JEAN BOURGAIN, MEDALLA FIELDS.

Jesús Bastero y Luis Vega

En el Congreso Internacional de los Matemáticos, celebrado en Zurich del 3 al 11 de agosto de 1994, una de las medallas Fields correspondientes a esa edición fue concedida al analista Jean Bourgain.

Nacido en Ostende (Bélgica) en 1954, fue estudiante de la Universidad Libre de Bruselas y defendió su Tesis Doctoral en 1977 sobre teoría descriptiva de conjuntos y sus aplicaciones a los espacios de Banach, bajo la dirección de F. Delbaen.

Desde su primera publicación, aparecida en los Proceedings de la A.M.S. (1976) cuando contaba 22 años de edad y que ya llamó la atención de los especialistas en geometría de los espacios de Banach, Jean Bourgain no ha cesado en su múltiple producción. En sus más de 200 artículos publicados ha demostrado una enorme potencia analítica, tocando temas centrales del Análisis Matemático y resolviendo problemas que estaban sin solución desde hacía mucho tiempo.

Bourgain es un analista completo. Sus trabajos abarcan temas tan dispares como: geometría de los espacios de Banach, convexidad en dimensión alta, análisis armónico, teoría de números, funciones analíticas, teoría del potencial, teoría geométrica de la medida, teoría ergódica, ecuaciones en derivadas parciales no lineales y física matemática. Hay que destacar su potencia en el uso de los métodos probabilísticos y combinatorios, las técnicas de cubrimientos, las descomposiciones ajustadas de funciones, etc. Domina perfectamente las herramientas más complejas y cuando se introduce en un tema llega rápidamente a su núcleo fundamental, por lo que puede trabajar en diferentes problemas al mismo nivel que los mejores especialistas. Bourgain es capaz de abordar las dificultades e ir más allá, apoyándose en su habilidad, destreza para manejar argumentos y profundidad. Al haberse concentrado en resolver problemas que hasta ese momento permanecían abiertos, tiene muchos colaboradores internacionales de investigación, en general, primeras firmas en los campos correspondientes. En resumen, es como un deportista de élite que fuera capaz de jugar al máximo nivel en la NBA y al mismo tiempo en el master de la ATP o pilotar un fórmula 1.

En septiembre de 1995, Jean Bourgain fue investido Doctor Honoris Causa en la Universidad Marne-la-Vallée (París). Bernard Maurey, uno de los más importantes especialistas en espacios de Banach, fue el encargado de su presentación. En el correspondiente discurso de introducción relató la siguiente metáfora (de la que ofrecemos una adaptación libre), que revela cómo incluso para los grandes expertos la profundidad del pensamiento de Bourgain es sorprendente:

(...)

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Yo soy un cerrajero muy afamado en mi barrio. Cuando algún vecino tiene un problema con alguna cerradura que no se abre, me llama y habitualmente no hay puerta que se resista.

Sin embargo, un día me llamaron para abrir una puerta muy complicada. A pesar de que dispongo de un artilugio especial que coloco en las llaves para las situaciones difíciles, aquella puerta era diferente. Después de varios intentos conseguí que la llave entrara, aunque no giraba.

Detrás de mi, observando lo que hacía, estaba un joven belga que al ver mis esfuerzos infructuosos, dijo:

- Déjame un momento, Bernard.

Me aparté para hacerle sitio y cogiendo mi instrumental abrió la puerta en un momento. Aunque estuve mirando atentamente y vi perfectamente sus manipulaciones, no pude entender lo que hizo. Por ello le pregunté:

- ¿Cómo lo has hecho, Jean?

y me contestó

- No es nada difícil. Lo que pasa es que tú estás un poco "viejo" para esto, Bernard.

(. . .)

Comentarios a la obra de Jean Bourgain

Si se quiere hacer un estudio profundo de las aportaciones de Bourgain es necesario contar con el asesoramiento de expertos en cada una de las materias correspondientes.

Por la imposibilidad de ofrecer un comentario detallado de todas las trabajos de Jean Bourgain nos vemos obligados a centrarnos solamente en algunos de sus artículos, los más cercanos a nuestro respectivo campo de especialización. Hemos elegido, para comentar con detalle, algunos de ellos, que pensamos pueden ofrecer una idea de la variedad y dificultad de los problemas resueltos, del gran abanico comprendido por sus temas de investigación, de su potencia de cálculo y de sus enormes recursos analíticos.

Como complemento (en particular para trabajos fundamentales como [1], [8], [11], [18]) es recomendable la lectura de otros artículos sobre la obra de J. Bourgain, por ejemplo el de Luis Caffarelli "*The Work of Jean Bourgain*" publicado en los Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zurich 94, Birkhäuser Verlag (1995), el de Joram Lindenstrauss aparecido en los Notices de la A.M.S. 41 (9) de 1994, dentro del trabajo "*Fields Medals and Nevanlinna Prize Presented at ICM-94 in Zürich*" y, fundamentalmente, el aparecido en la Gazette des Mathématiciens 63, Janvier 1995, "*DOSSIERS. Médaille Fields 1994. Jean Bourgain*", que es donde mejor se describen todos los temas abordados y resultados obtenidos por Bourgain hasta 1995.

a) Las aportaciones de Bourgain a la geometría de los espacios de Banach han sido muy numerosas y profundas.

Relacionadas con la teoría de la convexidad y con la teoría local de los espacios de Banach (teoría acerca del comportamiento asintótico de los espacios normados de dimensión finita), queremos comentar los trabajos [7], [9] y [10].

Un zonotopo en $\mathbb{R}^n$ es un politopo cuyas caras tienen un centro de simetría, o equivalentemente, un conjunto convexo que puede expresarse como suma de un número finito de segmentos. Un zonoide es el límite, en el sentido de la métrica de Hausdorff, de una sucesión de zonotopos. Por ejemplo, cualquier bola unidad cerrada de una norma en $\mathbb{R}^2$ es un zonoide, sin embargo, para $n \geq 3$ la bola unidad cerrada de la norma p es un zonoide si y solamente si $p \geq 2$. El problema que se trata en [9] y [10] es: dado $\epsilon > 0$ y dado un zonoide B en $\mathbb{R}^n$, ¿cuál es el menor número $N = N(B, \epsilon)$ que se necesita para que la distancia de Hausdorff entre B y algún zonotopo, que sea suma de N segmentos, sea menor que ϵ?

Si $B = B^n$ es la bola euclidea, no es difícil ver que $N \leq \exp(C(\epsilon)n)$, donde $C(\epsilon)$ es una constante que depende sólo de ϵ. En 1986, Figiel, Lindenstrauss y Milman probaron que para este caso se tenía $N \leq C(\epsilon)n$, siendo este resultado, por otra parte, óptimo.

En [10] se demuestra que, sorprendentemente, casi el mismo resultado es cierto para todo zonoide, es decir, $N = C(\epsilon, \delta)n$ es válido para todo zonoide que sea bola unidad de una norma uniformemente convexa (δ es un parámetro que mide el grado de la convexidad uniforme de B) y, en general,

$$N = c(\tau)\epsilon^{-(2+\tau)}n(\log n)^3$$

vale para todo zonoide y cualquiera que sea $\tau > 0$.

Las herramientas utilizadas en la demostración son las de la teoría local en espacios de Banach. En efecto, dado que para un conjunto convexo, compacto, simétrico (respecto al origen) y del que el origen es un punto interior, la función de Minkowski (o calibre) es una norma, el problema anterior puede transformarse en el siguiente: dado un subespacio n-dimensional X de L^1, ¿para qué valores de N puede ser X incluido $(1+\epsilon)$-isométricamente en ℓ_1^N? Las técnicas probabilísticas y combinatorias son el útil de trabajo fundamental. Se hace especial uso del método de la distribución empírica, especialmente "troceado e iterado" al estilo Bourgain, así como de teoremas especiales de factorización refinados y estimaciones de entropía para subconjuntos de L^1 con respecto de la norma $\| \cdot \|_\infty$.

Si ahora fijamos n en el problema anterior y nos preocupamos de la dependencia de N con respecto a ε, este problema puede ser expresado de la siguiente forma: ¿cuántas direcciones $(y_i)_{i=1}^N \subset S^{n-1}$ (frontera de la bola euclídea) son necesarias para determinar el área de un cuerpo convexo B (con un error menor que ε), conociendo los volúmenes $n-1$ dimensionales de las proyecciones ortogonales de B sobre los hiperplanos ortogonales a los $(y_i)_{i=1}^N$? La determinación de estos puntos es un problema de encontrar una buena distribución de puntos en la superficie S^{n-1}.

En [10] también se prueba, usando armónicos esféricos, que para la bola euclídea B^n se tiene una acotación inferior de la forma

$$N(B^n, \varepsilon) \geq c_n \varepsilon^{2(1-n)/n+2}$$

si $0 < \varepsilon < 1$, siendo c_n una constante que depende sólo de n. Asimismo se obtiene que

$$N(B^n, \varepsilon) \leq c_n \varepsilon^{2(1-n)/(n+2)} |\log \varepsilon|^{-(1-n)/(n+2)}$$

si $0 < \varepsilon < 1/2$. Para cuerpos convexos generales se obtiene una estimación superior análoga

$$N(B, \varepsilon) \leq c_n \varepsilon^{a(n)} |\log \varepsilon|^{b(n)}$$

que, en el caso de ser $n \geq 4$, tiene el mismo exponente para ε que el que aparece para la bola euclídea.

En [7] se trata uno de los problemas clásicos de la teoría de la convexidad. Si B es una bola en $\mathbb{R}^n$ se define

$$s(B) = (\mathrm{vol}(B)\mathrm{vol}(B^\circ))^{1/n},$$

donde B° es el polar de B definido por

$$B^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n; \langle x, y\rangle \leq 1, \forall x \in B\}.$$

Blaschke para $n = 2, 3$ (1916, 1923) y Santaló para todo n (1949) demostraron que $s(B) \leq s(B^n)$, (B^n es la bola euclídea). Estudiando la desigualdad inversa, Mahler (1939) probó que $s(B) \geq (4^n(n!)^{-2})^{1/n}$ y conjeturó que

$$s(B) \geq (4^n(n!)^{-1})^{1/n}.$$

Esta desigualdad ha sido probada, por ejemplo, para zonoides, aunque el problema sigue abierto en la actualidad. En el trabajo que ahora comentamos se prueba que

$$s(B) \geq cs(B_2^n)$$

donde c es una constante absoluta y dado que $s(B_2^n) \sim (4^n(n!)^{-1})^{1/n}$, salvo constantes numéricas, obtenemos que la conjetura de Mahler es cierta. Los métodos utilizados pasan por las herramientas de la teoría local combinados con ingeniosos argumentos de iteración. En concreto se hace un uso intensivo de la desigualdad isoperimétrica en la superficie esférica, el método de los espacios aleatorios, las proyecciones de Rademacher, etc. También en [7] se hacen aplicaciones a la geometría de los números, a la teoría de los volúmenes mixtos y al análisis armónico.

Otros trabajos de Bourgain sobre geometría de los espacios de Banach, que son de importancia capital por los resultados obtenidos y por sus aplicaciones serían [6] y [2].

En [6] se demuestra que toda matriz cuadrada contiene submatrices de tamaño bastante grande (proporcional a la matriz dada, con una constante independiente de la dimensión) que poseen una inversa con norma, como operador entre $\mathbb{R}^n$ con las normas p, no muy grande. Las construcciones son probabilísticas y combinatorias y se aplican a la teoría de los espacios de Banach, a la teoría de operadores y al análisis armónico.

En [2] Bourgain resuelve varias cuestiones de A. Pelczynski. En particular, en esta obra seminal prueba que el espacio L^1/H_0^1 tiene cotipo 2 y verifica la propiedad de Grothendieck, es decir, que todos los operadores del álgebra disco en el espacio ℓ^1 son 2-sumantes (con H_0^1 se representa el espacio de las funciones integrables en la circunferencia unidad que tienen coeficientes de Fourier nulos, para todo entero $n \leq 0$). De este resultado se dan dos demostraciones, basadas en un finísimo lema de descomposición para funciones medibles positivas sobre la circunferencia unidad. En particular, como consecuencia se deduce que el álgebra del disco y del polidisco no son isomorfas y se obtienen nuevas propiedades sobre la estructura local del álgebra disco y H^∞. Asimismo se obtienen nuevos hechos sobre las sucesiones de Carleson en el disco unidad. Por último, Bourgain extiende los resultados sobre estructura a las subálgebras cerradas de L^∞ sobre el círculo unidad que contengan H^∞, resolviendo de forma positiva una cuestión abierta de N. Varopuolos sobre álgebras tensoriales proyectivas. De aquí ha surgido el concepto de "álgebras de Bourgain", introducidas por Cima y Timoney:

Si A es un álgebra de Banach y X es un subespacio de A, el álgebra de Bourgain de X en A es el conjunto de los vectores x en A para los cuales siempre que una sucesión x_n converja debilmente a cero en X, la distancia de xx_n a X converge a cero.

El álgebra de Bourgain es una subálgebra cerrada de A que contiene a X.

b) Las aportaciones de Bourgain al Análisis Armónico son profundas. Empecemos con [12]. Un subconjunto de los enteros Γ es un conjunto de Sidon si para todo polinomio trigonométrico, con frecuencias sólo en Γ, la norma en L^∞ y la correspondiente norma en ℓ^1 de los coeficientes son equivalentes con una constante independiente del polinomio. Rudin llamó conjuntos $\Lambda(p)$ a aquellos subconjuntos de los enteros para los cuales la equivalencia de normas es cierta para todo $r < p$, es decir, un subconjunto de Γ es un $\Lambda(p)$ $(1 < p < \infty)$, si para todo $1 < r < p$, existe una constante $A_{r,p}$ tal que $\|f\|_p \le A_{r,p}\|f\|_r$, para todo polinomio con coeficientes en Γ.

Todo conjunto de Sidon es un $\Lambda(p)$, para todo $p < \infty$, pero el recíproco es falso como probó Rudin. Un resultado positivo en esta dirección fue encontrado por Pisier, usando métodos de la geometría de los espacios de Banach: Si $\|f\|_p \le B\sqrt{p}\|f\|_2$, para todo $p > 2$ y para todo polinomio con coeficientes en Γ, entonces Γ es un conjunto de Sidon.

Rudin probó que hay conjuntos que son $\Lambda(4)$ y no son $\Lambda(p)$, para ningún $p > 4$ y el mismo resultado es cierto para todo entero par mayor o igual que 4.

El caso general es mucho más complicado y era un problema abierto muy conocido por los especialistas en análisis armónico, combinatoria y teoría de números.

Bourgain resolvió este problema en [12] y, según él mismo comenta, es el problema más difícil que ha resuelto (cf. Rudin, *The way I remember it.* History of Mathematics vol. 12, AMS 1997, pag. 178). Su resultado es:

Si $p > 2$, hay un conjunto $\Lambda(p)$ que no es $\Lambda(q)$ para ningún $q > p$.

La demostración de Bourgain utiliza el "método de los selectores", método aleatorio que él introduce y emplea también en la solución de otros problemas. Gracias a este recurso y a su especial habilidad consigue probar en un "tour de force" que, dado cualquier sistema ortonormal acotado $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ y para cualquier $p > 2$, existe una subfamilia S con cardinal grande (mayor que $n^{2/p}$) para la cual se puede estimar la norma p y obtener la desigualdad inversa

$$\|\sum_{\varphi_i\in S} a_i\varphi_i\|_p \le C(p)\|\sum_{\varphi_i\in S} a_i\varphi_i\|_2$$

siendo $C(p)$ una constante que depende sólo de p. A continuación, la geometría del espacio L^p (para $p > 2$) y el teorema de Littlewood-Paley dan la solución del problema que, por otra parte, puede ser formulado en contextos más generales.

Uno de sus trabajos más célebres en Análisis Armónico es [3]. En dicho artículo demuestra que las medias circulares de una función f, tal que $|f|^p$ es localmente integrable con $p > 2$ (esta condición es necesaria),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\omega|=1} f(x-\omega t)\,d\omega$$

tienden a f para casi todo x cuando t tiende a cero. El problema en dimensión mayor que dos había sido resuelto por E. Stein en 1976. En este caso $p > d/(d-1)$ siendo d la dimensión ($p < 2$ por tanto), y se pueden utilizar técnicas de L^2 que fallan en el plano. Así, mientras Stein puede reducir el problema a otro más sencillo usando la transformada de Fourier, Bourgain trabaja directamente en las variables físicas utilizando herramientas de geometría elemental.

En [4,5] Bourgain obtiene estimaciones independientes de la dimensión para el operador maximal de Hardy-Littlewood que, como es bien sabido, cuantifica, entre otras cosas, el teorema de diferenciación de Lebesgue. Cuando la diferenciación se hace sobre bolas centradas estas estimaciones habían sido probadas por E. Stein. Bourgain prueba que si B es un cuerpo convexo, simétrico respecto del origen, y

$$f_B^*(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{vol(rB)} \int_{rB} |f(x+t)|\, dt,$$

entonces

$$\|f_B^*\|_p \leq c(p)\|f\|_p \qquad si \quad p > 3/2,$$

donde la constante $c(p)$ es independiente de la dimensión y de B. El lema clave en este caso consiste en probar que existe una transformación lineal T tal que la transformada de Fourier de la función característica de $T(B)$ tiene las acotaciones adecuadas. Por ejemplo que decae en el infinito como el inverso de la distancia al origen, siendo universal la constante involucrada.

Recientemente, ver [23], Bourgain ha resuelto un problema clásico en series de Fourier que se remonta a Riemann. Supongamos que tenemos una serie de Fourier en d dimensiones tal que sus truncadas esféricas (i.e. se suman sólo los términos cuyas frecuencias tienen módulo menor que una cierta cantidad R), tienden a cero en todo punto x. Se trata de probar que los coeficientes de la serie son todos nulos. En dimensión uno el problema lo resolvió Riemann. De hecho no hace falta suponer la convergencia en todo x. Surge aquí la cuestión de los conjuntos de unicidad y el nombre de Cantor. En el plano la solución es de Cooke, un alumno de Zygmund. El punto de partida de Bourgain son unos trabajos de Shapiro y Connes en los que utilizan técnicas de categoría de Baire y de teoría del potencial. La obstrucción es de nuevo que las técnicas L^2 no bastan.

A finales de los 80 y primeros 90, Bourgain publicó una serie de trabajos, [13,14,22] , sobre un problema crucial del Análisis de Fourier con profundas implicaciones en ecuaciones en derivadas parciales y en el problema clásico de sumación de la integral de Fourier. El punto de partida es una observación de E. Stein hacia el año 1967: "Existe un $p = p(d) > 1$ tal que la transformada de Fourier de cualquier función de $L^p(\mathbb{R}^d)$ tiene sentido restringirla a la esfera unidad, y de hecho es una función localmente integrable de la esfera". El resultado es trivial si $p = 1$ y falso si $p = 2$ porque el teorema de Plancherel asegura que la transformada de Fourier es una isometría en L^2 y por tanto no tiene sentido hablar de su valor en conjuntos de medida nula. Por otro lado si se cambia la esfera por una superficie cualquiera que contenga un trozo de un hiperplano, es fácil ver usando el teorema de Fubini que el resultado es también falso. El problema consiste en determinar cómo de grande puede ser $p(d)$.

Gracias a los trabajos de E. Stein y de P. Tomas la "teoría L^2" del problema fue básicamente resuelta hacia 1975. La "teoría L^p" está muy lejos todavía de ser entendida, excepto en el plano, donde el exponente crítico $p(2)$ es $4/3$ que tiene por exponente dual 4. Por tanto se puede aplicar el truco

$$\int |f|^4 \, dx = \int |ff|^2 \, dx = \int |\hat{f} * \hat{f}|^2 \, d\xi,$$

donde $\hat{f}$ indica la transformada de Fourier y $*$ la convolución. Gracias a esta idea, C. Fefferman y E. Stein resolvieron, alrededor de 1970, la cuestión de la restricción en el plano. Posteriormente C. Fefferman (1971) estableció una conexión entre este problema y otro de teoría geométrica de la medida que se remonta a Besicovitch, Kakeya y Nikodym: "Supongamos un conjunto del espacio euclídeo d-dimensional que contenga una recta en todas las direcciones. Se trata de saber cómo de pequeño puede ser en términos de la dimensión de Hausdorff". En el plano fue resuelto en 1974 por A. Córdoba (el conjunto tiene que tener dimensión dos). Por último, existe otra vertiente del problema de restricción en términos de integrales oscilatorias y que en el plano fue resuelta por L. Carleson y P. Sjolin (1972). L. Hörmander (1973) propuso una conjetura en esta vertiente para dimensiones mayores. Una de las aportaciones de Bourgain ha sido probar que dicha conjetura es falsa.

Con respecto a las otras dos cuestiones, Bourgain ha avanzado en la dirección trazada por Fefferman y Córdoba abriendo nuevas vías que todavía no se han agotado. En particular ha introducido nuevos espacios de funciones que parecen medir bien la cancelación inherente a ambas cuestiones. Estos espacios no gozan de una teoría "buena" de interpolación, lo que les hace muy difíciles de manejar. Es ante este tipo de dificultades donde se ve la tremenda capacidad analítica de Bourgain. Intentar entender porqué da los pasos que da y en el orden en que lo hace, suele ser muy enriquecedor.

c) Finalmente comentaremos algunos de los trabajos de Bourgain en ecuaciones en derivadas parciales no lineales. En 1991 se celebró en Princeton una conferencia en la que participó Bourgain, para celebrar el 60 cumpleaños de E. Stein. En ella C. Kenig expuso los trabajos que había realizado en colaboración con G. Ponce y L. Vega en los últimos años, sobre el problema de Cauchy en la recta real asociado a la ecuación de Korteweg-de Vries y sus generalizaciones ($u_t + u_{xxx} + u^p u_x = 0$, $p = 1, 2, ...$). Una pieza fundamental en su análisis la constituían ciertas variaciones sobre los teoremas de restricción de la transformada de Fourier que hemos mencionado anteriormente. Estos resultados eran completamente falsos en el caso periódico. Seis meses más tarde, Bourgain había dado un paso de gigante en este contexto, ver [17]. Su idea es introducir unos nuevos espacios de funciones en los que hacer la iteración de Picard. Estos espacios se construyen a partir de la transformada de Fourier como los clásicos de Sobolev, pero donde el peso habitual ($|\xi|$) ha de ser sustituido por otro que refleje el operador lineal asociado ($\partial_t + \partial_{xxx}$). El símbolo de este último es $(\tau - \xi^3)$ y se anula a lo largo de una curva, con lo que la interacción no lineal ($u^p u_x$) es más complicada de analizar. Gracias a la gran estructura de la ecuación ambos términos se acoplan perfectamente (i.e., una aritmética elemental hace que los términos malos desaparezcan). Estos espacios resultan ser también muy útiles en el caso de la recta real si $p = 1$. Esto le permite probar, utilizando trabajos previos de Lax, Novikov y

McKean-Trubowitz, la casi-periodicidad en el tiempo de las soluciones para datos en L^2.

Se pueden dar definiciones análogas de estos espacios en el caso de la ecuación no lineal de Schrödinger, NLS, $(iu_t + \Delta u \pm |u|^p u = 0)$ y otras ecuaciones ilustres como la de Kadomtsev-Petviashvili. En el caso de NLS el tratamiento de la interacción no lineal es más sutil. Bourgain, [15,16] , utiliza entonces herramientas clásicas como el método del círculo de Hardy-Littlewood o las acotaciones conocidas sobre el número de representaciones de un entero como suma de dos cuadrados. Esta conexión plantea nuevos e interesantes problemas. Por ejemplo sobre el crecimiento de las constantes $\Lambda(4)$ de la sucesión de los cuadrados o sobre estimaciones d-dimensionales de las sumas de Weyl (los resultados que se obtienen por los métodos anteriores para $d \geq 3$ son muy débiles).

Desde entonces la producción de Bourgain en esta área de las ecuaciones en derivadas parciales ha sido ingente. Ha desarrollado técnicas nuevas en unos casos o abierto nuevas posibilidades en el uso de otras ya conocidas.

Así, en una serie de trabajos, ver por ejemplo [19,24], se dedica al estudio del comportamiento asintótico de la solución cuando no hay leyes de conservación disponibles. En particular, tiene que construir la solución globalmente en el tiempo, ya que sólo se disponía de una teoría local al tratarse del caso crítico en L^2 de NLS $(p = 4/d)$. Esto lo hace utilizando métodos de mecánica estadística, en concreto una medida de Gibbs renormalizada, resolviendo la ecuación (i.e. construyendo el flujo) para todo dato contenido en el soporte de dicha medida de Gibbs. Demuestra ademas la invarianza del flujo respecto de la medida.

En otra serie de artículos, ver por ejemplo [20,21], utiliza una adaptación de la tecnología KAM de mecánica clásica al caso de un espacio de fases infinito dimensional desarrollada por S. Kuksin, para construir soluciones *quasi*-periódicas tanto para NLS como para el caso de la ecuación clásica de ondas no lineal en dominios acotados. Ante las limitaciones del método, por ejemplo cuando las condiciones de frontera son periódicas, responde con una variación de unas técnicas desarrolladas por W. Craig y C. Wayne, lo que le lleva a su vez a estudiar un problema de divisores pequeños.

También cabe destacar el método que utiliza para obtener estimaciones sobre el crecimiento de la norma H^s (es el espacio de Sobolev de las funciones con s derivadas en L^2) para tiempos grandes. La situación habitual es que sólo se disponga de dos leyes de conservación, las correspondientes a L^2 y H^1. Esto da un crecimiento exponencial en el tiempo si $s > 1$. En [25], Bourgain prueba que de hecho se puede obtener un crecimiento polinomial y que en algunos casos éste es óptimo.

En [26] desarrolla un método que podríamos llamar de interpolación no lineal. Dado que las leyes de conservación habituales son las dichas anteriormente, cuando se tiene un resultado local para un exponente intermedio, en principio, no se puede concluir un resultado global en el tiempo para datos en el mismo espacio. Este es el caso de la ecuación NLS con $p = 2$, $d = 2$ y $s > 0$. Bourgain prueba que si $s > 3/5$ se puede afirmar lo anterior.

Recientemente ha obtenido, ver [27], un resultado sobre existencia global en la ecuación NLS crítica y repulsiva (i.e. signo negativo) para datos con energía finita y radiales. Se puede considerar este último como un primer paso en este problema, que es una de las cuestiones fundamentales en esta parcela de las Matemáticas.

Bibliografía seleccionada

[1] Con F. Delbaen, *A class of special $\mathcal{L}^\infty$ spaces*, Acta Math **145** (1980), 155–176.

[2] *New Banach space properties of the disc algebra and H^∞*, Acta Math **152** (1984), 1–48.

[3] *Averages in the plane over convex surfaces and maximal operators*, J. Analyse Math. **47** (1985), 69–85.

[4] *On the L^p-bounds for maximal functions associated to convex bodies*, Israel J. Math **54** (1986), 257–265.

[5] *On high-dimensional maximal functions associated to convex bodies*, Amer. J. Math **108** (1986), 1467–1476.

[6] Con L. Tzafriri, *Invertibility of "large" submatrices with applications to the geometry of Banach spaces*, Israel J. Math **57** (1987), 137–224.

[7] Con V. Milman, *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in $\mathbb{R}^n$*, Invent. Math. **88** (1987), 319–340.

[8] *On the Hausdorff dimension of harmonic measure theory in higher dimensions*, Invent. Math. **87** (1987), 477–483.

[9] Con J. Lindenstrauss, *Distribution of points on spheres and approximation by zonotopes*, Israel J. Math **64** (1988), 25–31.

[10] Con J. Lindenstrauss y V. Milman, *Approximation of zonoids by zonotopes*, Acta Math. **162** (1989), 73–141.

[11] *Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets*, IHES Publ. Math. **69** (1989), 3–45.

[12] *Bounded orthogonal systems and the $\Lambda(p)$ set problem*, Acta Math. **162** (1989), 227–245.

[13] *Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) **1** (1991), 144–187.

[14] *L^p estimates for oscillatory integrals in several variables*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) **1** (1991), 321-347.

[15] *Exponential sums and nonlinear Schrödinger equations*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) **3** (1993), 157–178.

[16] *Restriction phenomena for lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations I, Schrödinger equations*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) **3** (1993), 107–156.

[17] *Restriction phenomena for lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations II, KdV-equation*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) **3** (1993), 209–262.

[18] *On the radial variation of bounded analytic functions on the disc*, Duke Math. J. **69** (1993), 671–682.

[19] *Periodic nonlinear Schrödinger equations and invariant measures*, Comm. in Math. Phy. **166** (1994), 1–26.

[20] Construction of quasi-periodic solutions for Hamiltonian perturbations of linear equations and applications to nonlinear PDE, Internat. Math. Resear. Notic. (IMRN) (1994), 475–495.

[21] *Aspects of long time behaviour of solutions of nonlinear Hamiltonian evolution equations*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) **5** (1995), 105–140.

[22] *Estimates for cone multipliers*, Operator Theory: Advances and Applications **77** (1995), 41–60.

[23] Spherical summation and uniqueness of multiple trigonometric series, Internat. Math. Resear. Notic. (IMRN) **3** (1996), 93–107.

[24] *Invariant measures for the $2D$-defocusing nonlinear Schrödinger equation*, Comm. in Math. Phy. **176** (1996), 421–445.

[25] On the growth in time of higher Sobolev norms of smooth solutions of Hamiltonian PDE, Internat. Math. Resear. Notic. (IMRN) (1996), 277–304.

[26] Refinements of Strichartz's inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity, Internat. Math. Resear. Notic. (IMRN) (1998).

[27] *Global wellposedness of defocusing 3D critical NLS in the radial case*, Aparecerá en J. of the Amer. Math. Soc..