magnitudes del sistema \vec{L} y T . El modo natural de expresarlo consiste en referir las magnitudes citadas al denominado "sistema de referencia Centro de Masas", que como se ha indicado en la figura 10.3, es una referencia (móvil, en un caso general) cuya posición coincide con el CM del sistema de partículas.

10.4.1. Cuadro-resumen:

Magnitud:	Cómo se calcula:
Momento lineal	$\sum_i \vec{p}_i = \vec{P} = \underbrace{\vec{P}^*}_0 + M \vec{V}_{CM} = M \vec{V}_{CM}$
Momento angular	$\sum_i \vec{l}_i = \vec{L} = \vec{L}^* + M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM}$
Energía cinética	$\sum_i T_i = T^* + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$

Ecuación de movimiento:	Ley de conservación:
$\vec{F}^E = M \vec{A}_{CM} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	Si $\vec{F}^E = 0 \Leftrightarrow \vec{P} = cte$
$\vec{\tau}_0^E = \frac{d\vec{L}_0}{dt}$	Si $\vec{\tau}_0^E = 0 \Leftrightarrow \vec{L}_0 = cte$

Cuadro 10.2: Recopilación de expresiones vistas en el tema.

Podemos interpretar que M , \vec{R}_{CM} y \vec{V}_{CM} definen el movimiento de la partícula CM, mientras que \vec{P}^* , \vec{L}^* y T^* son magnitudes relativas a éste. Nótese que el momento lineal del sistema se anula siempre respecto al CM, cosa que no ocurre con el momento angular o la energía.

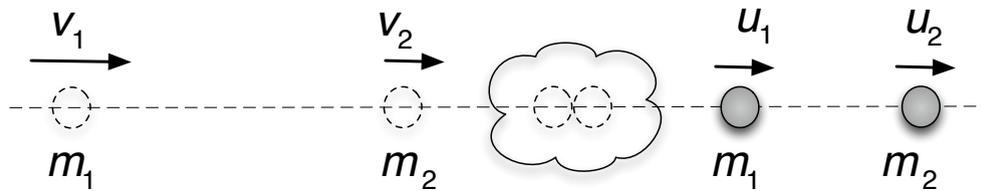
\vec{F}^E y $\vec{\tau}_0^E$ son la resultante de las fuerzas exteriores y el momento resultante de las fuerzas exteriores, respectivamente.

10.5. *Ejemplo. Colisiones*

Ya hemos analizado diferentes aspectos del comportamiento dinámico de sistemas de partículas, constatando que, en buena medida, se puede formular en los mismos términos usados al estudiar la dinámica de un partícula.

Vamos a revisar a continuación un ejemplo que, siendo bastante sencillo, involucra las ideas básicas del análisis de la dinámica de un sistema de partículas.

Ejemplo: choque entre dos partículas aisladas.



Esquema de una colisión frontal entre dos partículas que se mueven a lo largo de la línea que las une y sometidas únicamente a interacción mutua. En el texto con v nos referiremos a las velocidades antes del choque y con u a las correspondientes tras el choque.

Resulta evidente que en el proceso de interacción entre las dos partículas consideradas habrá variación del momento lineal de cada una de ellas y que las fuerzas que son responsables de la interacción pueden producir variaciones de la energía mecánica (pueden producirse deformaciones, por ejemplo). Sin embargo, en virtud del principio de acción y reacción ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$) se sigue que la suma de los momentos lineales ha de permanecer constante, es decir el momento lineal del sistema permanece constante ($d\vec{P}/dt = d\vec{p}_1/dt + d\vec{p}_2/dt = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$).

De acuerdo con lo anterior, el problema habitual de determinar las características del movimiento tras el choque, conocidas las velocidades antes del mismo, puede resolverse mediante un sistema de ecuaciones:

- La primera corresponde a la conservación del momento lineal del sistema:

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 - (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0 \quad (10.18)$$

- En cuanto a la energía (que en general no se conservará), puede escribirse la expresión siguiente, que cuantifica la pérdida de energía mediante el valor del parámetro Q , que dependerá de los detalles de cómo se produce el choque, del material que compone las partículas, etc.

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = Q \quad (10.19)$$

Atendiendo a la última expresión, diremos que el choque es *elástico* si $Q = 0$, es decir, si se conserva la energía. En muchas ocasiones tendremos valores

de Q negativos, correspondientes a choques con pérdida de energía ($Q < 0$).¹ Al caso particular de choque inelástico en el cual las partículas salen “pegadas” ($\vec{u}_1 = \vec{u}_2$) lo denominamos *totalmente inelástico*. Proponemos como ejercicio demostrar a partir de las ecuaciones anteriores que:

(i) En un choque elástico se cumple

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}; \quad \vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

(ii) En un choque totalmente inelástico se cumple

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \vec{V}_{CM}$$

En este caso, la expresión de Q -en función de las velocidades iniciales- será:

$$Q = -\frac{m_1 m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Es inmediato, partiendo de estas expresiones, discutir algunos casos particulares. Por ejemplo, cuando se tiene un choque elástico, se propone analizar las situaciones en que la segunda partícula está inicialmente en reposo ($v_2 = 0$); es interesante ver qué ocurre cuando las masas de ambas partículas son iguales, $m_1 = m_2$, o por el contrario, cuando una de ellas es mucho mas grande que la otra $m_1 \ll m_2$.

Por otra parte, es frecuente utilizar en la descripción de los choques (unidimensionales) entre partículas un parámetro, denominado **coeficiente de restitución** e , que caracteriza igualmente la pérdida de energía cinética. Se define como:

$$e(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = -(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \quad (10.20)$$

Es decir, puede calcularse a partir del cociente entre la velocidad relativa de ambas partículas después del choque y la velocidad relativa antes del choque. El coeficiente de restitución tiene distintos valores dependiendo del tipo de choque:

$e=1$, en los choques elásticos (la velocidad relativa de las partículas antes y después del choque es igual en módulo y de signo opuesto)

$e=0$, en los choques totalmente inelásticos.

¹En un esquema general se pueden describir las explosiones como “choques” con ganancia de energía ($Q > 0$).

$0 < e < 1$, en los choques parcialmente inelásticos.

Nótese que Q y e son parámetros alternativos, relacionados entre sí, para describir un choque. Se propone como ejercicio la obtención de la expresión de Q en función de e (y de las velocidades iniciales), en el caso general de un choque inelástico.

En la resolución de los problemas de choques pueden usarse las ecuaciones 10.18 y 10.19 o, alternativamente, la ecuación 10.20 junto con la 10.18 ($\vec{P}_i = \vec{P}_f$). Ambas vías permiten determinar las velocidades tras el choque conocidas las iniciales (o viceversa).

Digamos como conclusión del análisis de este sistema que hemos comprobado el interés del concepto de acción y reacción en las fuerzas internas, así como la idea de magnitudes globales aditivas y sus leyes de conservación. En este caso, se han obtenido las relaciones entre las condiciones de entrada/salida de dos partículas en una colisión. Para sistemas más complejos, el grado de descripción será menos detallado, pero las mismas ideas permitirán obtener un buen número de conclusiones acerca de la dinámica global.

Capítulo 11

DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

Hemos concluido el capítulo anterior mostrando que existe una descripción de la dinámica de los sistemas de partículas que resulta útil e intuitiva. Consiste en resolver el movimiento de la partícula Centro de Masas, lo cual nos proporciona la información global sobre el “desplazamiento neto” del sistema y agregarle la información correspondiente a la dinámica de las partículas respecto a dicho punto. En particular, esta última quedará reflejada en las magnitudes \vec{L}^* y T^* .

Es evidente que, en una situación general, puede resultar muy complicado describir la dinámica de las partículas respecto al CM. Sin embargo, hay un caso muy importante en el que este problema se simplifica, reduciéndose de nuevo a una ecuación del tipo de la segunda ley de Newton para una partícula. Se trata del Sólido Rígido, de cuyo estudio - a un nivel introductorio- nos ocuparemos en este capítulo. Como su nombre indica, un sólido rígido es un sistema en el cual las partículas se mantienen a la misma distancia unas de otras, a diferencia de lo que ocurriría en un sistema deformable. Por consiguiente, el movimiento completo vendrá descrito por la composición de la traslación del CM del objeto y los posibles giros del objeto alrededor de un eje. Puesto que la primera parte ya es bien conocida (dinámica de una partícula), aquí nos ocuparemos fundamentalmente de la que corresponde a los giros. Obviamente, en la resolución de los casos prácticos deberá considerarse la composición de ambos aspectos lo que se ilustrará al final del capítulo mediante algunos ejemplos.

11.1. Rotación del sólido rígido en torno a un eje. Momento angular

Como hemos visto, el momento angular es una magnitud física que contiene información básica acerca de los movimientos de rotación.

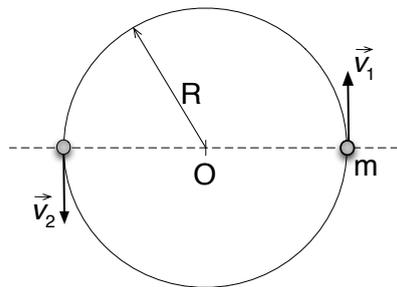


Figura 11.1: Partícula que describe una trayectoria circular en el plano XY. Su momento angular será perpendicular al plano, en la dirección del eje Z.

Cabe recordar que el momento angular de una partícula en una trayectoria circular como la de la figura admite la siguiente expresión:

$$\vec{l}_0 = m \vec{R} \times \vec{v} = m R^2 \omega \hat{k} \quad (11.1)$$

siendo ω la velocidad angular y R el radio de giro, y donde el punto de referencia O se eligió en el plano que contiene la trayectoria de la partícula. Nótese que se ha utilizado la relación entre las magnitudes cinemáticas velocidad lineal (v) y angular (ω).

Es evidente que dicha expresión no se puede extrapolar directamente al caso de un sólido rígido. En general, cuando el sólido gire alrededor de un eje, las trayectorias de las partículas estarán en muchos planos distintos, tal como se deduce de la figura 11.2.

No obstante, vamos a demostrar que si la rotación tiene lugar en torno a ejes de simetría, la expresión del momento angular adquiere una forma sencilla, en cierto modo análoga a la ecuación (11.1) anterior.

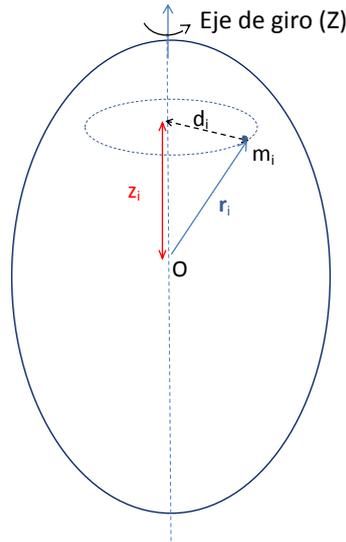


Figura 11.2: Esquema de la rotación de un sólido rígido en torno a un eje. Se indica la órbita circular (radio d_i) de la partícula genérica m_i y la referencia “O” en un punto del eje de giro. Este se identifica en la deducción con el eje de coordenadas Z.

Tomando como referencia un punto cualquiera “O” sobre el eje de rotación, tenemos que la posición y velocidad de una pequeña porción de sólido (la “partícula m_i ”) vendrán dadas por:

$$\begin{cases} \vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) = (d_i \cos \omega t, d_i \sin \omega t, z_i) \\ \vec{v}_i = (-d_i \omega \sin \omega t, d_i \omega \cos \omega t, 0) \\ \omega = \frac{d\theta_i}{dt} \end{cases}$$

Por lo que es fácil deducir que

$$\vec{l}_{0i} = m_i \omega (-z_i x_i, -z_i y_i, d_i^2) = m_i d_i \omega (-z_i \cos \omega t, -z_i \sin \omega t, d_i) \quad (11.2)$$

Esta expresión nos conduce a varias conclusiones muy importantes:

- Si la figura es plana y rota en torno a un eje perpendicular a la misma, tenemos $z_i = 0 \quad \forall i$.
- Si la rotación es en torno a un eje de simetría, de modo que para cada partícula m_i en (x_i, y_i, z_i) , se tiene su pareja de coordenadas $(-x_i, -y_i, z_i)$ y cuya contribución al momento angular es:

$$\vec{l}_{0i'} = m_i d_i \omega (z_i \cos \omega t, z_i \sin \omega t, d_i)$$

se tiene que las componentes x de \vec{l}_{0i} y $\vec{l}_{0i'}$ se anulan (y lo mismo ocurre con las y), quedando un momento angular con solo componente z , que además no depende del punto del eje donde se coloque el origen o referencia O.¹

Podemos concluir entonces que, para rotaciones simétricas (en torno a ejes principales, también denominadas planas) el momento angular del sistema tomará la forma:

$$\vec{L}_0 = L_{0z} \hat{k} = \left(\sum_i m_i d_i^2 \right) \omega \hat{k} \quad (11.3)$$

(el eje z sería un eje principal del sólido)

A la magnitud entre paréntesis se la denomina, "**momento de inercia**" del sistema I , que solo depende de la distribución de la masa en torno al eje de giro.² Así pues, cada fracción del sólido ("partícula" genérica m_i) contribuye con el producto de su masa y su distancia al eje de giro. Por otra parte, dado que sólo consideraremos problemas "simétricos" en los que como decíamos L_{0x} y L_{0y} se van a anular, expresaremos \vec{L}_0 del modo siguiente:

$\vec{L}_0 = I \vec{\omega}$, con $I \equiv \sum_i m_i d_i^2$, ya que \vec{L}_0 sólo posee una componente (a lo largo del eje de giro) y además no depende del punto exacto O donde se tomó la referencia. En las rotaciones planas, vemos que el momento angular y la velocidad angular son paralelos (I es un escalar).

Antes de pasar a describir las ecuaciones de la dinámica del momento angular del sólido, vamos a introducir en la siguiente sección algunos conceptos útiles para el cálculo del momento de inercia.

¹Este sencillo argumento es válido para ejes de simetría binarios, cuaternarios... pero se puede demostrar con carácter general. Consideremos un sólido rígido que rota en torno a un eje de simetría cualquiera. Pensemos en una rodaja del sólido, perpendicular al eje, a una altura z_n respecto a 0; el CM de esa rodaja estará en dicho eje. Su momento angular será $\vec{l}_{0n} = \sum_i \vec{l}_{0i}$, donde la suma en i se extiende a todos los elementos m_i de la rodaja, con posiciones (x_{ni}, y_{ni}, z_n) respecto a 0. (Nótese que x_{ni} e y_{ni} son las coordenadas de cada elemento respecto al CM de la rodaja.) Basándonos en la expresión 11.2, se tiene que $\vec{l}_{0n} = \omega \sum_i m_i (-z_n x_{ni}, -z_n y_{ni}, d_i^2)$. Pero $\sum_i m_i x_{ni} = M_n X_{CM}^*$ corresponde a la coordenada X del CM de la rodaja, que evidentemente es cero al calcularse respecto al CM. Por el mismo argumento se anula la componente y del momento angular \vec{l}_{0n} , de forma que la única componente no nula es la z y el momento angular total viene dado por la ecuación 11.3

²En el apartado siguiente se verá cómo calcular realmente el momento de inercia de sistemas con distribución continua de masa, para lo que será necesario adaptar la expresión $I \equiv \sum_i m_i d_i^2$.

11.2. Momento de inercia: cálculo, teoremas y ejemplos

En el apartado anterior se ha introducido una nueva magnitud, el momento de inercia, que informa sobre la inercia que opone el sólido al giro. Depende de cuál es el objeto rotante y en torno a qué eje ocurre la rotación; una vez calculado su valor en torno a un cierto eje, se podrá usar para todo movimiento de rotación en torno a dicho eje. Veamos algunas expresiones básicas para el cálculo del momento de inercia:

La ecuación (11.3) puede aplicarse para calcular el momento de inercia si se tiene un sistema discreto, formado por partículas de masa m_i , a distancia r_i del eje:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (11.4)$$

Cuando se tiene un objeto extenso (sistema continuo), para calcular su momento de inercia respecto a un eje habrá que considerar las porciones del mismo, de masa dm , a distancia r del eje de giro:

$$I = \int_{\text{objeto}} dm r^2 \quad (11.5)$$

Más adelante en esta sección se verán algunos ejemplos de cálculo de momentos de inercia de objetos de distinta simetría. Antes, veamos algunos teoremas útiles.

11.2.1. Teorema de los ejes paralelos o de Steiner.

Como hemos visto, el momento de inercia de un sólido depende del eje escogido para calcularlo. Veamos cómo relacionar los valores obtenidos para distintos ejes. Recordaremos la expresión (10.12), vista en el tema anterior, que relacionaba el momento angular de un sistema de partículas calculado respecto a un punto O cualquiera (\vec{L}_O) y el calculado respecto al CM (\vec{L}^*). En esta ocasión, el sistema va a ser un sólido rígido plano, y vamos a considerar rotaciones en torno a un eje perpendicular arbitrario, que pasa por un punto O y otro que pasa por el CM. Al hablar de dos ejes de rotación, habrá que considerar dos momentos de inercia. De acuerdo con (10.12), escribamos la relación entre los momentos angulares:

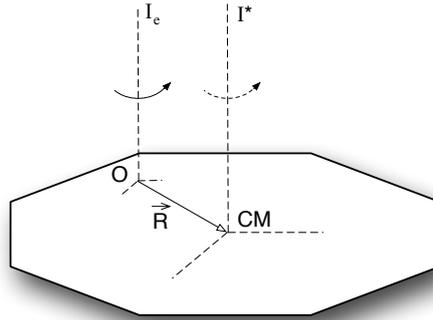


Figura 11.3: Rotaciones respecto a ejes paralelos.

$$\vec{L}_0 = \vec{L}^* + \vec{R} \times \vec{P}$$

Teniendo en cuenta que la partícula CM realiza una rotación de radio R en torno al origen O : $\vec{R} \times \vec{P} = M R^2 \vec{\omega}$,³ y expresando el momento angular como el producto del momento de inercia por la velocidad angular $\vec{\omega}$:

$$\vec{L}_0 = \vec{L}^* + M R^2 \vec{\omega} = I^* \vec{\omega} + M R^2 \vec{\omega} \equiv I_0 \vec{\omega}$$

De la expresión anterior se deduce la relación:

$$I_0 = I^* + M R^2$$

Conocido el momento de inercia respecto al eje que pasa por el CM del cuerpo, el teorema de Steiner nos permite calcularlo respecto a cualquier otro eje paralelo, a distancia R del primero.

11.2.2. Teorema de los ejes perpendiculares.

Este teorema relaciona los momentos de inercia respecto a ejes perpendiculares contenidos en una figura plana.

³Hemos utilizado la convención $\vec{\omega} \equiv \omega \hat{k}$.

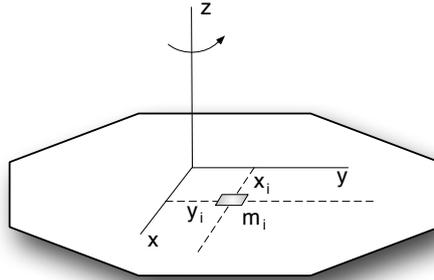


Figura 11.4: Esquema de rotación respecto a ejes perpendiculares.

Partiendo del esquema de la figura 11.4 y utilizando el carácter aditivo de la integración:

$$I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm$$

$$I_z = I_y + I_x$$

11.2.3. Ejemplos.

- Cálculo del momento de inercia de un anillo de radio R y masa M respecto de distintos ejes de giro.

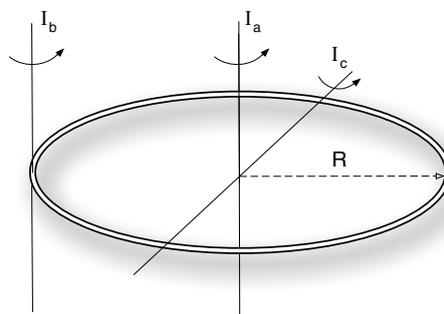


Figura 11.5: Diferentes ejes de giro para un anillo.

El aro tiene una densidad lineal de masa: $\lambda = M/(2\pi R)$, que consideraremos uniforme.

Cálculo del momento de inercia respecto del eje a:

$$I_a = \int R^2 dm = R^2 \int dm = M R^2$$

Cálculo del momento de inercia respecto del eje b:

$$I_b = I^* + M R^2 = I_a + M R^2 = 2 M R^2$$

Cálculo del momento de inercia respecto del eje c:

Aplicamos $I_z = I_x + I_y$.

En nuestro caso, aprovechando la simetría del aro, $I_x = I_y = I_c$, $I_z = I_a$.
Sustituyendo en lo anterior:

$$I_a = 2 I_c \Rightarrow I_c = I_a/2$$

$$I_c = \frac{1}{2} M R^2$$

- **Cálculo del momento de inercia de un disco, y de un cilindro macizo respecto a su eje de simetría.**

Aprovecharemos que conocemos el momento de inercia de un anillo y que el momento de inercia es aditivo: calcularemos el momento de inercia de un disco, considerando la superposición de anillos, y el de un cilindro como superposición de discos. Para ello, (figura 11.6) partimos de una “fracción de disco”, en forma de anillo genérico de radio r y anchura dr . (Puede verse como una corona circular, de radios r y $r + dr$, cuya superficie será $2\pi r dr$). Por integración en r se convierte en un disco. Pensemos en que el disco tiene radio R y masa M_{Disco} , de forma que la densidad de masa es: $\sigma \equiv M_{Disco}/(\pi R^2)$.

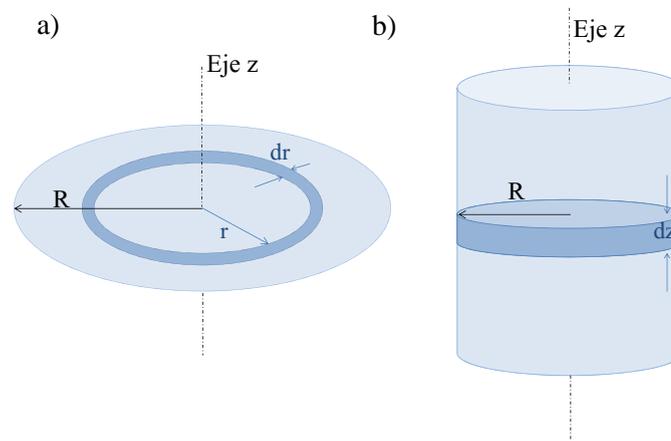


Figura 11.6: Esquema de cálculo del momento de inercia de un disco y de un cilindro macizo.

Recordemos que el momento de inercia de un anillo aislado de masa M y radio R es $I = M R^2$, por lo que podemos expresar el del anillo (de masa dm y radio r) señalado en la figura 11.6a) como:

$$dI_z = dm r^2 = \underbrace{\sigma dr 2 \pi r}_{dm} r^2 \quad (11.6)$$

Integrando en r , obtendremos el momento de inercia de un disco:

$$I_{disco} = \int dI_z = \int_0^R \sigma dr 2 \pi r^3 = 2 \pi \sigma \frac{R^4}{4} \quad (11.7)$$

Puede verse que $\sigma \pi R^2$ es la masa del disco, por lo que su momento de inercia sería:

$$I_{disco} = \frac{M_{disco}}{R^2} \frac{R^4}{2} \Rightarrow I_{disco} = \frac{1}{2} M_{disco} R^2 \quad (11.8)$$

Para hallar el momento de inercia del cilindro podemos considerar que está formado por infinitos discos (“rodajas”) de grosor dz (figura 11.6b); al integrar en esta variable obtendremos el momento de inercia del cilindro; es decir, sumamos las contribuciones de todos los “discos” a lo largo del cilindro, desde $z = 0$ hasta $z = L$). Ahora bien, por analogía con la

expresión (11.8) cada uno de esos discos que tiene una masa dm (fracción de la masa del cilindro) contribuye al momento de inercia con:

$$dI_z = \frac{1}{2} dm R^2 \quad (11.9)$$

Al sumar todas las contribuciones, dado que el radio R es común para todos los discos, se tendrá:

$$I_{cilindro} = \frac{1}{2} R^2 \int_0^L dm = \frac{1}{2} M R^2 \quad (11.10)$$

Nótese que las expresiones del momento de inercia para el disco y el cilindro son idénticas (sin olvidar que M representa la masa de cada uno de ellos). Esto indica que la dimensión L no es relevante, salvo por el hecho de influir en el valor de la masa total.

11.3. Ecuación de rotación del sólido rígido

A continuación vamos a describir la dinámica de rotación del sólido y obtendremos la ecuación fundamental del movimiento de rotación.

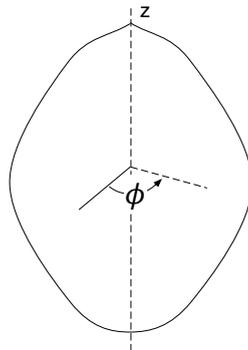


Figura 11.7: Rotación de un sólido respecto a un eje fijo.

De acuerdo con la ecuación (10.13), para un sistema de partículas girando en torno al eje z , la variación temporal de la proyección de \vec{L} sobre este eje (componente z del momento angular) viene dada por el momento (par) de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

$$\frac{dL_{0z}}{dt} = \tau_{0z} \quad (11.11)$$

Ahora, si se trata de un sólido rígido que realiza una rotación plana en torno a uno de sus ejes principales (eje z), se tiene $L_{0z} = I_z \omega$ y evidentemente I_z es constante en la rotación. Entonces:

$$\frac{d(I_z \omega)}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = \tau_{0z}$$

que también podemos escribir:

$$I_z \frac{d^2\phi}{dt^2} = \tau_{0z} \tag{11.12}$$

$$I_z \alpha = \tau_{0z},$$

siendo α la aceleración angular del sólido. Nótese que, tal como habíamos anunciado, la dinámica de rotación viene descrita por una ecuación formalmente idéntica a la segunda ley de Newton. Bastará reemplazar, masa, aceleración y fuerza, por momento de inercia, aceleración angular y momento de la fuerza, respectivamente.

$$M \rightarrow I \quad , \quad a \rightarrow \alpha \quad , \quad F \rightarrow \tau$$

Por tanto, en nuestro nivel, resolver problemas con la presencia de sólidos en rotación no introduce novedades conceptuales en las ecuaciones dinámicas. Utilizaremos ecuaciones del mismo tipo que las ya conocidas para el caso de una partícula.

Es evidente que la magnitud responsable de los cambios de movimiento rotacional es el momento de las fuerzas, a cuyo cálculo vamos a dedicar el siguiente apartado.

11.4. Cálculo del momento de una fuerza. Ejemplos

Como ya se ha dicho, el momento de una fuerza respecto a un punto es el producto vectorial del vector de posición del punto de aplicación de la fuerza (\vec{r}) por la fuerza (\vec{F}). En general, calcularemos el módulo del momento como $\tau_0 = rF \sin\theta$, siendo θ el ángulo que forman los dos vectores. La dirección del vector momento será perpendicular al plano definido por dichos vectores, y su sentido, el que corresponda a llevar \vec{r} sobre \vec{F} , de acuerdo con lo siguiente:

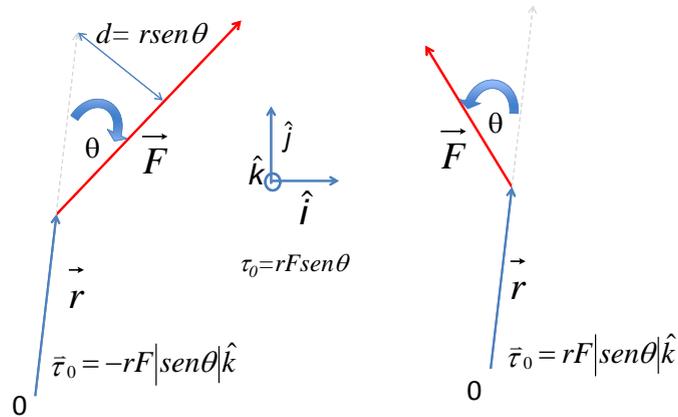


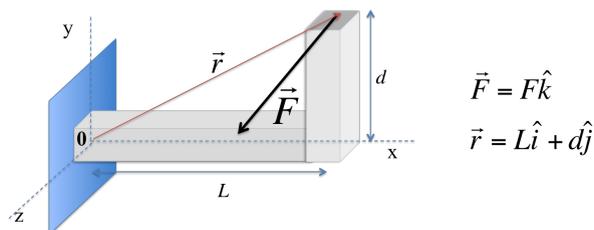
Figura 11.8: Cálculo del momento de una fuerza respecto a un punto.

A la distancia $d = r \text{sen} \theta$, indicada en el dibujo, se le da el nombre de "brazo de palanca".

Por otra parte, también es posible obtener el producto vectorial mediante el cálculo del determinante correspondiente:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde x, y, z son las componentes del vector de posición \vec{r} . El uso del determinante es particularmente conveniente en situaciones donde no resulta inmediato ver cuál es el ángulo formado por \vec{r} y \vec{F} . Un ejemplo sería el sistema de la figura 11.9, donde se tiene una fuerza en la dirección z mientras que el vector de posición está en el plano XOY .



$$\vec{F} = F\hat{k}$$

$$\vec{r} = L\hat{i} + d\hat{j}$$

Figura 11.9: Ejemplo para ilustrar el cálculo del momento ejercido por una fuerza respecto a un punto, en un problema en tres dimensiones.

En este caso obtendremos el momento calculando el siguiente determinante:

$$\vec{\tau}_0 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ L & d & 0 \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix} = dF\hat{i} - LF\hat{j}$$

El momento tiene dos componentes: una a lo largo del eje x , que identificaremos como **momento torsor**, y otra a lo largo del eje y , que corresponde al **momento flector**.

11.5. Energía cinética de rotación

Veamos cómo se expresa la energía cinética de un sólido rígido en rotación, a partir de la suma de las contribuciones de todos los elementos. Tomando como referencia la figura 11.2, recordemos que cada elemento del sólido, de masa m_i , describe una trayectoria circular de radio d_i , siendo ω la velocidad angular común a todos los elementos.

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega d_i \hat{\theta}) \cdot (\omega d_i \hat{\theta})$$

Donde se ha sustituido el módulo del vector velocidad \vec{v}_i por su valor ωd_i (revisad la figura 11.2). Por lo tanto:

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i d_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

11.6. Aplicaciones de la teoría del sólido rígido

En esta sección analizaremos algunos ejemplos de sistemas representativos cuya dinámica se puede resolver mediante las ecuaciones que hemos introducido en los apartados anteriores. Junto a las oscilaciones del denominado péndulo físico, se estudiarán dos ejemplos que combinan movimiento traslacional y rotacional. Recordemos que las dos ecuaciones fundamentales serán:

$$\vec{F} = M\vec{A}_{CM} \quad (11.13)$$

$$\vec{\tau}_0 = I_0\vec{\alpha}$$

siendo \vec{F} y $\vec{\tau}_0$ la fuerza resultante y el momento resultante (respecto a un punto 0) ejercidos sobre el sólido, respectivamente.

11.6.1. Ejemplo: el péndulo físico

Un caso de particular interés es el denominado “péndulo físico”, que consiste en un sólido rígido oscilando en torno a un eje fijo (en este caso el eje z, perpendicular al plano del papel).

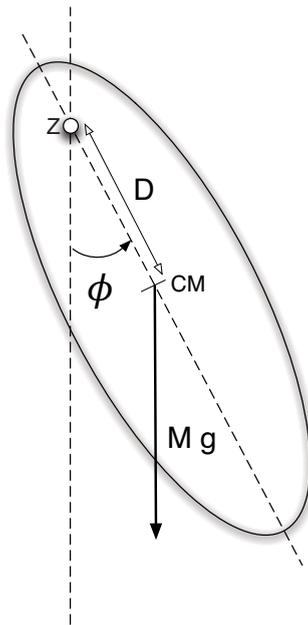


Figura 11.10: Esquema de oscilación de un péndulo físico en torno a un eje. La línea vertical en trazo discontinuo indica la posición de equilibrio, con el CM en la vertical desde el punto O.

Dado que la única fuerza que ejerce un par respecto al punto O es el peso, la aplicación de la ecuación (11.12) conduce a:

$$I_0 \frac{d^2\phi}{dt^2} = -MgD \text{sen } \phi, \quad (11.14)$$

donde D es la distancia entre el CM del sólido y el punto O del eje de giro (es decir, el módulo del vector de posición \vec{R}_{CM}) y $d^2\phi/dt^2$ es la aceleración angular. Para pequeños ángulos ($\phi < 10^\circ$), esta ecuación toma la forma:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{MgD}{I_0}\phi \quad (11.15)$$

que corresponde a un oscilador armónico simple ⁴ de frecuencia angular dada por:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{MgD}{I_0}}$$

A la vista de esa expresión, es habitual introducir la definición de una longitud equivalente para el péndulo físico $L_{eq} = I_0/M D$, con el siguiente sentido: un péndulo físico con longitud equivalente L, oscila con la misma frecuencia que un péndulo simple de longitud real L.

Para completar el análisis del péndulo físico, obtengamos su energía mecánica, considerando que el origen de la energía potencial está en la posición de equilibrio:

$$E = (1/2)I_0\omega^2 + MgD(1 - \cos\phi)$$

donde ω es la velocidad angular (que depende del tiempo). En la expresión de la energía potencial hay que tener en cuenta la altura del CM del sólido respecto a la de la posición de equilibrio.

Como la energía mecánica es constante, derivando respecto al tiempo la expresión anterior e igualando a cero:

$$0 = I_0\omega \frac{d\omega}{dt} + MgD \text{sen}\phi \frac{d\phi}{dt} \rightarrow I_0 \frac{d\omega}{dt} = -MgD \text{sen}\phi$$

La derivada temporal de la velocidad angular $d\omega/dt$ representa la aceleración angular $\alpha = d^2\phi/dt^2$ con lo que encontramos de nuevo la ecuación de movimiento 11.14.

⁴Recordemos (puede revisarse el capítulo 7), que si la aceleración es proporcional y de signo opuesto al desplazamiento, estamos ante un movimiento armónico simple.

11.6.2. El movimiento de rodadura

Entendemos por rodadura el movimiento de un sólido rígido en el cual la traslación y rotación están “sincronizadas”. Esto ocurre si el punto de apoyo en el suelo está en reposo respecto a este, es decir, no hay deslizamiento. Matemáticamente, si llamamos ΔX a la distancia recorrida por el CM, se cumple que:

$$\Delta X = \Delta S = R \Delta\theta \Rightarrow V_{CM} = R \frac{d\theta}{dt} = R \omega$$

El movimiento puede ser acelerado, en cuyo caso se cumple además:

$$A_{CM} = R \alpha$$

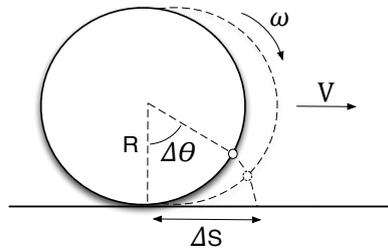


Figura 11.11: Movimiento de rodadura.

En cuanto a la energía cinética de rodadura, se particulariza a la expresión $T = T^* + (1/2) M V_{CM}^2$, donde T^* describe la rotación en torno al eje que pasa por el CM, que como hemos visto toma el valor:

$$T^* = \frac{1}{2} I^* \omega^2$$

Sustituyendo en la expresión general se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} I^* \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} (I^* + MR^2) \omega^2$$

Ejemplo de movimiento de rodadura

Para que sea posible la rodadura es importante que se cumplan las condiciones apropiadas entre la superficie del sólido y el suelo en el que se apoya. Consideremos el siguiente ejemplo para analizar la acción de la fuerza de rozamiento sobre un cuerpo rodante.

- **Hállese la relación entre θ y el coeficiente de rozamiento para que el objeto de la figura pueda descender rodando por el plano.**

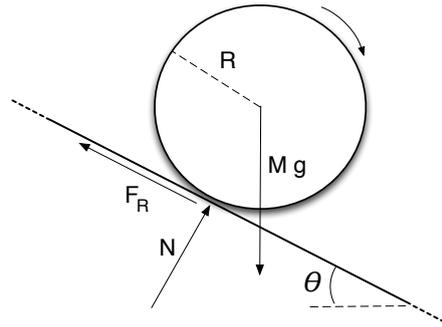


Figura 11.12: Objeto rodando sobre un plano inclinado.

Escribiremos las ecuaciones dinámicas e impondremos la condición de rodadura.

$$\begin{cases} I^* \frac{d\omega}{dt} = R F_R \\ m g \operatorname{sen} \theta - F_R = m A \\ A = \frac{d\omega}{dt} R \end{cases}$$

de donde se deduce:

$$\frac{A}{R} = \frac{g \operatorname{sen} \theta}{R} - \frac{F_R}{m R} \Rightarrow$$

$$I^* \left(\frac{g \operatorname{sen} \theta}{R} - \frac{F_R}{m R} \right) = R F_R$$

y, por tanto, obtenemos que la fuerza de rozamiento debe tener el valor:

$$F_R = \frac{I^*}{I^* + m R^2} m g \operatorname{sen} \theta$$

Como se trata de la fuerza de fricción estática,⁵ no podrá superar el valor $\mu N = \mu m g \cos \theta$. Con esta condición, obtendremos el valor máximo de θ para que haya rodadura dado μ :

$$\mu \geq \frac{I^*}{I^* + m R^2} \tan \theta$$

Analicemos este resultado. En primer lugar, en una situación ideal en que un objeto rueda a velocidad constante sobre el suelo horizontal ($\theta = 0$) no se requiere fuerza alguna de fricción. De hecho, si ésta existiera ¡ el cuerpo aceleraría ! Sin embargo, cuando este rueda bajando por un plano inclinado, la fuerza de fricción es necesaria para que se acomoden las aceleraciones lineal y angular. Más en detalle, para cada ángulo se requiere un valor mínimo del coeficiente de fricción dado por la expresión anterior.

⁵En condiciones de rodadura, el punto de contacto rueda/suelo permanece “instantáneamente” en reposo; no hay deslizamiento en ningún momento.

11.6.3. Las poleas reales

Una polea real se modeliza como un disco de radio R que puede girar en torno a su eje de simetría. La rotación es provocada por el momento (o par) que crean las tensiones de la cuerda, a lo que el sistema se opone mediante su momento de inercia. Veámoslo en detalle.

Analizaremos los movimientos asociados a las poleas reales bajo las siguientes hipótesis:

- Cuerdas sin masa, por lo que sus elementos estarán sometidos a fuerza total nula
- Cuerdas intextensibles

De acuerdo con lo visto anteriormente, la aceleración angular de la polea viene descrita por la ecuación

$$I \alpha = \tau$$

siendo τ el par asociado a las fuerzas externas respecto al eje de la polea, en este caso, las debidas a la tensión de la cuerda.

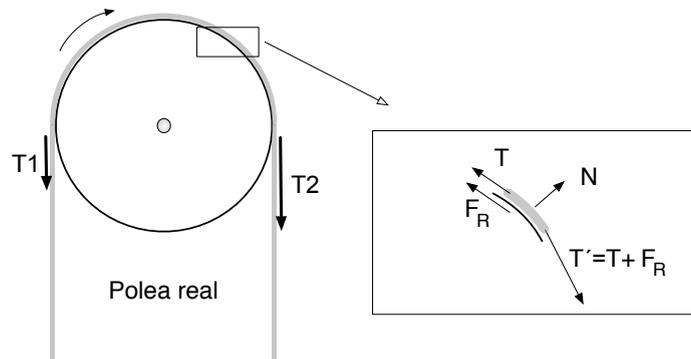


Figura 11.13: Esquema de fuerza en la rotación de una polea real. El detalle muestra las acciones sobre un elemento de cuerda.

Con la ayuda de la figura anterior, veamos las diferencias entre una polea real y una polea ideal:

- POLEA IDEAL ($I=0$):

Como no hay inercia, podemos tener aceleración angular $\alpha \neq 0$ sin par de fuerza ($\tau = 0$). En este caso, no aparece F_R y la tensión permanece

constante a lo largo de la cuerda. La normal compensará las componentes radiales de la tensión.

■ POLEA REAL ($I = M R^2/2$):

La diferencia de tensiones en los extremos crea un par (momento) resultante respecto al eje $(T_2 - T_1)R$ y este produce una aceleración angular α . En este caso se requiere la presencia de fricción F_R , de modo que pueda darse la condición $\sum F = 0$ sobre cada elemento de cuerda a la vez que se tenga una tensión variable.

Ejemplo de problema con poleas reales

Vamos a mostrar con un ejemplo la resolución de la dinámica de un sistema que contiene poleas reales. Concretamente, supondremos que se tienen dos poleas iguales (radio R y masa M), una de las cuales se halla suspendida del techo mediante un sistema que le permite girar respecto a su eje. La segunda polea "cuelga" de la anterior mediante una cuerda inextensible enrollada alrededor de ambas.

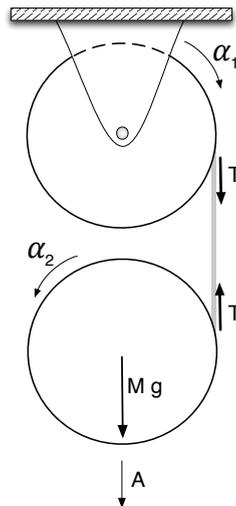


Figura 11.14: Movimiento de poleas reales acopladas.

Obtendremos la aceleración con que baja la polea libre basándonos en los conceptos de las secciones anteriores (3 primeras ecuaciones) y en la condición de inextensibilidad de la cuerda. Esto último se traduce en que el aumento de longitud de cuerda entre las poleas se obtiene sumando las que aparecen al

desenrollarse esta de cada una de las poleas.

$$\begin{cases} I \alpha_1 = T R \\ I \alpha_2 = T R \\ M g - T = M A_2 \\ A_2 = R \alpha_1 + R \alpha_2 \end{cases}$$

Se plantea como ejercicio comprobar que el resultado del sistema es $A = 4g/5$

Parte V

EQUILIBRIO DE LOS SÓLIDOS

INTRODUCCIÓN

En el primer capítulo de esta parte se van a estudiar las condiciones necesarias y suficientes para que los sólidos estén en equilibrio, haciendo hincapié en las diferencias respecto a lo estudiado al analizar el equilibrio de una partícula. Se verá que la condición de que la resultante de fuerzas se anule no es suficiente para garantizar el equilibrio de un sólido.

En el capítulo siguiente se insistirá en la necesidad de realizar correctamente los diagramas de fuerzas actuando sobre los sólidos; se estudiarán con detalle diversos tipos de fuerzas de ligadura o reacciones a los que los sólidos pueden verse sometidos, tanto las ejercidas externamente como las ejercidas entre sí por diferentes partes de un sistema.

Se finalizará esta parte con un capítulo introductorio sobre elasticidad, donde se pondrá de manifiesto que los sólidos reales son deformables bajo la acción de las fuerzas que se ejercen sobre ellos, algo no tenido en cuenta en los dos capítulos anteriores.

Capítulo 12

EQUILIBRIO DEL SÓLIDO RÍGIDO

En este capítulo se va a estudiar qué condiciones deben darse para que un sólido rígido esté en equilibrio. Junto a la formulación general de esas condiciones, se introducirán o revisarán algunos conceptos como el de sistemas de fuerzas equivalentes y centro de fuerzas, entre otros. La relevancia de estos conceptos no se limita desde luego al ámbito de la estática, pero dada la naturaleza de algunos problemas particularmente interesantes para la formación de un futuro arquitecto, se ha considerado su inclusión en este capítulo en lugar de en el general de dinámica de sólidos.

En el capítulo siguiente se estudiarán diversos tipos de ligaduras, tanto las ejercidas externamente sobre los sistemas en equilibrio como las ejercidas entre diferentes partes de un sistema.

12.1. *Condiciones de equilibrio de un sólido rígido*

Al analizar la dinámica de una partícula ya vimos que el concepto de equilibrio equivale a no aceleración: una partícula se encuentra en equilibrio cuando permanece en reposo o se mueve a velocidad constante. Eso puede expresarse con la segunda ley de Newton imponiendo que la resultante de fuerzas que actúan sobre la partícula es cero.

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} = 0 \quad (12.1)$$

Veremos a continuación que el equilibrio de un sólido rígido (caso particular de sistema de partículas) exige que se verifiquen dos condiciones. En los temas

anteriores, al analizar el movimiento de los sólidos rígidos, hemos considerado su movimiento de traslación bajo la acción de las fuerzas exteriores y el movimiento de rotación, determinado por el par o momento resultante de las fuerzas exteriores respecto al eje de giro. (Ver ecuaciones 10.5 y 11.12) Por lo tanto, para que un cuerpo perfectamente rígido se encuentre en equilibrio deberá cumplirse:

- La suma de **las fuerzas externas** que actúan sobre el cuerpo en equilibrio tiene que ser cero.
- Las fuerzas externas no pueden hacer girar el cuerpo alrededor de cualquier eje, es decir no ejercen un momento neto.

Las expresiones matemáticas que expresan estas condiciones se denominan **ecuaciones de equilibrio**.

$$\sum_i \vec{F}_i^{Ext} = M\vec{A}_{CM} = 0 \quad (12.2)$$

y

$$\sum_i \vec{\tau}_0^{Ext} = I\vec{\alpha} = 0 \quad (12.3)$$

Conviene incluir aquí un comentario respecto a la dependencia del momento de las fuerzas respecto al punto «O» elegido. En general, el momento depende del punto «O», pero vamos a demostrar que cuando la resultante de las fuerzas es nula, el momento total (suma vectorial de los momentos ejercidos por las fuerzas) es independiente del punto respecto al que se calcula.

Supongamos el sólido de la figura, sobre el que actúan un conjunto de fuerzas, \vec{F}_i , tales que su resultante es cero ($\sum \vec{F}_i = 0$). Consideremos dos puntos cualesquiera, O y O' respecto a los que vamos a calcular el momento de las fuerzas.

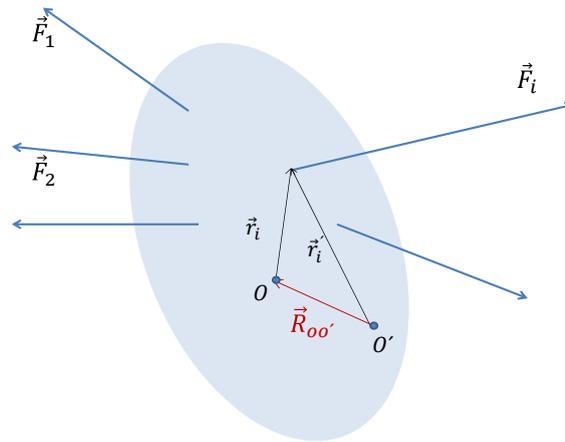


Figura 12.1: Sólido rígido sobre el que actúa un sistema de fuerzas de resultante nula. En esta situación, el momento resultante de las fuerzas es independiente del punto respecto al que se calcula.

La expresión del momento respecto a O y O' será, respectivamente:

$$\sum_i \vec{\tau}_0 = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (12.4)$$

$$\sum_i \vec{\tau}_{0'} = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i \quad (12.5)$$

Si restamos esas dos ecuaciones, se tiene que:

$$\sum_i \vec{\tau}_0 - \sum_i \vec{\tau}_{0'} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}'_i) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{R}_{00'} \times \vec{F}_i \quad (12.6)$$

Donde $\vec{R}_{00'}$ es el vector que une los dos puntos elegidos de forma arbitraria. Evidentemente puede sacarse como factor común, con lo que

$$\sum_i \vec{\tau}_0 - \sum_i \vec{\tau}_{0'} = \vec{R}_{00'} \times \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (12.7)$$

El resultado general anterior puede ilustrarse mediante un ejemplo de sistema de (2) fuerzas bien conocido, el llamado “par de fuerzas”. Se trata de dos fuerzas iguales en módulo y dirección y sentido opuesto aplicadas en dos puntos distintos de un cuerpo, tal y como se representa en la figura 14.2. En primer lugar, es evidente que el sólido de la figura no está en equilibrio, ya que

aunque la resultante de fuerzas es cero, no lo es el momento. Vamos a calcular el momento resultante de las fuerzas respecto al centro 0 y respecto a A.

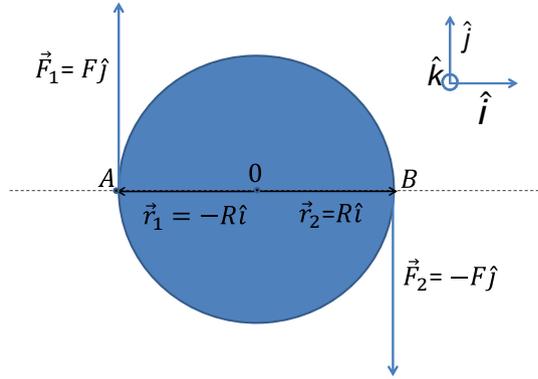


Figura 12.2: Par de fuerzas actuando sobre un sólido.

Es inmediato ver que el momento total respecto al centro 0 será:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_0 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = FR(-\hat{i} \times \hat{j}) + FR(\hat{i} \times (-\hat{j})) \\ &= -FR\hat{k} - FR\hat{k} = -2FR\hat{k}\end{aligned}\quad (12.8)$$

Por otra parte, la fuerza \vec{F}_1 no ejerce momento respecto al punto A por lo que se tiene:

$$\vec{\tau}_A = \vec{AB} \times \vec{F}_2 = 2R\hat{i} \times \vec{F}_2 = -2FR\hat{k}\quad (12.9)$$

Vemos cómo en este caso, en el que $\sum_i \vec{F}_i = 0$, el momento resultante es independiente del punto respecto al que se calcule.

Llegados a este punto, es importante recordar lo visto en el capítulo anterior respecto al cálculo de momentos. En caso de duda, debe revisarse lo estudiado en el punto 11.4.

12.2. Fuerzas equivalentes. Sistemas de fuerzas paralelas. Centro de fuerzas

Al estudiar la dinámica de una partícula se vio que cuando hay varias fuerzas aplicadas el movimiento de la partícula puede explicarse sustituyendo el sistema de fuerzas por su suma vectorial; diferentes sistemas de fuerzas actuando sobre una partícula son equivalentes si su resultante es la misma. Así, puede hablarse de una fuerza equivalente que es igual a la resultante de fuerzas del sistema dado: $\vec{F}_{eq} = \sum \vec{F}_i$. Sin embargo, al estudiar el movimiento de un cuerpo rígido vimos que está determinado por la fuerza total aplicada y por el momento total ejercido sobre él. En este contexto, se dice que dos sistemas o conjuntos de fuerzas actuando sobre un cuerpo rígido son equivalentes si la resultante de ambos sistemas y el momento total ejercido respecto a cualquier punto son iguales.

Teniendo en cuenta lo anterior, es fácil prever que la traslación del concepto de “fuerza equivalente a un sistema dado” cuando están aplicadas sobre un cuerpo extenso no es inmediato.¹ Pueden estudiarse algunas situaciones particulares sencillas, como la de un sistema de **fuerzas concurrentes** en un punto: cuando las líneas de acción de todas las fuerzas que actúan sobre el sólido confluyen en un punto P, el sistema puede representarse por una única fuerza igual a la suma vectorial de las dadas y cuya línea de acción pase por P.

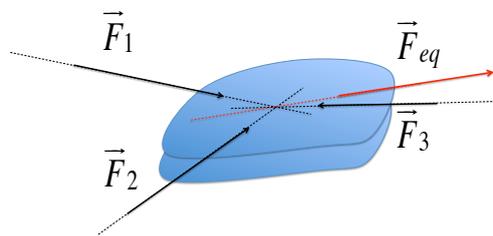


Figura 12.3: Fuerza equivalente a varias concurrentes.

Analicemos ahora un caso en el que es posible encontrar una única fuerza equivalente a un sistema dado. Imaginemos un sólido sobre el que actúa un **sistema de fuerzas paralelas**, de forma que: $\vec{F}_i = F_i \hat{u}$ para todo i . El análisis de este problema pondrá claramente de manifiesto la relevancia del punto de

¹ En general, cualquier sistema de fuerzas y momentos podrá ser representado con una determinada fuerza actuando en un cierto punto y un determinado par.

aplicación de las fuerzas.

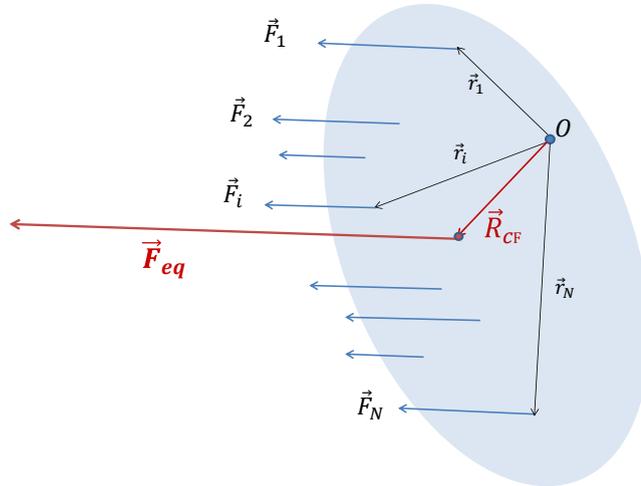


Figura 12.4: Sólido sobre el que actúa un conjunto discreto de fuerzas paralelas. Por claridad se muestran, con carácter genérico, los vectores de posición de algunas de las fuerzas. Se muestra la fuerza equivalente aplicada en el punto CF. \vec{R}_{CF} marca la posición del centro de fuerzas respecto al origen O.

Vamos a plantear si existe una fuerza equivalente a ese sistema. Por una parte, la fuerza buscada debe ser igual a la resultante del sistema para que su efecto sobre la traslación del cuerpo sea el mismo, y además debe tener el mismo efecto en cuanto a su rotación (=el momento debe ser el mismo que el del sistema).

Por tanto, tenemos que responder la siguiente pregunta: ¿en qué punto, que etiquetaremos como CF, habría que aplicar la fuerza igual a la resultante del sistema original, para que su momento sea igual al momento resultante del sistema de fuerzas respecto a un punto cualquiera O? Nuestro objetivo es calcular la posición de ese punto, que denotaremos por \vec{R}_{CF} . Comenzaremos por expresar el momento o par de la fuerza resultante, aplicada en el punto CF cuya posición queremos determinar.

$$\vec{\tau}_0 = \vec{R}_{CF} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{R}_{CF} \times \sum_i F_i \hat{u} = \sum_i F_i \vec{R}_{CF} \times \hat{u} \quad (12.10)$$

Por su parte, el momento resultante del sistema de fuerzas paralelas es:

$$\sum \vec{\tau}_{i0} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times F_i \hat{u} = \sum F_i \vec{r}_i \times \hat{u} \quad (12.11)$$

Imponiendo que sean iguales los dos momentos anteriores, se tiene que cumplir que:

$$\sum F_i \vec{R}_{CF} = \sum F_i \vec{r}_i$$

de donde se deduce que la posición del punto CF respecto al origen 0 viene dada por:

$$\vec{R}_{CF} = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i} \quad (12.12)$$

Al punto CF cuya posición acabamos de obtener se le conoce como **centro de fuerzas**. Una conclusión obvia de la deducción anterior es que un sistema de fuerzas paralelas no puede hacer girar el objeto respecto a su centro de fuerzas.

Un caso particular, bien conocido, lo encontramos en la fuerza de la gravedad actuando sobre un cuerpo cualquiera. En el caso de \vec{g} constante y uniforme para todo el sistema, $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$, siendo m_i la masa de cada fragmento en que dividimos el cuerpo. La posición del punto de aplicación de la resultante, o centro de gravedad, será:

$$\vec{R}_{CG} = \frac{\sum m_i g \vec{r}_i}{\sum m_i g} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \equiv \vec{R}_{CM} \quad (12.13)$$

Vemos que en estas condiciones, el centro de gravedad coincide con el centro de masa.

Es inmediato extender lo que acabamos de estudiar a situaciones en las que no se tiene un conjunto discreto de fuerzas, \vec{F}_i , sino una fuerza distribuida actuando sobre un cuerpo extenso. Vamos a considerar sólidos esencialmente unidimensionales (barras). Estas situaciones suelen caracterizarse por el valor de la **fuerza por unidad de longitud**, q (dimensionalmente $[F][L]^{-1} = [M][T]^{-2}$), que puede ser constante (fuerza distribuida uniforme, como en el caso a) de la figura 12.5, donde q_0 es fijo), o variar a lo largo del sólido (como en el caso b), donde se muestra una variación lineal).

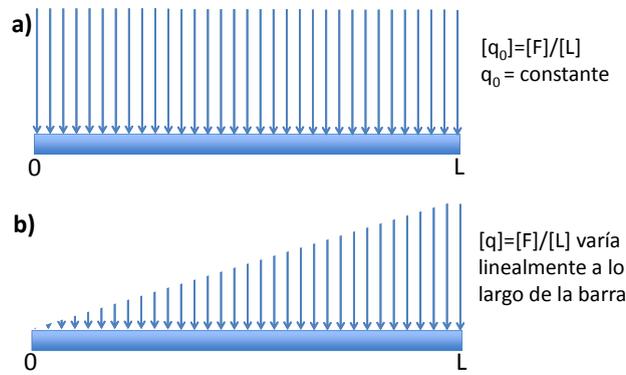


Figura 12.5: Ejemplos de fuerzas distribuidas.

Para calcular el valor de la resultante tendremos en cuenta que la fuerza que actúa sobre un fragmento de barra de longitud dx será: $dF = q(x)dx$ donde $q(x)$ representa el valor de la fuerza por unidad de longitud en un punto a una distancia x del extremo de la barra. Para calcular la fuerza total habrá que integrar dF para toda la barra. En el caso a) es inmediato ver que la fuerza equivalente será $F_{eq}=q_0L$. En cuanto al caso b) tendremos que:

$$F_{eq} = \int_0^L q(x)dx = \int_0^L \frac{q_0}{L} x dx = \frac{q_0 L}{2} \quad (12.14)$$

Para calcular el punto de aplicación de esa fuerza tendremos en cuenta la ecuación 12.12, sustituyendo las sumas por las integrales correspondientes, de forma que escribiremos:

$$X_{CF} = \frac{\int_0^L (dF)x}{\int_0^L dF} = \frac{\int_0^L (q_0/L)x^2 dx}{q_0 L/2} = \frac{2}{L^2} \int_0^L x^2 dx = \frac{2}{3} L \quad (12.15)$$

Por tanto, los sistemas de fuerzas distribuidas de la figura 12.5 actuando sobre la barra pueden sustituirse por una única fuerza, aplicada en un punto determinado de la barra, tal y como se muestra en la figura 12.6.

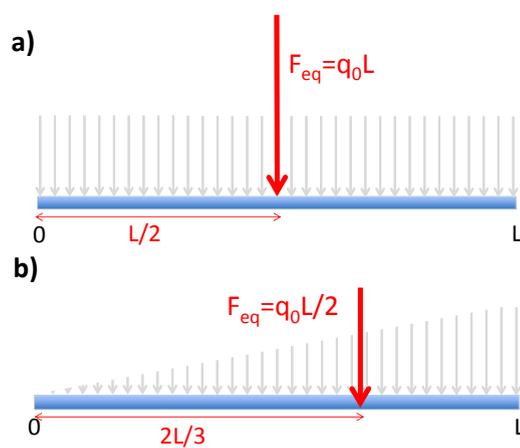


Figura 12.6: Fuerzas equivalentes de los sistemas mostrados en la figura 12.5

Capítulo 13

DIAGRAMAS DE FUERZAS. FUERZAS APLICADAS Y DE LIGADURA

Al analizar el equilibrio de una partícula se vio la utilidad de los diagramas de fuerzas como paso previo al planteamiento de las ecuaciones correspondientes a las condiciones de equilibrio. Los cuerpos rígidos cuyo equilibrio vamos a estudiar están habitualmente apoyados o unidos a otros elementos, que ejercen fuerzas o momentos sobre ellos. Para poder trazar los diagramas de cuerpo libre es fundamental conocer dichas reacciones (ligaduras externas). En este capítulo se van a analizar diferentes tipos de apoyos o uniones, viendo cómo son las fuerzas y los momentos que se ejercen en los puntos de enlace.

13.1. *Enlaces en sistemas planos*

Los elementos de unión de un sistema con el exterior o de diferentes partes del sistema entre sí se denominan enlaces. Los enlaces imponen coacciones sobre el sistema, es decir, pueden limitar su traslación (en una dirección o dos, restringiéndonos a problemas en el plano) y pueden impedir su giro. En los problemas de estática una pregunta habitual se referirá a la determinación de las reacciones (fuerzas y momentos), ejercidas en los apoyos o uniones, que garantizan el equilibrio del sistema. Veamos a continuación algunos **tipos de enlaces** habituales.

- Cuerda o cable. Como ya se ha visto al describir las fuerzas de ligadura sobre partículas, este tipo de enlace ejercerá sobre el elemento en cuestión una tensión, en la dirección de la cuerda y alejándose del elemento. Pensando en su intervención en las ecuaciones de equilibrio, vemos que implica una incógnita (el valor de T , ya que la dirección viene determinada por la de la cuerda).

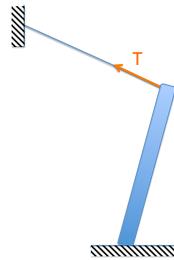


Figura 13.1: Tensión en una cuerda, de valor constante a lo largo de la cuerda si esta es de masa despreciable.

- Apoyo liso. Este tipo de enlace ejerce una sola coacción, impidiendo los desplazamientos en la dirección perpendicular a la superficie. La fuerza de ligadura correspondiente tiene una única componente en dirección perpendicular (“normal”) a la superficie. Una superficie plana y lisa se puede representar con un apoyo de este tipo. (Cualquier fuerza externa sobre el sólido ejercida en la dirección paralela a la superficie lo sacaría del equilibrio, ya que el apoyo liso no impide la traslación en esa dirección).

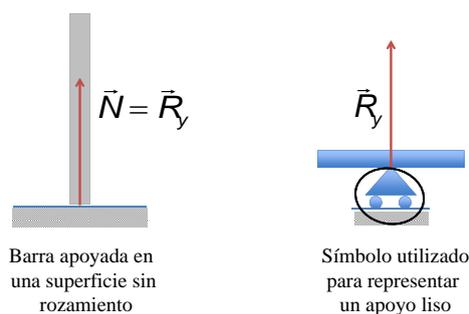


Figura 13.2: Apoyo liso, que ejerce una única coacción; se muestra la fuerza de ligadura normal a la superficie de apoyo.

- Apoyo fijo. Impide la traslación tanto en dirección paralela como perpendicular a la superficie. La fuerza de ligadura por tanto tiene dos componentes independientes (dos incógnitas). A veces hablamos de dos reacciones, identificadas con dichas componentes.

Un apoyo sobre una superficie con rozamiento puede tratarse como un apoyo de este tipo, en el que la fuerza paralela a la superficie (fuerza de rozamiento) no puede superar un cierto valor, determinado por el producto del coeficiente de rozamiento y el valor de la ligadura perpendicular a la superficie.

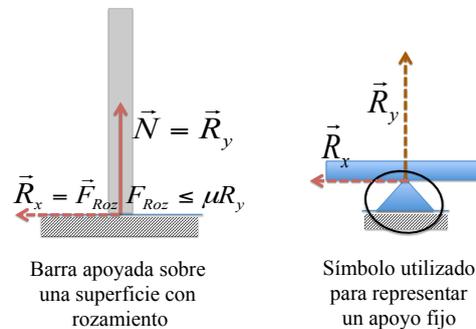


Figura 13.3: Apoyo fijo, que ejerce dos coacciones; se muestran las dos componentes de la fuerza de ligadura: paralela y perpendicular a la superficie de apoyo

Un enlace "de pasador" (o articulación lisa) también impide la traslación en cualquier dirección, pero no ejerce ninguna oposición a que el cuerpo gire en torno a ella.

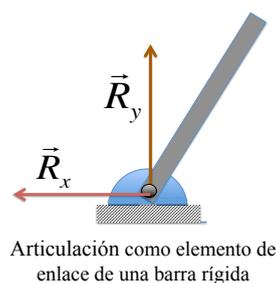


Figura 13.4: En el punto donde está articulada, se ejerce sobre la barra una fuerza de ligadura cuyo módulo y dirección hay que determinar; en los diagramas se representará con dos componentes independientes, habitualmente en las direcciones x e y .

- Empotramiento. Este enlace ejerce tres coacciones, impidiendo tanto la traslación como el giro en el plano (tres incógnitas). Tendremos por tanto dos componentes de la fuerza de ligadura y un momento o par de reacción perpendicular al plano.

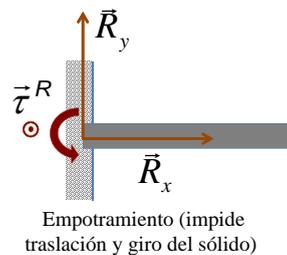


Figura 13.5: En un empotramiento consideraremos una fuerza de ligadura de módulo y dirección a determinar (con dos componentes independientes) y un momento o par de reacción que impide el giro.

Ejemplo: obtención de las fuerzas y momento de ligadura sobre un sólido empotrado en la pared

Supongamos que tenemos una barra de 50 cm de longitud y 50 N de peso, con uno de sus extremos empotrado en una pared vertical. Sobre el otro extremo se aplica una fuerza exterior de 50 N, con una inclinación de $\theta=30^\circ$ respecto a la vertical, tal como se muestra en la figura 13.6 a).

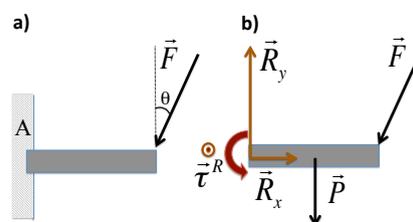


Figura 13.6: Diagrama de fuerzas para una barra empotrada en una pared vertical, y sobre la que se ejerce una fuerza F con componentes vertical y horizontal.

Veamos cómo determinar el valor de las reacciones en A en la situación de equilibrio. Una vez identificado el sistema cuyo equilibrio estamos considerando (la barra de la figura 13.6), comenzaremos por dibujar su diagrama de cuerpo

libre, considerando las fuerzas y momentos que actúan sobre ella. Para ello tendremos en cuenta tanto las fuerzas externas aplicadas (peso \vec{P} y \vec{F}) como las reacciones en A, tal y como se muestra en la figura 13.6 b).

A continuación se escriben las ecuaciones que corresponden a las condiciones de equilibrio, es decir, que la resultante de las fuerzas y la resultante de los momentos deben ser nulas. Como se trata de un problema en dos dimensiones (supongamos el plano XY), se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_x &= 0 \Rightarrow R_x = F \operatorname{sen} \theta \Rightarrow R_x = 25 \text{ N} \Rightarrow \vec{R}_x = 25 \hat{i} \text{ N} \\ \sum \vec{F}_y &= 0 \Rightarrow R_y = P + F \operatorname{cos} \theta \Rightarrow \vec{R}_y = (50 + 25\sqrt{3}) \hat{j} \text{ N} \\ \sum \vec{\tau}_A &= 0 \Rightarrow F_y L + P \frac{L}{2} - \tau_A^R = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_A^R = \frac{25\sqrt{3} + 25}{2} \hat{k} \text{ N.m}\end{aligned}\tag{13.1}$$

13.2. Sistemas estáticamente determinados

Al analizar la situación de equilibrio de sistemas simples (de un solo cuerpo) o de sistemas formado por varios cuerpos, puede ocurrir que el número de coacciones impuestas por los enlaces sea justo el suficiente y necesario para impedir el movimiento del sistema. En estos casos se habla de sistemas **estáticamente determinados o isostáticos**, en los que se podrá determinar sin ambigüedad el valor de todas las reacciones en los enlaces a partir del planteamiento y resolución de las ecuaciones de equilibrio (el número de ecuaciones es igual al de incógnitas). También se pueden dar situaciones en las que los enlaces imponen más coacciones de las necesarias; es el caso de los sistemas **hiperestáticos**, para los que habrá más incógnitas que ecuaciones de equilibrio. Veamos a continuación algunos ejemplos de sistemas isostáticos en el plano.

■ Sistemas simples, constituidos por un solo cuerpo

Cuanto se tienen sistemas de un solo elemento, el problema habitual va a ser la determinación de las fuerzas y momentos de ligadura (“reacciones”) externas. Como primera aproximación al problema, pensemos que el número de ecuaciones de equilibrio con que contamos es de 3: fuerza resultante nula en las dos direcciones del plano (típicamente x e y) y momento resultante nulo en la dirección perpendicular al plano (z). Por lo tanto, el número de incógnitas (valor de las fuerzas y par de reacción) que se pueden determinar es 3. (Pensad en el ejemplo anterior, ecuaciones 13.1). En la figura 13.7 se muestran otros dos ejemplos de sistemas isostáticos.

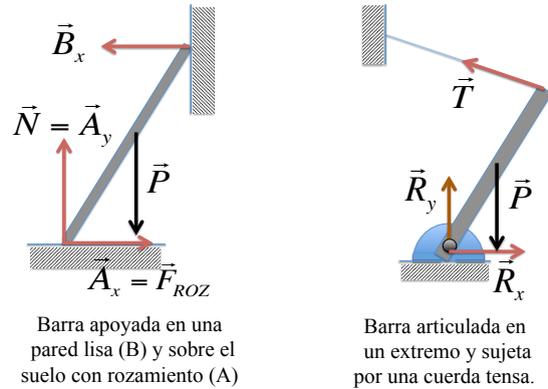


Figura 13.7: En los sistemas de la figura se muestran las componentes de las fuerzas de reacción (incógnitas) a determinar.

Puede verse que en ambos casos se tienen tres incógnitas que pueden determinarse resolviendo el sistema de las tres ecuaciones de equilibrio mencionadas.¹

- Sistemas compuestos por varios cuerpos, con enlaces entre ellos**
 Cuando se tiene sistemas formados por varios elementos, enlazados entre sí, distinguiremos entre reacciones (fuerzas y momentos de ligadura) externas (en los enlaces del sistema con el exterior) y reacciones internas, en los enlaces entre partes del sistema. El problema habitual consistirá en la determinación de esas reacciones. En ocasiones será posible determinar las reacciones externas a partir de las ecuaciones de equilibrio del sistema completo (si el número de coacciones en los enlaces externos es igual a 3); existen sin embargo sistemas en que esto no es posible (número de coacciones externas >3), siendo necesario recurrir además a las condiciones de equilibrio de los distintos elementos del sistema. Vamos a ver algunos ejemplos de ambos casos.

Ejemplo de sistema isostático de sustentación

En los sistemas isostáticos de sustentación el número de grados de libertad del sistema completo (“visto como un todo”, como si fuera un único

¹Con carácter general se tiene que los sistemas isostáticos son aquellos en que el número de coacciones coincide con el de grados de libertad. El número de grados de libertad (N) de un cuerpo se identifica con el número de coordenadas independientes necesarias para determinar su posición. Así, la posición de un sólido simple en el plano se determina por dos puntos. En principio eso supondría cuatro coordenadas pero al tratarse de un sólido rígido la distancia entre los puntos es fija, con lo que bastan tres coordenadas, siendo $N=3$. Si el número de coacciones es 3 se tiene un sistema isostático, y si es mayor que 3, hiperestático.

sólido rígido) es igual al número de coacciones externas).²

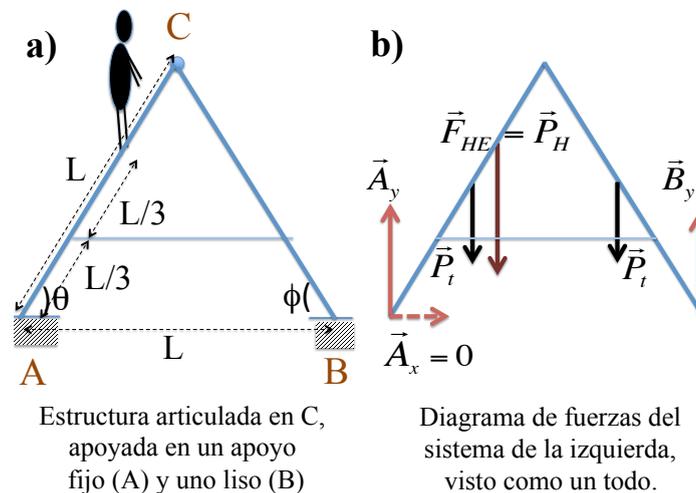


Figura 13.8: a) Ejemplo de sistema isostático de sustentación. En este caso, de acuerdo con lo indicado en el texto, los ángulos $\theta = \phi = 60^\circ$. b) Diagrama de cuerpo libre del sistema completo.

En la figura 13.8 a) se muestra una estructura (i.e. una escalera) compuesta por dos tramos iguales de longitud L y masa $m_t = 4$ kg, articulados en C y formando un ángulo de 60° . La estructura se mantiene en equilibrio teniendo un apoyo fijo en A y otro liso en B. Además, hay una cuerda que une los dos tramos, fija a una distancia $L/3$ de los apoyos A y B. Se supondrá que hay un chico de 60 kg subido en el tramo de la izquierda, a una distancia $2L/3$ de A. El objetivo del problema es determinar el valor de las reacciones externas, así como de las fuerzas internas en la articulación C y el valor de la tensión.

Se tienen tres fuerzas de ligadura externas, como se muestra en la figura; A_x , A_y y B_y , que podrán determinarse resolviendo las ecuaciones de equilibrio del sistema completo. A la vista del diagrama, es evidente que A_x debe ser cero (no existe ninguna otra fuerza externa con componente horizontal, y la resultante debe ser cero). En cuanto a las otras dos, pueden obtenerse tal y como se muestra a continuación:

- Resultante de fuerzas externas nula en el eje y:

$$A_y + B_y = P_H + 2P_t \quad (13.2)$$

². O, expresado en otros términos, el número de reacciones externas (incógnitas) es igual al de ecuaciones de equilibrio del sistema completo.

- Momento resultante de las fuerzas externas respecto a A nulo:

$$P_t \frac{L}{2} \cos(\theta) + P_H \frac{2L}{3} \cos(\theta) + P_t [L \cos(\theta) + \frac{L}{2} \cos(\phi)] - B_y [L \cos(\theta) + L \cos(\phi)]$$

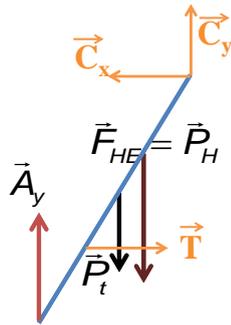
$$= P_t \frac{L}{2} \cos(60) + P_H \frac{2L}{3} \cos(60) + P_t (L + \frac{L}{2}) \cos(60) - B_y 2L \cos(60) = 0$$

$$\frac{P_t}{2} + \frac{2P_H}{3} + \frac{3P_t}{2} = 2B_y$$

Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene directamente el valor de $B_y = 235,2$ N (24 kg.f, o 24 kg simplemente, en el Sistema Técnico) y llevando ese valor a la ecuación 13.2 se obtiene $A_y = 431,2$ N (44 kg)

Veamos ahora como obtener el valor de la tensión de la cuerda que une los tramos (\vec{T} , en la dirección de la cuerda) y las dos componentes de la reacción en la articulación C, \vec{C}_x y \vec{C}_y . Para eso, “dividiremos idealmente” el sistema en dos partes, tal y como se representa en la figura 13.9.

a) Parte izquierda



b) Parte derecha

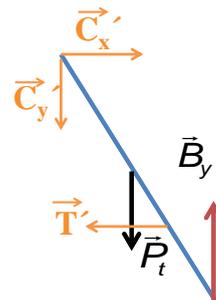


Figura 13.9: Diagrama de fuerzas de cada una de las partes en que se divide el sistema de la figura 13.8 para la determinación de las fuerzas de reacción internas.

Nótese que \vec{T} y \vec{T}' son iguales en módulo (T) y dirección, pero de sentido opuesto, lo mismo que ocurre con las componentes de la ligadura en la articulación interna en C. Para resolver el problema, es suficiente con plantear el equilibrio de una de las partes (indistintamente), siendo ya conocidos los valores de las ligaduras externas. Tomemos la parte derecha, por ejemplo, y escribamos las tres ecuaciones de equilibrio.

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F}_x = 0 &\Rightarrow \vec{C}'_x + \vec{T}' = 0 \Rightarrow C_x = T \\
\sum \vec{F}_y = 0 &\Rightarrow \vec{C}'_y + \vec{P}_t + \vec{B}_y = 0 \Rightarrow B_y = C_y + P_t \\
\sum \vec{\tau}_C = 0 &\Rightarrow T \frac{2L}{3} \text{sen}(60) + P_t \frac{L}{2} \text{sen}(30) = B_y L \text{sen}(30)
\end{aligned} \tag{13.3}$$

Despejando en la segunda ecuación, obtenemos $C_y = 20 \text{ kg}$

Despejando T en la última ecuación, se obtiene:

$$T = \frac{\sqrt{3}}{2} (B_y - \frac{P_t}{2}) = 11\sqrt{3} \text{ kg}$$

y por tanto $C_x = 11\sqrt{3} \text{ kg}$, con lo que quedan completamente determinadas todas las ligaduras.

Como acabamos de ver, en el problema anterior hemos podido determinar las fuerzas de ligadura externas ejercidas sobre el sistema articulado a partir de la resolución de las ecuaciones de equilibrio del sistema completo. Solo ha sido necesario dividir el sistema para obtener las internas. Vamos a ver a continuación un ejemplo de otro tipo de sistemas en los que va a ser necesario utilizar las ecuaciones de equilibrio de los elementos (partes del sistema) para obtener el valor de las fuerzas de ligadura externas.

Ejemplo de sistema globalmente isostático

Pensemos en el sistema de la figura 13.10, en el que una viga articulada está apoyada sobre un apoyo fijo y dos lisos.³ Al analizar las ligaduras externas vemos que hay cuatro componentes que deben ser determinadas, contando de entrada con las tres ecuaciones de equilibrio del sistema completo. Podría pensarse que se trata de un sistema en equilibrio hiperestático; no obstante, no es así ya que las condiciones de equilibrio de cualquiera de los dos elementos que lo componen (parte de la izquierda o parte de la derecha de la articulación, figura 13.10c) nos proporcionan las ecuaciones necesarias para la solución completa. Se dispone por tanto de 6 ecuaciones y de esta forma podrán determinarse tanto las ligaduras (externas) en los apoyos: A (en el caso más general 2 componentes, x e y), B (1, y) y C (1, y), como las dos componentes de la ligadura interna en la articulación D (2 componentes, x e y).

³Aunque este sistema es hiperestático de sustentación, ya que el número de coacciones externas es mayor que el de grados de libertad del sistema "como un todo", el número total de coacciones (4 externas + 2 internas) es igual al de grados de libertad totales

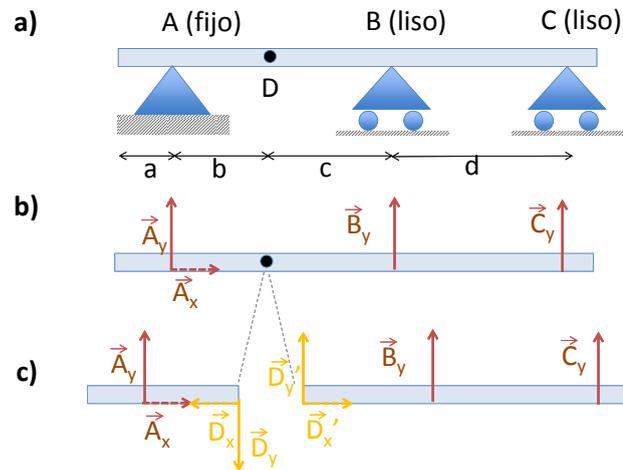


Figura 13.10: a) Viga articulada como ejemplo de sistema globalmente isostático. b) Diagrama de cuerpo libre, con representación de las ligaduras externas. La ligadura en A tendrá componente horizontal si hay alguna fuerza aplicada sobre la viga que deba ser compensada en esa dirección. c) Diagrama de las fuerzas ejercidas sobre cada una de las dos partes del sistema que se originan al dividirlo por la articulación D.

Vamos a resolver el ejemplo de la figura 13.11, en el que sobre la viga articulada en D, y apoyada en un apoyo fijo (A) y dos lisos (B y C), actúa una fuerza \vec{F} de 1000 N, inclinada 30° respecto a la vertical. Supondremos en el problema que el peso de la barra es despreciable.

Ecuaciones de equilibrio del sistema completo:

$$(I) \quad \sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow A_x - F \operatorname{sen}(30) = 0 \Rightarrow A_x = 500 \text{ N}$$

$$(II) \quad \sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow A_y - B_y + C_y - F \cos(30) = 0 \Rightarrow A_y - B_y + C_y = 500\sqrt{3}$$

$$(III) \quad \sum \vec{\tau}_A = 0 \Rightarrow F \cos(30) \frac{L}{6} - B_y \frac{L}{2} + C_y \frac{5L}{6} = 0 \Rightarrow 3B_y - 5C_y = 500\sqrt{3}$$

Evidentemente se necesita una relación adicional para poder obtener A_y , B_y , C_y , para lo que acudiremos a las condiciones de equilibrio de uno de los dos elementos del sistema (indistintamente el de la derecha o el de la izquierda de la articulación)

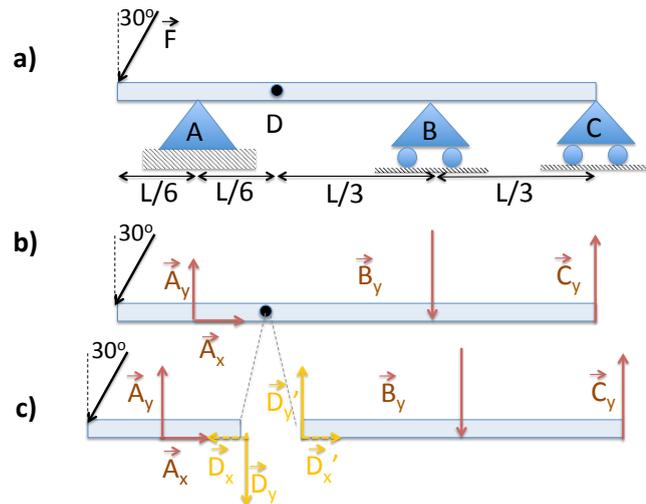


Figura 13.11: a) Ejemplo de viga articulada sometida a una fuerza externa \vec{F} . b) Diagrama de cuerpo libre del sistema completo. c) Diagrama de cada una de las dos partes del sistema que se originan al dividirlo por la articulación D.

Ecuaciones de equilibrio de una de las partes (la elegimos a la izquierda de la articulación): Fijándonos en la figura 13.11c), las ecuaciones de equilibrio para la parte de la viga a la izquierda de la articulación son:

$$(IV) \sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow A_x - F \operatorname{sen}(30) - D_x = 0 \Rightarrow D_x = 0 \text{ N}$$

$$(V) \sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow A_y - D_y - F \operatorname{cos}(30) = 0 \Rightarrow A_y - D_y = 500\sqrt{3}$$

$$(VI) \sum \vec{\tau}_D = 0 \Rightarrow F \operatorname{cos}(30) \frac{L}{3} - A_y \frac{L}{6} = 0$$

De la última ecuación se obtiene directamente el valor de $A_y = 1000\sqrt{3}$ N y sustituyendo en (II) se tiene que:

$$(IIbis) B_y - C_y = 500\sqrt{3}, \text{ que junto con la ecuación (III)}$$

$$(III) 3B_y - 5C_y = 500\sqrt{3}$$

constituyen un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas de resolución inmediata, obteniéndose:

$$C_y = 500\sqrt{3} \text{ N} \quad y \quad B_y = 1000\sqrt{3} \text{ N}$$

Resumiendo, los valores obtenidos para las fuerzas de ligadura son:

$$\text{Externas (N)} \quad \vec{A}_x = 500\hat{i} \quad \vec{A}_y = 1000\sqrt{3}\hat{j} \quad \vec{B}_y = -1000\sqrt{3}\hat{j} \quad \vec{C}_y = 500\sqrt{3}\hat{j}$$

$$\text{Internas (N)} \quad \vec{D}_x = 0\hat{i} \quad \vec{D}_y = -500\sqrt{3}\hat{j} \quad \vec{D}'_x = -\vec{D}_x \quad \vec{D}'_y = -\vec{D}_y$$

13.3. Solicitaciones

En este apartado vamos a ocuparnos de la determinación de las **reacciones internas en un elemento simple**, a diferencia de lo que hemos visto en el punto anterior donde se han visto fuerzas de reacción en los enlaces entre distintos elementos de un sistema. Pensemos ahora en un cuerpo (una viga, por ejemplo) en equilibrio, sometida a una serie de fuerzas externas. Estas serán tanto aplicadas (cargas externas), como las habituales reacciones de los enlaces externos. Para determinar las fuerzas en el interior del elemento utilizaremos el método de las secciones. Si imaginamos la viga seccionada en dos partes (sección transversal S), cada parte estará en equilibrio bajo la acción de las fuerzas externas en ella, y de las fuerzas internas en la sección de corte.

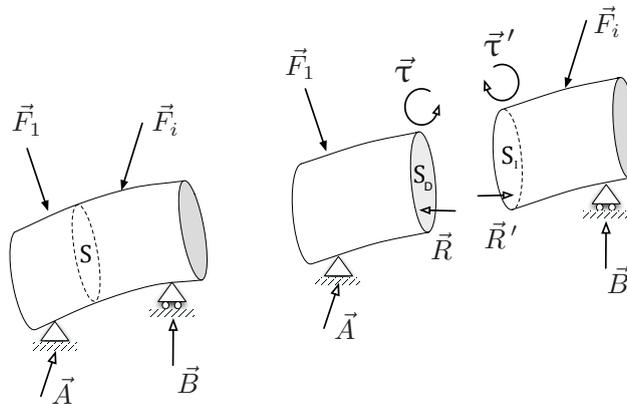


Figura 13.12: a) Esquema de un elemento en equilibrio, sometido a fuerzas externas aplicadas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ y fuerzas de reacción en los enlaces. b) Esquema de la división del elemento, para calcular las reacciones internas en la sección.

Estas fuerzas internas son las que cada una de las dos partes de la viga ejercería sobre la otra, antes de ser “idealmente” separadas. En general, el sistema de fuerzas internas en la sección se tratará como una fuerza \vec{R} aplicada en el

centro de gravedad de la sección y un momento o par de reacción interno $\vec{\tau}^R$. No obstante, en los problemas restringidos al plano que se van a plantear aquí, las fuerzas internas se caracterizarán mediante una fuerza resultante con dos componentes (x e y típicamente) y un momento flector (componente z). La componente x de la fuerza, perpendicular (normal) a la sección, se corresponde con una tracción o una compresión. Por su parte, la componente y , paralela a la sección, corresponde a una fuerza cortante, también conocida como fuerza de cizalla o cizalladura.

Resolvamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Se tiene una viga, de longitud L y peso despreciable, con sus dos extremos apoyados en un apoyo fijo (A) y otro liso (B). Hay que obtener las solicitaciones en función de la distancia x al extremo A.

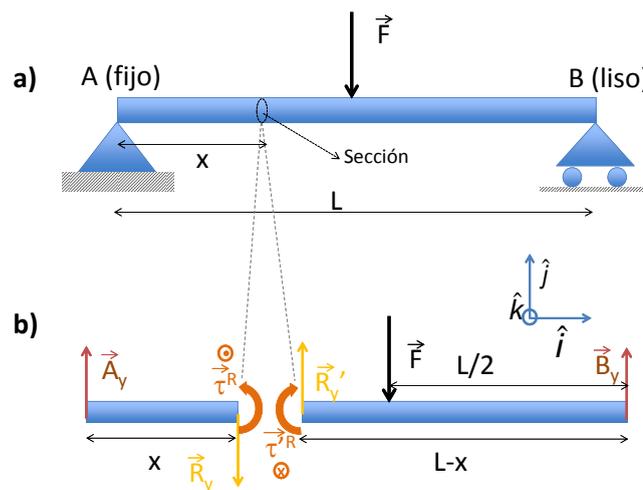


Figura 13.13: a) Esquema de un elemento en equilibrio, sometido a fuerzas externas aplicadas (\vec{F}) y de reacción en los enlaces \vec{A} y \vec{B} . b) Diagrama de fuerzas de cada una de las partes del elemento, al dividirlo por la sección.

En primer lugar plantearemos las ecuaciones de equilibrio del elemento, para calcular las reacciones externas \vec{A}_y y \vec{B}_y . Nos fijaremos en la figura 13.13a).

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - F = 0 \Rightarrow A_y + B_y = F$$

$$\sum \vec{\tau}_A = 0 \Rightarrow B_y L - F \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow B_y = \frac{F}{2}$$

Y llevando el valor de B_y a la primera ecuación:

$$A_y = \frac{F}{2}$$

Procederemos a continuación a tomar una de las dos partes que resultan de la división (figura 13.13b). Si tomamos la de la izquierda:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_y = 0 &\Rightarrow A_y - R_y = 0 \Rightarrow R_y = A_y = \frac{F}{2} \\ \sum \vec{\tau}_x = 0 &\Rightarrow -A_y x + \tau^R = 0 \Rightarrow \tau^R = \frac{F}{2} x \end{aligned}$$

Resumiendo, los valores obtenidos para las reacciones son:

$$\text{Externas} \quad \vec{A}_y = \frac{F}{2} \hat{j} \quad \vec{B}_y = \frac{F}{2} \hat{j}$$

$$\text{Internas} \quad \vec{R}_y = -\frac{F}{2} \hat{j} \quad \vec{\tau}^R = \frac{F}{2} x \hat{k}$$

Evidentemente, \vec{R}_y y $\vec{\tau}^R$ serán iguales en módulo y dirección, pero de sentido opuesto a los mostrados en la tabla.

Ejemplo 2. Se tiene una viga, de longitud $L=1$ m y peso por unidad de longitud $p=500$ N/m. Suponed que sus dos extremos están apoyados en un apoyo fijo (A) y otro liso (B). Hay que obtener las solicitaciones en función de la distancia x al extremo A.

Planteando las ecuaciones de equilibrio del elemento completo (figura 13.14a), de forma análoga al ejemplo anterior obtenemos las reacciones externas:

$$\vec{A}_y = \vec{B}_y = \frac{P}{2} \hat{j} = 250 \hat{j} \text{ N}$$

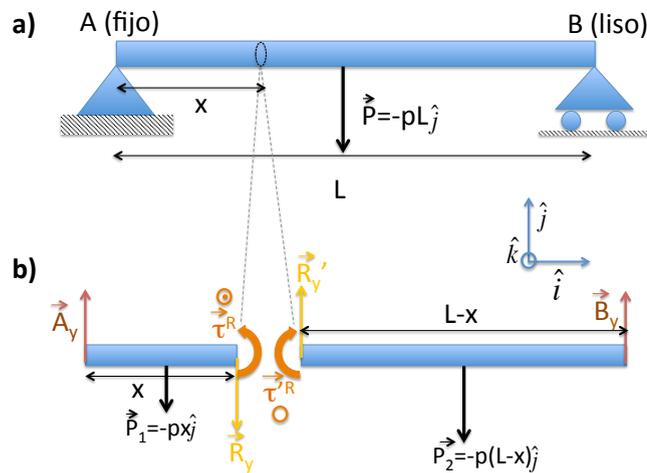


Figura 13.14: a) Esquema de una viga, de peso por unidad de longitud P apoyada en un apoyo fijo (A) y otro liso (B). b) Diagrama de fuerzas de cada una de las partes del elemento, al dividirlo por una sección a una distancia x de A.

Elijamos a continuación el fragmento de longitud x (la parte izquierda de la figura 13.14b) y escribamos las ecuaciones de equilibrio.

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow A_y - R_y - px = 0 \Rightarrow R_y = A_y - px = 250(1 - 2x) \text{ N}$$

$$\sum \vec{\tau}_x = 0 \Rightarrow -A_y x + px \frac{x}{2} + \tau^R = 0 \Rightarrow \tau^R = 250x - 250x^2 = 250x(1 - x) \text{ N.m}$$

Capítulo 14

FUNDAMENTOS DE ELASTICIDAD

Al analizar el equilibrio de los sólidos hemos considerado hasta el momento solamente cuerpos rígidos, no deformables bajo la acción de las fuerzas que se ejercían sobre ellos. Sin embargo, los sistemas reales pueden deformarse por lo que resulta necesario entender la relación entre las deformaciones y las fuerzas que las provocan. En este capítulo se va a describir, a modo de introducción básica, la dependencia existente entre las fuerzas (tanto normales como de cizalla) ejercidas sobre un sólido y las correspondientes deformaciones.

14.1. *Esfuerzo y deformación*

Imaginemos una barra, de longitud L_0 y sección A , con uno de sus extremos sujeto firmemente a una pared de forma que permanece fijo. Si sobre el otro extremo se ejerce una fuerza F en la dirección de la barra (fuerza normal perpendicular a la sección), esta se deformará, elongándose o disminuyendo su longitud dependiendo del sentido de la fuerza. En la figura 14.1, a modo de ejemplo, se ha representado la deformación correspondiente a una *fuerza de tracción* o tensión; cada sección de la barra se desplaza -respecto a la posición inicial- un cierto Δl que es proporcional a la distancia al extremo fijo. Análogamente, si se ejerciera una *fuerza de compresión*, en sentido contrario a la mostrada, se tendría un acortamiento de la barra. A la variación total de su longitud la denotaremos como ΔL .

En este contexto llamaremos:

$$\frac{F}{A} = \text{Esfuerzo (fuerza de tracción o de compresión por unidad de superficie)}$$
$$\frac{\Delta L}{L_0} = \text{Deformación unitaria o simplemente deformación}$$

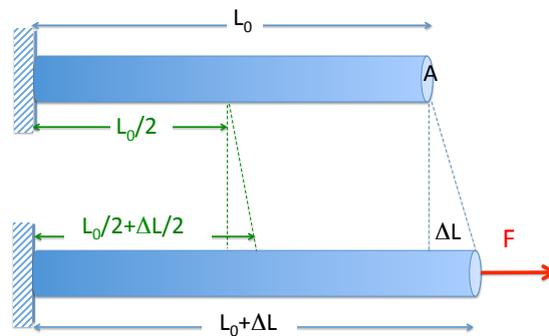


Figura 14.1: Deformación de una barra sólida bajo la acción de una fuerza normal. Se ha indicado en particular el desplazamiento respecto a la posición inicial del extremo libre de la barra así como del punto medio de la misma.

Para describir la dependencia entre estas magnitudes, resultan muy ilustrativas las representaciones gráficas de las curvas esfuerzo-deformación. La curva modelo que se muestra en la gráfica 14.2 pone de manifiesto varios rangos de comportamiento, en función de la magnitud del esfuerzo al que se ve sometida la barra y su correspondiente deformación.

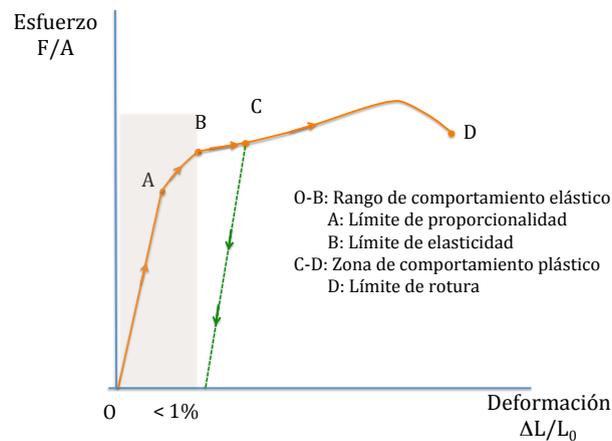


Figura 14.2: Curva característica esfuerzo-deformación para un material dúctil sometido a tensión.

- Rango de comportamiento elástico. Zona O-B

En esta zona, la deformación del sólido desaparece cuando deja de ejercerse la fuerza, es decir, “se recupera” al cesar el esfuerzo. Corresponde a pequeñas deformaciones, en general inferiores al 1%. Si la carga sobre el sólido responsable de la deformación se retira gradualmente, el material se recupera siguiendo la misma curva, en sentido inverso. Dentro de ese rango, se puede distinguir un primer tramo O-A en el que el esfuerzo y la deformación son proporcionales: en esa región de comportamiento lineal se verifica que

$$\frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \text{constante} \quad (14.1)$$

Esa constante, característica del material, es el denominado **módulo de Young**, Y , de uso habitual para describir el comportamiento de los sólidos en su rango elástico lineal. Es interesante comentar que en este rango el sólido se comporta de forma similar a un muelle, obedeciendo a la ley de Hooke, con una deformación proporcional al esfuerzo que la provoca. El módulo de Young se expresa, en el S.I., en N/m^2 (unidades de “presión”). En la tabla se muestran valores de Y para diversos materiales. Es conveniente tener en cuenta que aunque en algunos materiales el módulo de Young bajo tracción es muy similar al que corresponde a esfuerzos de compresión, hay ejemplos de lo contrario, como ocurre con los huesos.

- Rango de comportamiento plástico C-D

En esta zona, la deformación del sólido persiste una vez desaparecido el esfuerzo. Se dice que el cuerpo sufre una deformación plástica. Hay una situación, que correspondería a la zona B-C de la gráfica, en la que el sólido se recupera parcialmente cuando deja de ejercerse la fuerza que ha producido la deformación. Eso correspondería al camino “de vuelta” señalado en trazo discontinuo en la figura.

El punto D marcaría el límite que puede soportar el sólido antes de que se fracture como consecuencia del esfuerzo al que es sometido. El valor máximo del esfuerzo que puede soportar un material antes de romperse se denomina **esfuerzo de rotura** (de tracción/compresión) o **resistencia** (a la tracción/compresión).

Cabe señalar que hay materiales que presentan deformaciones importantes tras superar el límite elástico y antes de fracturarse. Son los denominados dúctiles. Por el contrario, los materiales quebradizos se fracturan al poco de superar el límite elástico.

Material	Módulo de Young tracción/compresión 10^{11} N/m^2	Esfuerzo de rotura tracción 10^8 N/m^2
Acero	2,0	11
Cobre	1,1	5
Aluminio	0,7	2
Vidrio	0,55	10
Hueso	0,16//0,09	

Cuadro 14.1: Valores característicos del módulo de Young y del esfuerzo de rotura para diversos materiales.

En situaciones reales, es habitual que los cuerpos estén sometidos a esfuerzos de tensión y compresión simultáneamente. Por ejemplo, si pensamos en una viga horizontal apoyada en sus extremos, como las estudiadas en el capítulo anterior, realmente se pandean debido a su peso. (Figura 14.3)

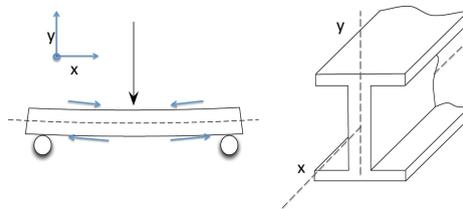


Figura 14.3: Viga sometida a esfuerzos de tracción (parte inferior) y compresión (superior). Se muestra un perfil característico, con una geometría adecuada para soportar mayores esfuerzos en sus partes superior e inferior, teniendo un grosor mucho menor en el centro, donde el esfuerzo será prácticamente nulo.

Esfuerzo de corte o cizalla.

Además de las fuerzas normales a las que se ha hecho referencia en el punto anterior, los sólidos pueden verse sometidos a fuerzas ejercidas a lo largo de direcciones contenidas en su sección. En la figura 14.3 se muestra un ejemplo, indicándose de forma esquemática la deformación sufrida por un sólido en forma de paralelepípedo. De forma análoga a lo visto, se define el **esfuerzo cortante o de cizalla** como el cociente entre la fuerza cortante y la sección sobre la que se aplica. En este caso, la magnitud de la deformación puede caracterizarse mediante el desplazamiento angular:

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{\Delta x}{L} \approx \phi \quad (14.2)$$

Al igual que ocurre con las tracciones o compresiones, existe un rango de valores en el que el esfuerzo cortante y la deformación son proporcionales, pudiéndose definir el **módulo de torsión**, también conocido como módulo de corte o de cizalladura, característico del material en el rango de comportamiento elástico:

$$\text{Módulo de torsión} = \frac{F/A}{\phi} \quad (14.3)$$

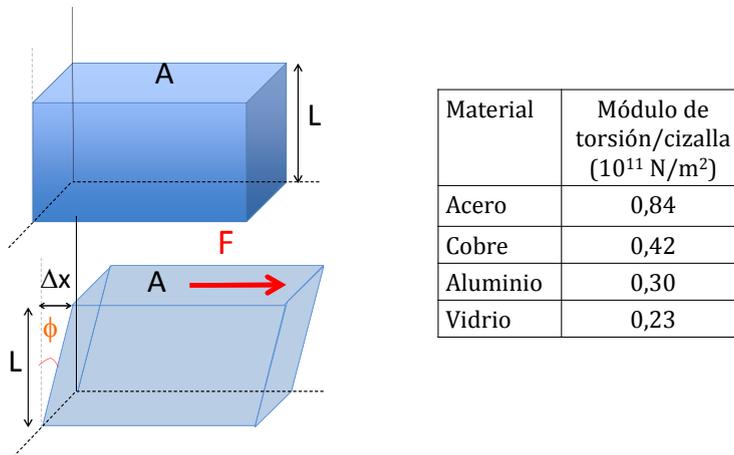


Figura 14.4: Deformación de un paralelepípedo sometido a un esfuerzo cortante ejercido sobre su cara superior (la inferior se supone fija). En la tabla se muestran algunos valores típicos del módulo elástico de torsión.

14.2. Ejemplos

1. Se cuelga un bloque de 500 kg de masa del extremo de un alambre de acero de 3 m de longitud y cuya sección transversal es de $0,15 \text{ cm}^2$. El otro extremo permanece fijo. Sabiendo que el módulo de Young del acero es $2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, ¿cuál será el alargamiento experimentado por el alambre? Si su esfuerzo de rotura es $11 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, ¿cuál sería el máximo peso que podría soportar?

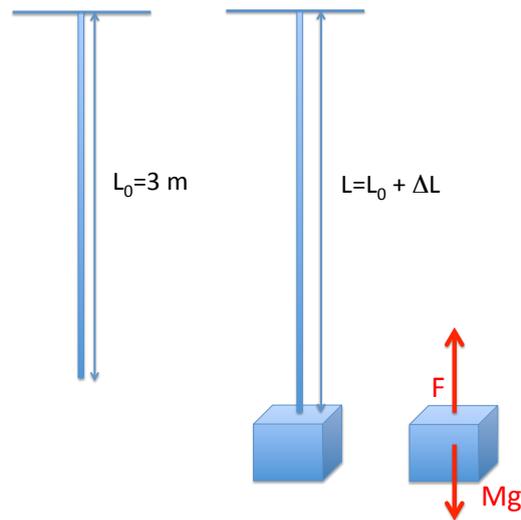


Figura 14.5: Deformación experimentada por el alambre al colgar el objeto de masa M .

En la situación de equilibrio, la fuerza en el extremo inferior del cable será igual al peso del bloque: $F=Mg= 500 \times 9,8 = 4900 \text{ N}$

Teniendo en cuenta la definición de Y , módulo de Young, puede calcularse la deformación:

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{F/A}{Y} = \frac{4900/1,5 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{11}} = 1,63 \cdot 10^{-3} \quad (14.4)$$

con lo que el alargamiento será $\Delta L = 4,90 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4,9 \text{ mm}$

Por otra parte, si el esfuerzo de rotura es $11 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, el valor máximo de la fuerza será ese valor multiplicado por la sección:

$$F_{max}=16500 \text{ N, lo que correspondería a una masa : } M_{max}=1683,7 \text{ kg}$$

Parte VI

MECÁNICA DE FLUIDOS

INTRODUCCIÓN

Un fluido es un sistema complejo, constituido por un número muy elevado de partículas. Para describir su comportamiento no resulta posible partir de las propiedades individuales de cada una de las partículas y de sus interacciones, siendo necesario introducir nuevos conceptos y definir magnitudes físicas específicas para su estudio. En el primer capítulo nos ocuparemos de los fluidos en situación de equilibrio, para introducir en el siguiente varios conceptos y principios de dinámica de fluidos.

Capítulo 15

ESTÁTICA DE FLUIDOS

La naturaleza de los sistemas que se van a estudiar aquí (formados por una enorme cantidad de partículas individuales), hace inviable un tratamiento basado exclusivamente en los conceptos presentados al analizar la dinámica de una partícula o la estática de los cuerpos sólidos. Se hace necesario introducir nuevos conceptos y definir magnitudes físicas específicas para su estudio.

15.1. *Conceptos previos*

Como características comunes a los fluidos podemos decir que son sustancias que fluyen y se adaptan a la forma del recipiente que los contiene. En este tema vamos a considerar la aproximación de fluidos **no viscosos**; eso implica que no soportan fuerzas de cizalla y por tanto las fuerzas ejercidas por el fluido van a ser perpendiculares a las superficies, tanto del recipiente que los contiene como de cualquier objeto en su seno.

Cuando hablamos de fluidos nos referimos a líquidos y gases, que comparten las características mencionadas. No obstante, existen importantes diferencias entre ellos, como las referidas a las siguientes propiedades:

Densidad. Se define como la masa (de fluido) dividida por el volumen en que está contenida.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (15.1)$$

En el sistema internacional se mide en $kg.m^{-3}$, pero es habitual usar las unidades del sistema CGS (cegesimal), $g.cm^{-3}$. La relación entre ambas es $1g.cm^{-3} = 1000 kg.m^{-3}$.

La densidad de un líquido es prácticamente constante, mientras que la de los gases es fuertemente dependiente de las condiciones: temperatura, presión... Debido a ello, cuando se da la densidad de un gas se indica habitualmente la presión y la temperatura correspondientes.

Sustancia	Densidad(kg.m ⁻³)
Aire (1 atm, 20 C)	1,2
Etanol	$8,1 \cdot 10^2$
Agua	$1 \cdot 10^3$
Agua de mar	$1,03 \cdot 10^3$
Hielo	$9,2 \cdot 10^2$

Compresibilidad. Se muestra en la figura un esquema para ilustrar la definición del módulo de compresibilidad.

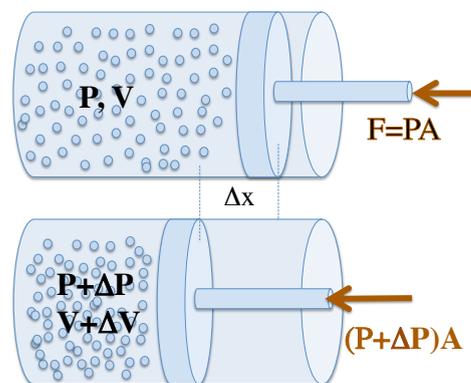


Figura 15.1: Fluido encerrado en un recipiente; la relación entre el incremento de presión y la variación de volumen asociada depende del valor del módulo de compresibilidad.

El módulo de compresibilidad se define como:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad (15.2)$$

¹B se define como positiva, de allí el signo menos de la definición

En el SI el módulo de compresibilidad se mide en $N.m^{-2}$. Los líquidos son mucho menos compresibles que los gases, cuyo módulo de compresibilidad es además muy dependiente de la presión, temperatura.

15.2. Presión hidrostática

La presión hidrostática es la que ejerce un fluido sobre cualquier objeto sumergido en él y sobre las paredes del recipiente que lo contiene. Fijémonos en la figura 15.2a), donde se representa una pequeña porción de un fluido y las fuerzas ejercidas por el resto de fluido sobre esa porción, aplicadas en dirección perpendicular a su superficie dA . El cociente entre la fuerza y el área correspondiente es la presión ejercida sobre esa superficie. Como todo el fluido está en equilibrio, también lo estará la porción seleccionada, con lo que la fuerza neta sobre ella debe ser cero: $d\vec{F} = -d\vec{F}'$. De esta forma se tiene que:

$$\frac{dF}{dA} = \frac{dF'}{dA} = p \quad (15.3)$$

p , fuerza normal por unidad de área, es **la presión hidrostática en el fluido**.

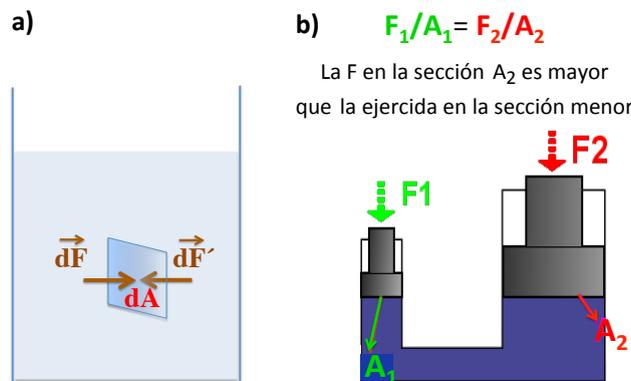


Figura 15.2: a) Representación de las fuerzas sobre una porción (superficie de área dA) de fluido en equilibrio. b) Esquema de una prensa hidráulica.

La unidad de presión en el S.I. es el pascal, $1 Pa = 1 N/m^2$. Otras unidades de presión utilizadas son el bar= $10^5 Pa$ y el milibar= $10^2 Pa$, habituales

por ejemplo en meteorología. La presión atmosférica es la ejercida por el aire en el que vivimos inmersos. Como se describe a continuación, depende de distintas variables, como la altitud. La presión atmosférica normal, entendida como el valor medio de la presión a nivel del mar, es 1 atmósfera, siendo $1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,013 \text{ bar} = 1013 \text{ milibares}$.

Los fluidos transmiten la presión en todas las direcciones. Este resultado se recoge en el principio de Pascal: la presión ejercida sobre un fluido poco compresible y en equilibrio dentro de un recipiente de paredes indeformables se transmite con igual intensidad en todas las direcciones y en todos los puntos del fluido. (Figura 15.2 b)

Las aplicaciones de este principio pueden encontrarse en una prensa hidráulica, en sistemas elevadores, frenos hidráulicos...

15.2.1. Dependencia de la presión con la profundidad

En la figura 15.3a) se muestra una porción de fluido, de masa dm , en forma de paralelepípedo de sección A y altura dy , y las fuerzas que actúan sobre ella.

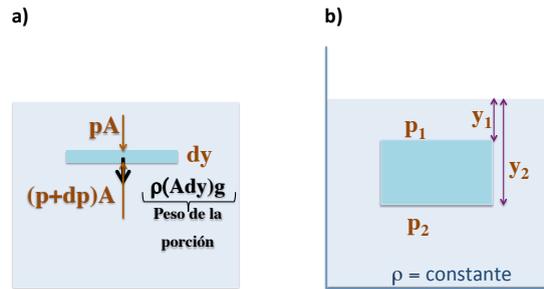


Figura 15.3: Variación de la presión con la profundidad.

Consideremos que la densidad de la porción de fluido es ρ . La condición de equilibrio (eje vertical) para ese elemento debe reflejar que la fuerza neta ($d\vec{F}$) ejercida por el resto del fluido sobre él debe ser igual en módulo y opuesta a su peso:

$$dF = (p + dp)A - pA = (dm)g = \rho(A dy)g$$

Es decir, la diferencia de presión entre dos puntos, separados una distancia dy es $dp = \rho g dy$.

Consideremos ahora una situación en que la densidad del fluido no varía con la profundidad ($\rho = \text{constante}$). Se trata de una suposición razonable cuando se trabaja con líquidos y la diferencia de profundidad no es extrema. En estas condiciones, es inmediato obtener la diferencia de presión entre dos puntos a distinta profundidad y_2 e y_1 (figura 15.3b) integrando la expresión anterior:

$$\int_1^2 dp = p_2 - p_1 = \int_1^2 \rho g dy = \rho g(y_2 - y_1)$$

Vemos que en un fluido de densidad constante la diferencia de presión entre dos puntos, separados una distancia Δy , es proporcional a esa distancia.

$$\Delta p = \rho g \Delta y \quad (15.4)$$

En los casos en que la densidad del fluido varía con la profundidad (o con la altura, como ocurre en el aire al ascender en la atmósfera desde el nivel del mar), es necesario tener en cuenta esa dependencia de la densidad al resolver la integral. Es habitual en estos casos utilizar como variable la altura, h , sobre un nivel dado, en lugar de la profundidad, y , mencionada hasta ahora.

$$dp = \rho g dy = -\rho g dh \quad (15.5)$$

Integrando la última ecuación se puede calcular, por ejemplo, cómo varía la presión atmosférica con la altura, cuando se asciende en la atmósfera terrestre.

$$dp = -\rho g dh \Rightarrow p(h) - p_0 = - \int_0^h \rho g dh \quad (15.6)$$

La dificultad radica en que ρ depende de la altura, por lo que para poder resolver el problema necesitamos expresarla en función de otras variables del problema. Suponiendo que el aire se comporta como un gas ideal, se cumple que $pV = nRT$ y $p = nRT/V$. Si multiplicamos y dividimos por M , la masa molecular del aire, se tiene que $p = \rho RT/M$ y por lo tanto $\rho = pM/RT$. Vamos asimismo a suponer que las variaciones de temperatura son menos acusadas que las de la presión.

$$dp = -\frac{pM}{RT} g dh \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh \Rightarrow \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^h dh \quad (15.7)$$

Por comodidad, al cociente Mg/RT lo denotaremos como C , de forma que:

$$\ln \frac{p(h)}{p_0} = -Ch \Rightarrow p(h) = p_0 e^{-Ch} \quad (15.8)$$

Si p_0 es la presión atmosférica al nivel del mar, $P(h)$ disminuye exponencialmente conforme aumenta la altura respecto a dicho nivel.

15.2.2. Aplicaciones. Medidas de la presión

La dependencia de la presión con la altura o profundidad se utiliza en distintos dispositivos que permiten medir la presión. Comenzaremos por uno muy sencillo, el barómetro de mercurio. Supongamos un tubo abierto, lleno de mercurio, y un recipiente también con mercurio (superficie libre abierta a la atmósfera). Vamos a considerar que se invierte el tubo, sumergiendo el extremo abierto en el recipiente, tal y como se representa en la figura 15.4. En esas condiciones es fácil ver que la presión en la superficie del mercurio, (que tiene que ser igual a la atmosférica) viene dada por la altura de la columna de mercurio.

$$p_{atm} = \rho_{Hg}gh \quad (15.9)$$

La densidad del mercurio es $\rho_{Hg}=13.6 \text{ g.cm}^{-3}$ y en condiciones normales la altura que alcanza el mercurio es $h=0.76 \text{ m}$. A partir de allí se establece que la presión atmosférica es $1 \text{ atm}=760 \text{ mm Hg}=760 \text{ torr}$. Por otra parte, de acuerdo con la ecuación (15.9) y sustituyendo los datos expresados en unidades del SI, $1 \text{ atm}=13600 \times 9.8 \times 0.76=1.013 \times 10^5 \text{ N.m}^{-2}=1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$. El pascal, Pa, es la unidad de presión del sistema internacional.

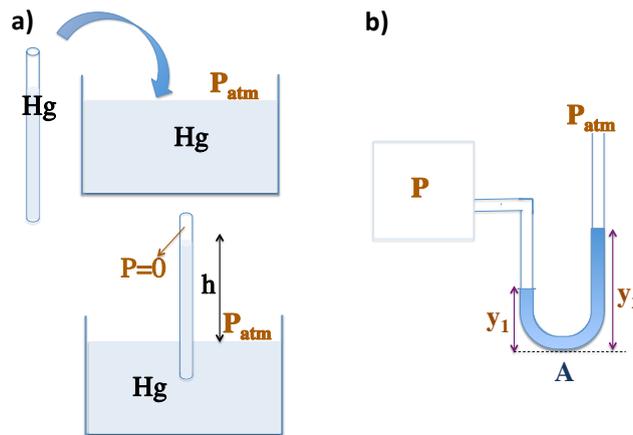


Figura 15.4: (a) Esquema del barómetro de mercurio. (b) Esquema de un manómetro de tubo abierto.

Otro sistema, en este caso para determinar la presión de un gas en un recipiente, es el manómetro de tubo abierto, que se representa en la figura 15.4b. En el depósito hay un gas, cuya presión se quiere determinar; el tubo, que contiene un líquido, está por un lado conectado al depósito y por el otro

abierto a la atmósfera. En el punto A la presión será:

$$p + \rho g y_1 = p_{atm} + \rho g y_2 \Rightarrow p - p_{atm} = \rho g (y_2 - y_1) \quad (15.10)$$

A la diferencia entre la presión del gas y la atmosférica se la conoce como presión manométrica, y viene determinada por la diferencia de altura del líquido en los dos brazos del dispositivo.

15.2.3. Cálculo de la fuerza hidrostática sobre una pared vertical

Supongamos la situación de la figura, en la que un recipiente en forma de paralelepípedo está lleno de agua. Evidentemente las paredes del recipiente se ven sometidas a la presión hidrostática. Supongamos que las paredes de la izquierda y de la derecha, de forma rectangular, tienen altura H y longitud L . Vamos a calcular la fuerza equivalente que se ejerce sobre la pared (p. ej. la de la derecha) así como su línea de acción.

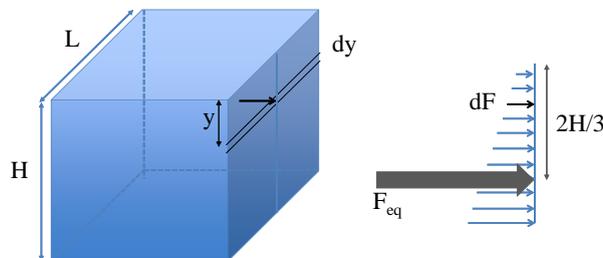


Figura 15.5: Obtención de la fuerza equivalente realizada por el agua sobre la pared lateral vertical indicada. Se muestra la línea de acción de la fuerza.

Dado que la presión hidrostática aumenta con la profundidad, la fuerza que se ejerce sobre los elementos (se han elegido tiras horizontales) dependerá de la posición de estos. Consideremos el elemento de longitud L y altura dy , situado a una profundidad y por debajo de la superficie del agua. A esa profundidad, la presión ejercida por el agua será $p(y) = \rho g y$, con ρ la densidad del agua. Escribamos ahora la expresión de la fuerza sobre ese elemento como:

$$dF = p(y)Ldy = \rho g y L dy \quad (15.11)$$

Esa fuerza es perpendicular al elemento, de forma que para calcular la fuerza tota equivalente habrá que “sumar” todas las contribuciones, es decir, integraremos la expresión anterior entre 0 y H .

$$F_{eq} = \int_0^H \rho g y L dy = \rho g L \int_0^H y dy = \rho g L \left[\frac{H^2}{2} \right] = \frac{\rho g L H^2}{2} \quad (15.12)$$

Para determinar la línea de acción de F_{eq} , tendremos en cuenta que el momento resultante (suma de los momentos) de las fuerzas dF que se ejercen sobre los elementos debe ser igual al momento de la fuerza equivalente. Si denotamos como Y_{CF} la profundidad a la que se encuentra la línea de acción, debe cumplirse:

$$Y_{CF} F_{eq} = \int_0^H y dF \quad (15.13)$$

Sustituyendo el valor obtenido para F_{eq} y resolviendo la integral del segundo miembro, se tiene:

$$\frac{\rho g L H^2}{2} Y_{CF} = \int_0^H \rho g y L y dy = \rho g L \int_0^H y^2 dy = \rho g L \frac{H^3}{3} \quad (15.14)$$

De donde directamente puede despejarse que

$$Y_{CF} = \frac{2}{3} H \quad (15.15)$$

15.3. Fuerza de empuje. Principio de Arquímedes

Cuando un objeto se sumerge en un fluido, experimenta una fuerza de empuje (o simplemente empuje), vertical y hacia arriba igual al peso del volumen de fluido desplazado por el objeto. Supongamos un fluido de densidad ρ_f en equilibrio y consideremos un volumen V de forma arbitraria. En la figura 15.5 se muestra un esquema.

Sabemos que el fluido ejercerá una fuerza en cada punto perpendicular a la superficie. Evidentemente, ese volumen tiene que estar en equilibrio, por lo que la resultante de las fuerzas ejercidas por el resto del fluido tiene que ser vertical e igual en módulo ($p = \rho_f V g$) y de signo opuesto a su peso ($p = \rho_f V g$). Esa fuerza neta, $\vec{F}_E = \rho_f V g \hat{j}$ es el **empuje**.

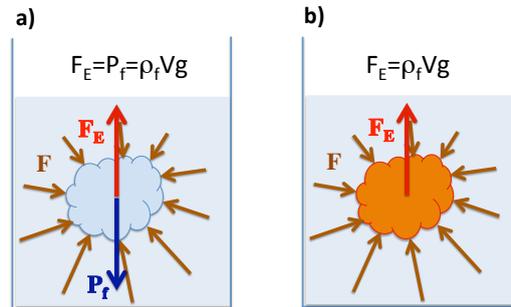


Figura 15.6: (a) Porción de un fluido en equilibrio, bajo la acción de su propio peso y la fuerzas ejercidas por el resto del fluido. La resultante de esas fuerzas es el empuje. (b) Situación análoga, donde se muestra un objeto en la misma posición que la porción de fluido mencionada, sometido por tanto a las mismas fuerzas ejercidas por el fluido.

Si en lugar de una porción de fluido consideramos un objeto de igual forma, (figura 15.5b)) evidentemente va a estar sometido a la misma fuerza resultante, vertical y hacia arriba y de módulo $\rho_f Vg$. Esa fuerza depende únicamente del volumen, siendo independiente de la posición en que se encuentre el objeto.

El empuje es la fuerza que permite que los objetos floten en un líquido, manteniendo una parte de su volumen sumergido. Fijémonos en la figura 15.6, donde se muestra un objeto, de densidad ρ_c y volumen V , sumergido parcialmente (“flotando”) en un fluido de densidad ρ_f . En la situación de equilibrio, el peso del objeto flotante debe ser igual al empuje:

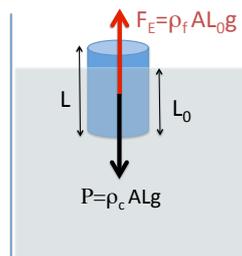


Figura 15.7: Diagrama de fuerzas sobre un objeto flotando en un fluido.

$$\rho_c V g = \rho_f V_s g \quad (15.16)$$

donde V_s es el volumen sumergido del objeto. Si el objeto tiene una sección A y longitud total L , y la porción sumergida tiene una longitud L_0 , se tiene que:

$$\rho_c L = \rho_f L_0 \Rightarrow L_0 = \frac{\rho_c L}{\rho_f} \quad (15.17)$$

Evidentemente, la flotación solo puede ocurrir para objetos menos densos que el líquido.

Capítulo 16

DINÁMICA DE FLUIDOS

En este capítulo nos ocuparemos de los fluidos en movimiento. En general, esta disciplina trata sistemas muy complejos cuya descripción mediante leyes matemáticas no resulta sencilla en absoluto. Dado que aquí sólo se pretende dar una aproximación elemental al problema, lo abordaremos únicamente bajo ciertas aproximaciones. No obstante, la descripción que se hace es suficiente para comprender una serie de fenómenos de interés, básicamente relacionados con problemas en instalaciones hidráulicas como sería la presión requerida para elevar un fluido por una tubería contra la acción de la fuerza gravitatoria, o calcular las variaciones de presión en el interior de un conducto cuando este cambia de sección.

16.1. *Conceptos previos*

A continuación estableceremos las definiciones y aproximaciones bajo las que planteamos estos apuntes la dinámica de fluidos.

- Se trabajará en principio con **fluidos ideales**, es decir, incompresibles y sin rozamiento interno (viscosidad nula). Los líquidos y los gases sometidos a pequeñas variaciones de presión pueden considerarse bastante bien bajo esta hipótesis.
- Consideraremos **flujo estacionario**. Esto quiere decir que en el fluido en movimiento, cada elemento del mismo se mueve con una velocidad que puede depender de la posición que ocupa dicho elemento (dentro de la tubería por la que discurre), pero no depende del instante de tiempo

en el que pasa por ese lugar. En particular, esto significa que una vez que un elemento de fluido haya pasado por un punto determinado, los que le siguen lo hacen a la misma velocidad. Entonces, podemos definir la *trayectoria* seguida por los elementos de fluido e identificarla con una línea dentro del fluido (*línea de corriente*). Esto se indica en la figura 16.1

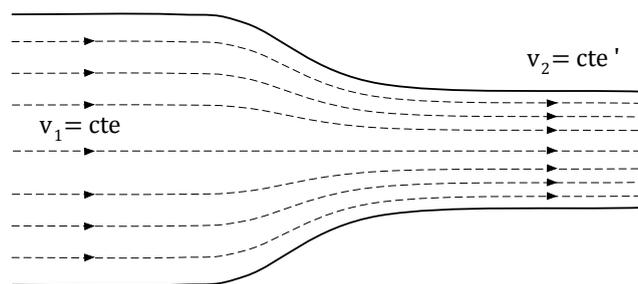


Figura 16.1: Esquema del flujo estacionario de fluido a lo largo de una tubería de sección variable.

Si consideramos un elemento de superficie dentro del fluido en movimiento y las *líneas de corriente* que pasan por su perímetro (ver figura 16.2), queda definido un volumen separado idealmente del resto del fluido, que vamos a denominar “tubo de flujo”. En efecto, tal como se han definido las líneas de corriente, dos de ellas nunca pueden cortarse, ya que eso significaría que hay un punto (su intersección) en el cual ¡el elemento de fluido posee dos velocidades diferentes! Por tanto, el fluido que discurre por el interior de un tubo de flujo nunca se mezcla con el de otros.

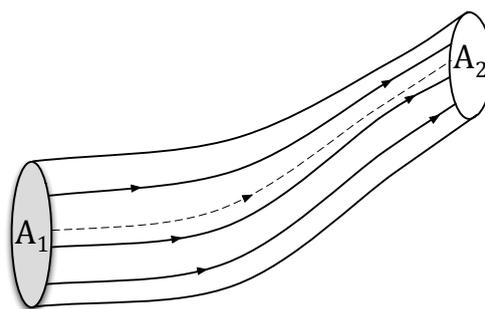


Figura 16.2: Esquema de un “tubo de flujo” en el interior de un fluido en movimiento.

16.2. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad es una de las dos expresiones básicas que vamos a utilizar en los problemas de dinámica de fluidos. Físicamente, su significado es sencillamente el de la *ley de conservación de la materia*. Para un fluido incompresible y en condiciones estacionarias, explícitamente indica que la cantidad de fluido que penetra en una tubería en todo instante debe igualar a la que sale por el otro extremo para que la masa de fluido en la tubería permanezca constante. Esto se muestra de modo gráfico en la figura 16.3. Nótese que si la densidad del fluido ρ_0 permanece constante, la cantidad de materia que atravesará una sección diferencial dA es la que está contenida en un pequeño cilindro de longitud $v dt$, es decir $dM = \rho_0 dA v dt$ (detalle en la figura 16.3). Si podemos suponer que los puntos de interés (zonas A_1 y A_2 en nuestro esquema) son tales que el vector velocidad es uniforme, esto se expresa mediante la condición

$$\rho_0 A_1 v_1 dt = \rho_0 A_2 v_2 dt \quad \Rightarrow \quad A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (16.1)$$

lo cual permite entender, por ejemplo, que en los estrechamientos de las tuberías aumente la velocidad del fluido.¹ A la magnitud Av se la denomina “caudal” del fluido. Suele denotarse como Q y en el sistema internacional (SI=MKS) se mide en m^3/s .

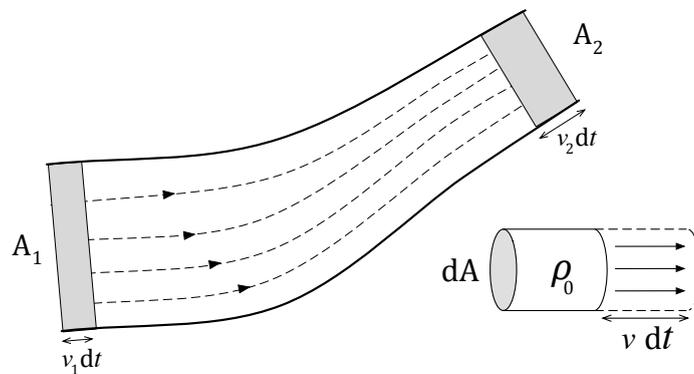


Figura 16.3: Variación de velocidad en el fluido que circula a lo largo de una tubería de sección variable (corte longitudinal).

¹Un fenómeno cotidiano que se explica mediante esta ecuación es el “estrechamiento” del chorro de agua que cae de un grifo abierto. Invitamos al lector a que lo cuantifique para las dimensiones típicas del fregadero de su casa.

16.3. Ecuación de Bernouilli

Según hemos visto en la sección anterior, cuando un fluido se mueve a lo largo de un tubo de sección variable su velocidad experimenta cambios. Por tanto, podemos decir que hay aceleración y, si esto ocurre, ineludiblemente existe una fuerza neta responsable. Las variaciones de las fuerzas de presión interna en el fluido, que cada elemento ejerce sobre los que le rodean, tienen como resultado la existencia de una fuerza neta. A esto debemos añadir, como sabemos por lo estudiado en el capítulo anterior, la influencia de las variaciones asociadas a la altura, por acción de la gravedad. La ecuación de Bernouilli, que vamos a obtener a continuación, es la que precisamente nos dará una relación cuantitativa entre las variaciones de presión, velocidad y altura dentro del fluido en movimiento.

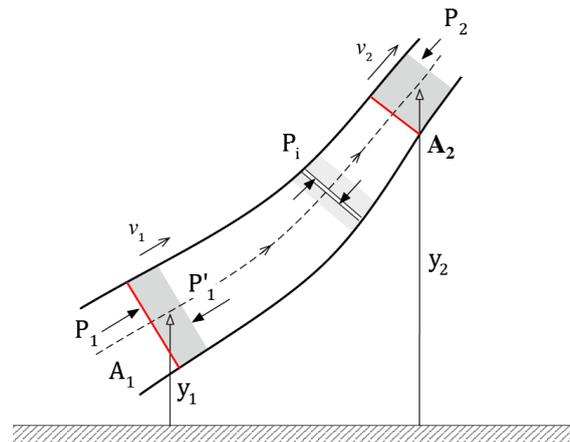


Figura 16.4: Representación del movimiento de un fluido con los parámetros energéticos relevantes.

En realidad, la ecuación de Bernouilli se obtiene como una expresión del teorema de variación de la energía para un tubo de flujo. En la figura 16.4 presentamos el esquema para su deducción. Consideremos una porción del tubo, limitada por dos secciones A_1 y A_2 . Nótese que la presión (P), velocidad (v) y altura (y) son diferentes en 1 y 2. Supongamos que en un intervalo de tiempo dt entra a través de la sección A_1 una cierta cantidad de fluido, indicada con el área sombreada. Llamaremos dV al volumen de esa región sombreada, que puede expresarse como $dV = A_1 v_1 dt$. En ese mismo intervalo de tiempo una

cantidad igual de fluido saldrá a través de A_2 . De hecho, cualquier sección del tubo se ve atravesada en ese dt por el mismo dV . Puede calcularse el trabajo dW realizado en ese dt sobre el fluido comprendido entre 1 y 2. Las únicas fuerzas (aparte de la gravedad) que están actuando son las debidas al resto del fluido, que pueden escribirse en función de la presión ejercida sobre las secciones 1 y 2.

$$dW = P_1 A_1 v_1 dt - P_2 A_2 v_2 dt = (P_1 - P_2) dV$$

Por otra parte, vamos a escribir la variación de energía correspondiente al volumen de fluido dV cuando consideramos las posiciones extremas 1 y 2.

$$dE = \frac{1}{2}(\rho_0 dV)(v_2^2 - v_1^2) + (\rho_0 dV)g(y_2 - y_1)$$

Dado que $dW = dE \Rightarrow$

$$P_1 + \rho_0 g y_1 + \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2 = P_2 + \rho_0 g y_2 + \frac{1}{2} \rho_0 v_2^2 \quad (16.2)$$

ecuación que relaciona dos puntos cualesquiera del fluido en movimiento, y que podremos utilizar para despejar unas variables en función de otras en las aplicaciones subsiguientes. Lo veremos mediante los ejemplos de la siguiente sección.

16.4. Aplicaciones

16.4.1. Teorema de Torricelli

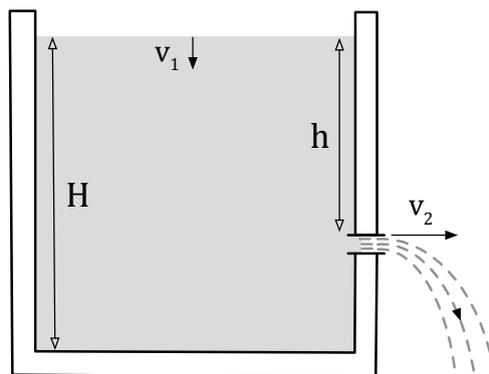


Figura 16.5: Vaciado de un recipiente abierto a través de un “pequeño” orificio.

En este caso, vamos a obtener la velocidad de salida del líquido contenido en un recipiente abierto a la atmósfera. Lo obtendremos por aplicación de la ecuación de Bernoulli, y bajo la hipótesis de que el orificio sea de sección despreciable frente a la que presenta la superficie libre de líquido. La figura 16.5 muestra los parámetros básicos del problema. Elegimos como puntos 1 y 2 para aplicar la expresión 16.2 la superficie libre y el exterior del orificio, respectivamente. De este modo $P_1 = P_2 = P_{atm}$. Por otro lado, al ser $A_1 \gg A_2$, la ecuación de continuidad implica que se cumpla $v_1 \ll v_2$ y, por tanto, despreciaremos v_1 frente a v_2 . En definitiva, tenemos

$$\rho_0 g H \approx \rho_0 g (H - h) + \frac{1}{2} \rho_0 v_2^2 \Rightarrow v_2 \approx \sqrt{2gh}$$

resultado que se conoce como “Teorema de Torricelli”. Nótese que una vez obtenido el valor de v_2 podríamos estudiar propiedades adicionales como la forma de la trayectoria del chorro emergente de fluido, que viene descrito por las ecuaciones de la dinámica de una partícula en presencia de la gravedad. Se trata simplemente de un tiro parabólico del que conocemos las condiciones iniciales.

16.4.2. Efecto Venturi

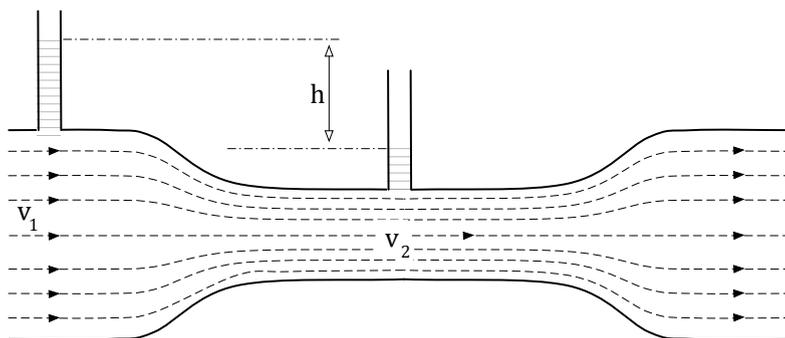


Figura 16.6: Medidor de velocidad basado en el efecto Venturi.

Por último, estudiaremos este conocido efecto, en el que se basan algunos instrumentos que se utilizan para medir velocidades y caudales de fluidos en movimiento. El esquema básico de esta aplicación se muestra en la figura 16.6 y está basado en un estrechamiento que determina un aumento de la velocidad del fluido (dada la ecuación de continuidad). La consiguiente disminución de la presión (según la ecuación de Bernoulli) puede registrarse mediante la variación de altura en una columna estática, y de ello deducirse la velocidad de interés si conocemos la sección del tubo, tanto en la zona original como en el

estrechamiento. Concretamente, las ecuaciones a utilizar serían las siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho_0(v_2^2 - v_1^2) \\ P_1 - P_2 = \rho_0gh \end{array} \right\} \frac{1}{2}\rho_0(v_2^2 - v_1^2) = \rho_0gh$$

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

Se propone como ejercicio obtener el valor de v_1 y el de v_2 suponiendo conocida la altura h y las secciones A_1 y A_2 .

Parte VII

ADDENDA

GLOSARIO

Para facilitar la lectura de estos apuntes, se incluye a continuación la lista de símbolos y abreviaturas más usados en el texto. Este glosario es de uso común para todos los volúmenes de la serie.

■ ALFABETO GRIEGO

Mayúsculas	Minúsculas	Nombre	Letra latina
A	α	Alfa	A
B	β	Beta	B
Γ	γ	Gamma	G (ga, gue,...)
Δ	δ	Delta	D
E	ϵ, ε	Épsilon	E (breve)
Z	ζ	Dseta	DS
H	η	Eta	E (larga)
Θ	θ	Zeta	Z (za, ce,...)
I	ι	Iota	I
K	κ	Kappa	K (ka, que,...)
Λ	λ	Lambda	L
M	μ	Mu	M
N	ν	Nu	N
Ξ	ξ	Xi	X (ks)
O	\omicron	Ómicron	O (breve)
Π	π	Pi	P
P	ρ	Rho	R
Σ	σ	Sigma	S
T	τ	Tau	T
Y	υ	Ípsilon	U francesa
Φ	ϕ, φ	Fi	F
X	χ	Ji	J
Ψ	ψ	Psi	PS
Ω	ω	Omega	O (larga)

- **A**

\vec{a} . Vector aceleración de una partícula.

\vec{A}_{CM} . Aceleración del Centro de Masas.

A. Amperio, unidad de corriente eléctrica del Sistema Internacional.

A. Amplitud de oscilación.

$d\vec{A}$. Vector superficie.

\mathcal{A} . Superficie completa de integración.

- **B**

$\vec{\mathcal{B}}$. Vector inducción del campo magnético.

- **C**

C. Capacidad.

CM. Centro de Masas.

CG. Centro de Gravedad.

C. Circuito de corriente.

\mathcal{C} . Circuito de integración.

- **D**

δ . Desfase que da la posición inicial en una oscilación.

$\vec{\mathcal{D}}$. Vector desplazamiento eléctrico.

$\delta\mathcal{V}$. Variación del potencial electrostático al pasar de un punto a otro.

$d\mathcal{V}$. Contribución al potencial por un elemento de carga dQ .

Δx . Incremento finito de la variable (o función) x

$d\vec{\ell}$. En magnetostática, elemento de circuito que lleva corriente.

$d\vec{\ell}$. En magnetostática, elemento de contorno al integrar $\vec{\mathcal{B}}$

- **E**

E. Energía mecánica.

$\vec{\mathcal{E}}$. Vector campo eléctrico.

\mathcal{E}_{MF} . Fuerza electromotriz.

ϵ_0 . Permeabilidad eléctrica del vacío.

ϵ . Permeabilidad eléctrica de un dieléctrico.

ϵ_r . Permeabilidad eléctrica relativa.

■ **F**

\vec{F} . Vector fuerza.

\vec{F}_v . Vector fuerza de rozamiento viscoso.

\vec{F}_a . Fuerza de amortiguamiento.

Φ . Flujo del campo eléctrico.

Φ_B . Flujo del campo magnético.

Fig(s). Figura(s)

■ **G**

\vec{g} . Aceleración de la gravedad.

G . Constante de gravitación universal.

■ **H**

\vec{H} . Vector campo magnético.

Hz. Unidad de frecuencia (ciclos / segundo).

■ **I**

\hat{i} . Vector unitario del eje X en un sistema de coordenadas cartesiano.

I. Momento de inercia o corriente eléctrica.

\vec{L} . Impulso lineal.

■ **J**

\hat{j} . Vector unitario del eje Y en un sistema de coordenadas cartesiano.

\vec{J} . Densidad volúmica de corriente eléctrica.

J. Julio, unidad de energía del Sistema Internacional.

\vec{J} . Impulso angular.

■ **K**

\hat{k} . Vector unitario del eje Z en un sistema de coordenadas cartesiano.

k . Constante elástica del muelle.

\vec{K} . Densidad superficial de corriente eléctrica.

kg. Kilogramo, unidad de masa del Sistema Internacional.

■ **L**

\vec{l} . Momento angular de una partícula.

\vec{L} . Momento angular de un sistema de partículas.

■ M

μ_0 . Permeabilidad del vacío.

μ . Coeficiente de rozamiento.

μ_d . Coeficiente de rozamiento dinámico.

μ_e . Coeficiente de rozamiento estático.

μ_r . Coeficiente de rozamiento de rodadura.

m. Metro, unidad de longitud del Sistema Internacional.

m . Masa de una partícula.

M . Masa de un sistema de partículas.

m_i . Masa inercial.

m_g . Masa gravitatoria.

MAS. Movimiento armónico simple.

■ N

ν . Frecuencia de oscilación.

n . Portadores de carga por unidad de volumen.

N . Suele utilizarse como valor final de un índice en sumatorios, por ejemplo, al calcular la media indica el número de medidas.

\vec{N} . Normal, reacción del plano en que se apoya un cuerpo.

■ O

ω . Frecuencia angular.

Ω . Ohmio, unidad de resistencia.

■ P

Pág(s). Página(s).

\vec{p} . Momento lineal de una partícula.

\vec{P} . Momento lineal del sistema de partículas (o de la partícula CM).

\vec{P} . Peso.

\mathcal{P} . Potencia.

■ Q

q . Carga eléctrica.

Q . Carga eléctrica.

■ R

$\hat{\rho}$. Vector unitario en un sistema de coordenadas polares.

\vec{r} . Vector posición de una partícula.

R . Radio de circunferencia.

\vec{R} . Fuerza de ligadura o de reacción.

\vec{R} . Vector posición del Centro de Masas.

■ S

$d\vec{S}$. Vector superficie.

S . Superficie completa de integración.

σ_{n-1} . Desviación típica.

$\sigma_{\bar{x}}$. Error cuadrático medio.

s. Segundo, unidad de tiempo del Sistema Internacional.

Sol. Solución.

■ T

t . Variable tiempo.

T_i . Energía cinética de una partícula.

T . Energía cinética de un sistema de partículas.

\vec{T} . Tensión.

τ . Momento de una fuerza.

\mathcal{T} . Período.

■ U

\hat{u}_N . Vector unitario normal (coordenadas intrínsecas).

\hat{u}_T . Vector unitario tangencial (coordenadas intrínsecas).

\mathcal{U} . Energía potencial.

■ V

\vec{v} . Vector velocidad de una partícula.

\vec{V} . Velocidad del Centro de Masas.

\vec{v}_m . Vector velocidad media.

\mathcal{V} . Potencial electrostático.

η . Viscosidad.

■ W

$\vec{\omega}$. Velocidad angular.

ω_o . Frecuencia angular de oscilación.

W . Trabajo.

■ X

\bar{x} . Media aritmética de la variable x .

■ Z

$\hat{\theta}$. Vector unitario en un sistema de coordenadas polares.