

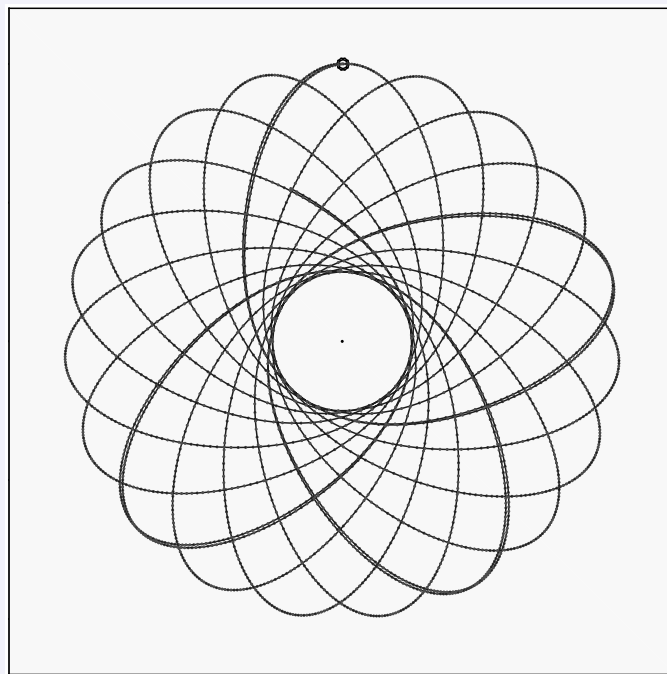
# Apuntes de FÍSICA 2

(grado en Estudios en Arquitectura)

Volumen 2 de la serie:  
MANUALES DE FISICA GENERAL

por  
B. VILLACAMPA & A. BADIA

Departamento de Física de la Materia Condensada,  
Universidad de Zaragoza (España)





---

GRADO EN ESTUDIOS EN ARQUITECTURA: **FÍSICA 2**

---

## Colección de Manuales de Física General

### Vol. 2

*Esta colección recoge una serie de textos de Física General desarrollados como material de apoyo para nuestros alumnos de varias titulaciones científico-técnicas en la Universidad de Zaragoza.*

**Apuntes de la asignatura Física 2**  
**Primera edición**  
**Zaragoza, 2019**

Autores:

Belén Villacampa Naverac y Antonio Badía Majós



**Departamento de**  
**Física de la**  
**Materia Condensada**  
**Universidad Zaragoza**

VILLACAMPA NAVERAC, M Belén & BADÍA MAJÓS, Antonio  
“APUNTES FÍSICA 2’  
PRIMERA EDICIÓN ZARAGOZA, 2019

Este trabajo está licenciado bajo *Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License*.



El documento electrónico y las condiciones de uso pueden obtenerse en  
[http://personal.unizar.es/bvillaca/docencia/libros\\_docentes.html](http://personal.unizar.es/bvillaca/docencia/libros_docentes.html)

Acerca de los autores

<http://personal.unizar.es/bvillaca/index.html>

<http://personal.unizar.es/anabadia/index.html>

© 2019, M. Belén Villacampa Naverac

© 2019, Antonio Badía Majós







# Índice

PRÓLOGO	XIII
<b>I CALOR Y TEMPERATURA. TERMODINÁMICA</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>3</b>
<b>1. CALOR Y TEMPERATURA</b>	<b>5</b>
1.1. <i>Temperatura</i> . . . . .	5
1.1.1. <i>Temperatura y equilibrio térmico</i> . . . . .	5
1.1.2. <i>Medida de temperatura y escalas de temperatura</i> . . .	6
1.1.3. <i>Expansión térmica</i> . . . . .	7
1.1.4. <i>Esfuerzo térmico</i> . . . . .	9
1.2. <i>Calor</i> . . . . .	10
1.2.1. <i>Intercambios de calor. Capacidad calorífica y calor específico. Calor latente</i> . . . . .	10
1.3. <i>Mecanismos de transferencia de calor</i> . . . . .	12
1.3.1. <i>Transferencia de calor por conducción</i> . . . . .	12
1.3.2. <i>Transferencia de calor por convección</i> . . . . .	15
1.3.3. <i>Transferencia de calor por radiación</i> . . . . .	16
<b>2. PRINCIPIOS DE TERMODINÁMICA</b>	<b>19</b>
2.1. <i>Introducción</i> . . . . .	19
2.1.1. <i>Representación de los estados y procesos termodinámicos</i>	20
2.2. <i>Gas ideal. Ecuación de estado</i> . . . . .	21
2.2.1. <i>Energía de un gas ideal. Capacidades caloríficas.</i> . . .	21
2.3. <i>Primer principio de la termodinámica</i> . . . . .	23
2.3.1. <i>Procesos a volumen constante o isocoros</i> . . . . .	24
2.3.2. <i>Procesos a presión constante o isobaros</i> . . . . .	25
2.3.3. <i>Procesos a temperatura constante o isotermos</i> . . . . .	25
2.3.4. <i>Procesos adiabáticos</i> . . . . .	26
2.4. <i>Segundo principio de la termodinámica. Máquinas térmicas</i> .	27

<b>CONCLUSIONES I</b>	<b>33</b>
<b>II ELECTROSTÁTICA</b>	<b>35</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>37</b>
<b>3. CAMPO ELECTROSTÁTICO</b>	<b>39</b>
3.1. <i>Ley de Coulomb</i> . . . . .	39
3.2. <i>Campo electrostático. Líneas de campo</i> . . . . .	41
3.3. <i>Campo creado por distribuciones de carga. Principio de superposición</i> . . . . .	44
3.3.1. Distribuciones de carga continua . . . . .	44
3.3.2. Ejemplos de cálculo de $\vec{\mathcal{E}}$ por superposición. . . . .	47
<b>4. TEOREMA DE GAUSS</b>	<b>53</b>
4.1. <i>Flujo del campo eléctrico</i> . . . . .	53
4.1.1. Vector superficie . . . . .	54
4.1.2. Flujo del campo eléctrico . . . . .	54
4.2. <i>Teorema de Gauss</i> . . . . .	57
4.3. <i>Cálculo del campo eléctrico aplicando el Teorema de Gauss</i> .	58
4.3.1. Esfera de radio $a$ cargada uniformemente con densidad volúmica de carga $\rho_o$ . . . . .	58
4.3.2. Cilindro de radio $a$ y longitud infinita, uniformemente cargado . . . . .	61
4.3.3. Lámina plana infinita cargada con densidad $\sigma$ . . . . .	62
<b>5. POTENCIAL ELECTROSTÁTICO</b>	<b>65</b>
5.1. <i>Definición de potencial electrostático</i> . . . . .	65
5.2. <i>Ejemplos de cálculo del potencial</i> . . . . .	68
5.2.1. Mediante el principio de superposición . . . . .	68
5.2.2. Cálculo del potencial $\mathcal{V}$ a partir del campo $\vec{\mathcal{E}}$ . . . . .	69
5.3. <i>Superficies equipotenciales</i> . . . . .	70
5.4. <i>Relación entre <math>\vec{\mathcal{E}}</math> y <math>V</math></i> . . . . .	71
5.4.1. Gradiente del potencial . . . . .	71
5.4.2. Cálculo de $\vec{\mathcal{E}}$ a partir del potencial . . . . .	72
5.5. <i>Energía electrostática de una distribución</i> . . . . .	73
5.5.1. Definición . . . . .	73
<b>6. ELECTROSTÁTICA EN MATERIALES CONDUCTORES</b>	<b>77</b>
6.1. <i>Condiciones de equilibrio electrostático</i> . . . . .	77
6.1.1. Ejemplo: Campo electrostático y potencial en presencia de una esfera conductora. . . . .	79

6.1.2. Ejemplo: Conductores con cavidades . . . . .	80
6.2. Apantallamiento y conexión a tierra . . . . .	82
6.2.1. Apantallamiento . . . . .	83
6.2.2. Conductor conectado a tierra . . . . .	83
6.3. Capacidad. Concepto de condensador . . . . .	84
6.4. Densidad de energía electrostática . . . . .	88
<b>7. ELECTROSTÁTICA EN MATERIALES DIELECTRICOS</b>	<b>91</b>
7.1. Descripción básica de un dieléctrico . . . . .	91
7.2. Condensadores con dieléctrico . . . . .	94
<b>CONCLUSIONES II</b>	<b>97</b>
<b>III CORRIENTE ELÉCTRICA</b>	<b>99</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>101</b>
<b>8. CORRIENTE ELÉCTRICA. LEY DE OHM</b>	<b>103</b>
8.1. Corriente y densidad de corriente . . . . .	103
8.2. Ecuación de continuidad . . . . .	105
8.3. Ley de Ohm. Resistencia. Resistividad . . . . .	106
8.3.1. Forma microscópica de la Ley de Ohm . . . . .	108
8.4. Potencia disipada. Calor Joule . . . . .	110
8.5. Deducción de la ley de Ohm. Modelo microscópico . . . . .	111
<b>9. INTRODUCCIÓN</b>	
<b>A LA TEORÍA DE CIRCUITOS</b>	<b>115</b>
9.1. Generadores de tensión . . . . .	116
9.1.1. Fuerza electromotriz. Generadores reales. . . . .	117
9.2. Potencia en un circuito . . . . .	118
9.3. Leyes de Kirchhoff . . . . .	118
9.4. Transitorios en circuitos RC . . . . .	120
9.4.1. Procesos de carga y descarga en circuitos RC . . . . .	122
<b>CONCLUSIONES III</b>	<b>167</b>
<b>IV ONDAS</b>	<b>127</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>129</b>
<b>10. NATURALEZA DE LAS ONDAS</b>	<b>131</b>
10.1. Conceptos básicos . . . . .	131

10.2.	<i>Descripción matemática de una onda</i> . . . . .	132
10.2.1.	<i>Ecuación diferencial de ondas. Velocidad de onda</i> . . .	133
10.3.	<i>Ondas armónicas</i> . . . . .	135
10.4.	<i>Energía transmitida por las ondas armónicas</i> . . . . .	136
10.5.	<i>Ondas en dos y tres dimensiones</i> . . . . .	139
10.6.	<i>Fenómenos de superposición de ondas</i> . . . . .	143
10.6.1.	<i>Ondas estacionarias</i> . . . . .	143
10.6.2.	<i>Superposición de ondas coherentes: interferencias</i> . . . .	148
10.6.3.	<i>Batidos: superposición de ondas de frecuencias ligeramente diferentes</i> . . . . .	151
<b>11.</b>	<b>ONDAS SONORAS. INTENSIDAD DEL SONIDO. TONO Y TIMBRE.</b>	<b>155</b>
11.1.	<i>Naturaleza del sonido</i> . . . . .	155
11.2.	<i>Características del sonido: intensidad, tono y timbre</i> . . . . .	158
11.3.	<i>Interferencia de ondas sonoras. Ejemplo.</i> . . . . .	161
11.4.	<i>Absorción y atenuación del sonido</i> . . . . .	162
<b>CONCLUSIONES III</b>		<b>167</b>
<b>V</b>	<b>NATURALEZA Y PROPAGACIÓN DE LA LUZ. ÓPTICA.</b>	<b>169</b>
	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>171</b>
<b>12.</b>	<b>NATURALEZA Y PROPAGACIÓN DE LA LUZ. ÓPTICA</b>	<b>173</b>
12.1.	<i>Naturaleza de la luz. Ondas electromagnéticas.</i> . . . . .	173
12.2.	<i>Principio de Huygens.</i> . . . . .	174
12.3.	<i>Óptica Geométrica. Reflexión y refracción.</i> . . . . .	175
12.3.1.	<i>Leyes de reflexión y refracción</i> . . . . .	177
12.3.2.	<i>Reflexión interna total</i> . . . . .	178
12.4.	<i>Índice de refracción y aspectos ondulatorios. Dispersión.</i> . . . .	179
12.5.	<i>Polarización de la luz.</i> . . . . .	181
12.6.	<i>Interferencia de ondas luminosas.</i> . . . . .	185
<b>VI</b>	<b>ADDENDA</b>	<b>187</b>
	<b>GLOSARIO</b>	<b>189</b>

# PRÓLOGO

Al igual que los apuntes de la asignatura Física 1, este manual forma parte de una serie de textos concebidos como una herramienta de apoyo para los estudiantes de las asignaturas de Física de primer curso de universidad impartidas por los autores, haciéndose hincapié en aquellos capítulos y apartados que recojan los aspectos más relevantes para la formación de un futuro arquitecto.

El texto se ha estructurado en 4 partes, cada una con varios capítulos, dedicados al estudio (a nivel introductorio) de termodinámica, electricidad (electrostática y corriente eléctrica), movimiento ondulatorio y óptica. Al final se ha incluido igualmente un anexo que contiene un glosario con la notación utilizada en el manual así como el alfabeto griego, con el que el lector deberá familiarizarse.

El trabajo personal de los alumnos es una necesidad incuestionable. A lo largo del texto se encontrarán algunos ejercicios propuestos y sugerencias; así, cuando en un apartado se lee que un resultado dado “se puede comprobar”, es muy recomendable intentar completar el desarrollo. Dichas comprobaciones deben considerarse como ejercicios adicionales a los problemas propiamente dichos que se proponen en los distintos temas. Los problemas ayudan a asimilar los conocimientos previamente adquiridos: es indispensable asimilar los conceptos físicos expuestos en la parte teórica para desenvolverse en la realización de problemas prácticos. Las tutorías con el profesor son un gran aliado para aclarar las dudas que puedan surgir al revisar la materia explicada en clase.

Debe destacarse que, a pesar de que este manual pretende ser autoconsistente, en el sentido de que los contenidos se van apoyando en los que ya han sido introducidos, la idea básica en la redacción ha sido recopilar las notas correspondientes al curso para el que se ha destinado. Por tanto, no se trata tanto de material de estudio autodidacta como de material de apoyo para facilitar el seguimiento de la asignatura.

Los autores agradecen los comentarios y aportaciones de A. Fiasconaro en la revisión de esta edición.

Se desea hacer notar que a lo largo del texto se ha utilizado el género masculino para aligerar la lectura. Debe sobreentenderse “lector o lectora”, “alumno o alumna” cada vez que se lea “lector”, “alumno”.

Siendo conscientes de que un texto de estas características nunca puede darse por acabado, serán por supuesto bienvenidos los comentarios que ayuden a mejorarlo y corregir cualquier error.

Febrero 2019, Zaragoza - España.

Parte I

CALOR Y TEMPERATURA.  
TERMODINÁMICA





## INTRODUCCIÓN

No es raro que, en el lenguaje común, se usen indistintamente los términos **temperatura** y **calor**; sin embargo, en física tienen un significado muy distinto. En el primer capítulo de este bloque veremos cómo definir la temperatura y cómo los cambios de temperatura afectan las dimensiones de los objetos. Así mismo, se verá cómo el calor es una de las formas en que se puede transferir energía entre dos sistemas, causada por la diferencia de temperatura entre ambos, y estudiaremos diferentes mecanismos de transferencia de calor.

Una vez aclarados esos conceptos básicos, en el segundo capítulo nos centraremos en la termodinámica, que estudia las transformaciones de energía donde intervienen calor, trabajo mecánico y otros aspectos de la energía, así como la relación entre estas transformaciones y las propiedades de la materia. La termodinámica es una parte fundamental y sus aplicaciones aparecen en sistemas de los más variados, desde los motores y refrigeradores de uso cotidiano hasta la estructura de las estrellas, pasando por procesos bioquímicos fundamentales.



# Capítulo 1

## CALOR Y TEMPERATURA

En este bloque de la asignatura nos vamos a ocupar en general de los intercambios de energía entre sistemas físicos macroscópicos. Estos están formados por muchas partículas y no pueden estudiarse a partir del análisis del comportamiento individual de cada una de ellas. Comenzaremos en este primer capítulo por profundizar en los conceptos de calor y temperatura, para continuar en el siguiente con el estudio de las leyes de la termodinámica.

### 1.1. *Temperatura*

Aunque relacionados, los conceptos de calor y temperatura no deben confundirse; digamos de momento que el calor,  $Q$ , es una de las formas en que un sistema puede intercambiar energía con el exterior. En cuanto a la temperatura, aunque más adelante veremos que está directamente relacionada con la energía interna de los sistemas, nos centraremos de momento en su relación con las “sensaciones” de calor y frío, diciendo que nos proporciona una descripción cuantitativa de “como de caliente” está un sistema.

#### 1.1.1. *Temperatura y equilibrio térmico*

Cuando dos sistemas, A y B, inicialmente a distinta temperatura, entran en contacto, la temperatura más alta tiende a descender y la baja a subir, en un proceso que finaliza cuando se igualan, diciendo entonces que los sistemas

han alcanzado el **equilibrio térmico**; así, diremos que dos sistemas están en equilibrio térmico si y solo si están a la misma temperatura.

La considerada como *Ley cero de la termodinámica* postula que si dos cuerpos A y B, separados entre sí, están en equilibrio térmico con un tercero, C, también lo están entre sí. Esto hace posible que se pueda medir la temperatura de un cuerpo aprovechando su situación de equilibrio térmico con otros.<sup>1</sup>

### 1.1.2. Medida de temperatura y escalas de temperatura

Los diferentes sistemas de medición de la temperatura se basan en las variaciones de determinadas magnitudes físicas con la temperatura. Por ejemplo, los tradicionales termómetros de mercurio se basan en la dilatación térmica de este metal; hay otros sistemas basados en la dependencia de la resistencia eléctrica o de alguna propiedad óptica del material con la temperatura.



Termómetro para uso alimentario, que se basa en la variación de la resistencia eléctrica con la temperatura.



Termómetro para uso personal, flexible, basado en cristales líquidos.

Figura 1.1: Ejemplos de medidores de temperatura.

En el termómetro de la derecha de la figura 1.1 se muestra la temperatura de la persona, pudiéndose leer  $38^{\circ}\text{C}$  y  $100.4^{\circ}\text{F}$ . Esas medidas corresponden a

<sup>1</sup>Por ejemplo, cuando medimos nuestra temperatura corporal con un termómetro de mercurio, lo que se determina realmente es la temperatura del mercurio, que está en contacto con el vidrio que a su vez está en contacto con nuestro cuerpo.

dos escalas termométricas distintas: la escala Celsius (en grados centígrados) y la escala Fahrenheit. Ambas se definen en función de dos puntos de referencia, la fusión del hielo y la ebullición del agua. La escala Celsius asigna el 0 a la temperatura de fusión y el 100 a la de ebullición, y establece 100 divisiones (grados centígrados o °C) entre esos dos valores.<sup>1</sup>

Por otra parte, es evidente el interés de poder definir una escala de temperatura independiente de las propiedades de una sustancia determinada (como el agua en el caso anterior). Ese requisito lo satisface la escala absoluta o escala Kelvin, basada en la dependencia de la presión ( $p$ ) de los gases con la temperatura en procesos en que se mantiene el volumen ( $V$ ) constante.<sup>2</sup> El cero de esta escala se sitúa en la temperatura más baja que puede alcanzarse:  $0\text{ K} = -273,15\text{ °C}$  y las divisiones son iguales que en la escala Celsius, de forma que para obtener el valor de la temperatura absoluta  $T\text{ (K)} = T\text{ (°C)} + 273,15$ .

### 1.1.3. Expansión térmica

En general, los materiales se expanden al aumentar la temperatura. Experimentalmente se ha comprobado que la variación de longitud  $\Delta L$  experimentada por un objeto de longitud  $L_0$  es proporcional a la variación de temperatura  $\Delta T$  así como a la longitud inicial. Se tiene por lo tanto:

$$\Delta L = \alpha \Delta T L_0$$

donde la constante de proporcionalidad  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica lineal, que se expresa en  $K^{-1}$ . Teniendo eso en cuenta, la longitud del objeto en función de la temperatura puede expresarse como:

$$L(T) = L_0(1 + \alpha \Delta T) \quad (1.1)$$

Realmente, cuando se tiene un objeto tridimensional todas sus dimensiones (y por tanto su volumen) cambian con las variaciones de temperatura.<sup>3</sup> Si se tiene un cuerpo de volumen  $V_0$  como el de la figura 1.2, la variación de volumen que experimentará será:

$$\Delta V = \beta \Delta T V_0 \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Aunque no se vaya a utilizar en este curso, no está de más recordar que la escala Fahrenheit asigna  $32^\circ\text{F}$  a la temperatura de fusión del hielo y  $212^\circ\text{F}$  a la de ebullición del agua. Por tanto, la relación entre la temperatura en  $^\circ\text{F}$  y en  $^\circ\text{C}$  es:  $T\text{ (°C)} = (T\text{ (°F)} - 32) \times 100/180$

<sup>2</sup>Al disminuir la temperatura de un gas se observa una disminución lineal de la presión. Extrapolando para diferentes gases las rectas correspondientes ( $p$  frente a  $T$ ), se vio que el punto de corte con el eje horizontal (correspondiente al valor nulo de presión absoluta  $p=0$ ) coincidía: ese valor de temperatura es el 0 absoluto o 0 K.

<sup>3</sup>Nótese que cuando se tiene un objeto con un agujero y se aumenta su temperatura, aumenta el tamaño del agujero.

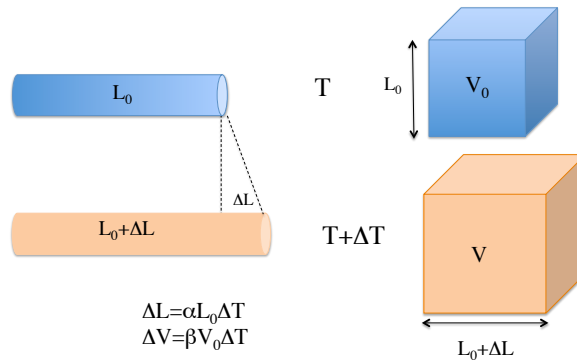


Figura 1.2: Expansión térmica de objetos lineales (unidimensionales) y tridimensionales. Nótese que no está representado a escala, siendo  $\Delta L$  muy pequeño comparado con  $L_0$ .

siendo  $\beta$  el coeficiente de expansión térmica de volumen.

Material	$\alpha(K^{-1})$	$\beta(K^{-1})$
Vidrio	$0,4-0,9 \times 10^{-5}$	$1,2-2,7 \times 10^{-5}$
Latón	$2,0 \times 10^{-5}$	$6,0 \times 10^{-5}$
Cuarzo <sup>4</sup>	$0,04 \times 10^{-5}$	-
Glicerina	-	$49 \times 10^{-5}$

Cuadro 1.1: Valores de los coeficientes de expansión térmica lineal y de volumen de algunos materiales.

Para ver la relación entre  $\alpha$  y  $\beta$  vamos a pensar en un cubo, de lado  $L_0$  y volumen  $V_0 = L_0^3$  a la temperatura  $T$ , como el de la figura 1.2. Si su temperatura varía en un  $\Delta T$ , su volumen pasará a ser  $V = L^3 = (L_0 + \Delta L)^3$ . Desarrollando esta expresión, es fácil ver que la variación de volumen  $\Delta V$  puede expresarse como:<sup>2</sup>

$$\Delta V = 3L^2\Delta L = 3L^2\alpha L_0\Delta T \quad (1.3)$$

donde se ha sustituido  $\Delta L$  por su expresión. Dado que las variaciones de

<sup>2</sup>Despreciando los términos que contengan  $(\Delta L)^2$  y  $(\Delta L)^3$  por ser  $\Delta L$  una cantidad pequeña.

longitud son pequeñas,  $L$  y  $L_0$  no son muy diferentes, por lo que se puede escribir:

$$\Delta V = 3\alpha L_0^3 \Delta T = 3\alpha V_0 \Delta T \quad (1.4)$$

y de la comparación con 1.2 se tiene  $\beta = 3\alpha$ . En la tabla anterior se dan algunos valores que ponen de manifiesto esta relación.

Se ha dicho al principio del apartado que en general los materiales se expanden al aumentar la temperatura. Hay una excepción muy importante: el agua, que cuando disminuye su temperatura por debajo de 4 °C hasta 0 °C se expande (el hielo es menos denso que el agua).

#### 1.1.4. Esfuerzo térmico

Se definen como esfuerzos térmicos (de tracción o compresión) aquellos a los que se ven sometidos los materiales cuando se impide que se expandan o contraigan libremente al variar su temperatura. Imaginemos una barra firmemente sujeta, de forma que sus extremos están totalmente fijos. Al aumentar (disminuir) su temperatura, tiende a aumentar (disminuir) su longitud. Al no estar permitido el cambio de tamaño, la barra queda sometida a un esfuerzo de compresión (tracción). Para evaluar el esfuerzo térmico cuando la temperatura de la barra varía  $\Delta T$ , vamos a considerar en primer lugar la deformación relativa que experimentaría si estuviera libre, teniendo en cuenta su coeficiente de expansión lineal  $\alpha$ .

$$\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{térmico}} = \alpha \Delta T \quad (1.5)$$

Por otra parte vamos a expresar, de acuerdo con la teoría de la elasticidad estudiada, cual sería el esfuerzo de tracción o compresión,  $\tau$ , necesario para producir una deformación de esa magnitud, teniendo en cuenta que el módulo de Young del material es  $Y$ :

$$\frac{F}{A} = \tau_{\text{tensión}} = Y \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1.6)$$

y por tanto

$$\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{tensión}} = \frac{\tau}{Y} \quad (1.7)$$

Como la barra no puede realmente variar de longitud, las deformaciones dadas por las expresiones 1.5 y 1.7 deben compensarse, de forma que:

$$\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{térmico}} + \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{tensión}} = 0 \Rightarrow \alpha \Delta T + \frac{\tau}{Y} = 0 \quad (1.8)$$

Y por tanto

$$\tau_{\text{térmico}} = -\alpha Y \Delta T \quad (1.9)$$

Si  $\Delta T$  es positivo se tendrá un esfuerzo de compresión mientras que si es negativo el esfuerzo será de tracción. Se propone como ejercicio evaluar el esfuerzo sobre una barra de latón de 1 m, encastrada entre dos paredes fijas, cuando su temperatura aumenta 100 °C.

## 1.2. Calor

Ya se ha dicho que el calor es una forma de intercambio de energía. Para medirlo es necesario servirse de algún proceso que refleje esa cantidad de energía intercambiada. Históricamente el calor mereció un tratamiento especial, incluso se consideraron unidades específicas, distintas de las utilizadas para la energía mecánica. Así, la caloría se definió como la cantidad de calor necesaria para elevar en un grado (de 14,5 °C a 15,5 °C, más concretamente) la temperatura de 1 gramo de agua. No obstante, es importante recordar que estamos hablando de energía, y que por tanto el calor puede expresarse indistintamente en calorías o en cualquier otra unidad de energía, siendo la equivalencia: 1 julio = 1 J = 0,239 cal.

### 1.2.1. Intercambios de calor. Capacidad calorífica y calor específico. Calor latente

La variación de temperatura que experimenta un sistema cuando se le aporta (o cuando cede) una cierta cantidad de calor,  $Q$ , depende de su capacidad calorífica,  $C$ . La capacidad calorífica se define como el calor intercambiado por unidad de cambio de temperatura y depende de la naturaleza y de la cantidad de la sustancia que constituye el sistema.

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \Rightarrow Q = C \Delta T \quad (1.10)$$



Es habitual utilizar una magnitud independiente de la cantidad de sustancia para expresar la relación entre  $Q$  y la variación de temperatura. Así, se habla de calor específico másico,  $c^m$ , que se mide en  $\text{cal.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$  o, en el SI, en  $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . También suele utilizarse el calor específico molar,  $c^n$ , expresado en  $\text{cal.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$  o, en el SI, en  $\text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . De acuerdo con esto, la relación anterior se puede expresar como:

$$Q = mc^m \Delta T = nc^n \Delta T \quad (1.11)$$

donde  $m$  y  $n$  representan la masa y el número de moles de la sustancia respectivamente.<sup>3</sup> Cuando se evalúa el calor intercambiado en procesos que afectan a gases utilizaremos, con carácter general, el calor específico molar (y no se utilizarán los superíndices para simplificar la notación). Para esos sistemas, dependiendo de las condiciones en que se realiza el intercambio de calor, hablaremos de calor específico a volumen constante  $c_V^n = c_V$  o de calor específico a presión constante  $c_p^n = c_p$ , siendo este mayor que el primero. Como se verá en el siguiente tema, el cociente  $c_p/c_V$  es el denominado coeficiente adiabático de los gases,  $\gamma$ .

Conviene incidir en un aspecto relacionado con la expresión 1.11, válida solo si el calor específico es independiente de la temperatura en el rango de interés, determinado por el  $\Delta T$  experimentado por la sustancia. En caso contrario, las expresiones correctas serían:

$$dQ = mc^m(T)dT = nc^n(T)dT \Rightarrow Q = m \int c^m(T)dT = n \int c^n(T)dT \quad (1.12)$$

siendo  $c(T)$  el calor específico dependiente de  $T$ .

Es importante recordar en este punto que no siempre un intercambio de calor se traduce en una variación de temperatura de los sistemas involucrados. Un ejemplo bien conocido lo constituyen los cambios de estado: así, la transición experimentada por el agua de su fase líquida a su fase vapor se realiza a la temperatura de  $100^\circ\text{C}$ . Igualmente, la fusión del hielo para dar agua líquida tiene lugar a  $0^\circ\text{C}$ . Si se tiene un recipiente con agua+hielo al que aportamos calor, se mantendrá a  $0^\circ$  mientras exista hielo por fundir. En este contexto se define el **calor latente** de una sustancia, denotado como  $L = c_L$ , como el calor que hay que aportar a un sistema (o que es cedido por el mismo) para que la unidad de masa experimente el cambio de estado. Así, el calor involucrado en

<sup>3</sup>El mol es la cantidad de materia que contiene un número de Avogadro  $N_A = 6,022 \times 10^{23}$  de partículas de la sustancia.

el cambio de estado de una cantidad de materia de masa  $m$  será:  $Q = mL$ . Evidentemente,  $L$  depende de la transición en concreto y así se tienen, por ejemplo,  $L_{fusión} = 3,34 \times 10^5$  J/kg o  $L_{vaporización} = 2,26 \times 10^6$  J/kg.

### 1.3. Mecanismos de transferencia de calor

El calor intercambiado entre dos sistemas puede transferirse mediante diversos mecanismos. Algunos de ellos requieren de la existencia de un medio material por el que “fluye” la energía. Dentro de estos, la transmisión de calor puede conllevar o no movimiento de materia. Pero la energía también puede transmitirse por el vacío. En general se consideran tres mecanismos fundamentales de transmisión de calor, que describiremos a continuación: conducción, convección y radiación. Mientras que en los dos primeros el calor fluye por un medio material, la radiación (ondas electromagnéticas) se propaga por el vacío.

#### 1.3.1. Transferencia de calor por conducción

Dado un sistema en el que existen zonas a distintas temperaturas, se produce un transporte de energía en el sentido que va desde la zona a mayor temperatura a la de menor. Ese flujo de energía está relacionado con la propagación de la agitación molecular (en gases o líquidos) o de las vibraciones de la red cristalina en un sólido. En el caso de los metales, los electrones juegan un papel fundamental en la conducción térmica.

En la figura 1.3 a) se muestra una lámina, de sección  $A$  y grosor  $\Delta X$ , que separa dos zonas a distinta temperatura,  $T_i$  y  $T_f$ . El calor transmitido por unidad de tiempo a través de la lámina, también denominado corriente de calor  $H$  ( $dQ/dt = H$ ), será proporcional a la sección y a la diferencia de temperatura por unidad de longitud ( $dT/dx$ =gradiente de temperatura). La constante de proporcionalidad es un coeficiente que depende del material: se trata de la **conductividad térmica**  $\kappa$ , que en el sistema internacional se expresa en  $W.m^{-1}.K^{-1}$ . La expresión de corriente de calor en función de los parámetros mencionados se conoce como la **ley de Fourier**:

$$\frac{dQ}{dt} = H = -\kappa A \frac{dT}{dx} \Rightarrow H = -\kappa A \frac{\Delta T}{\Delta X} \quad (1.13)$$

<sup>4</sup>Cuando la temperatura varía linealmente a lo largo del espesor del elemento es posible sustituir el gradiente  $\frac{dT}{dx}$  por  $\frac{\Delta T}{\Delta X}$

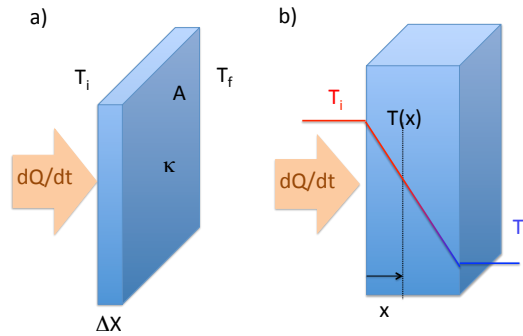


Figura 1.3: a) Representación esquemática de la conducción de calor a través de un elemento simple (lámina planoparalela), que separa dos zonas a temperaturas  $T_i$  y  $T_f$ . b) Esquema de la variación de temperatura a lo largo del espesor de una lámina.

Siendo  $\Delta T = T_f - T_i$ . El signo menos hace referencia a que el flujo de energía lleva el sentido en que decrece la temperatura.

A la corriente de calor por unidad de superficie se la denomina densidad de corriente de calor:

$$j = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta X} \quad (1.14)$$

Para dar una idea del orden de magnitud de la conductividad, indicamos a continuación la de algunos materiales, ordenados de mayor (buenos conductores térmicos) a menor (aislantes térmicos):

Material	$\kappa (W.m^{-1}.K^{-1})$
Aluminio	208
Vidrio	0,6
Madera	0,13
Aire	0,024
Espuma de poliuretano	0,02

Cuadro 1.2: Valores de conductividad térmica.

A partir de la expresión de la densidad de corriente de calor 1.14, es inmediato determinar cuál será la temperatura en un punto del interior de la lámina, a una distancia  $x$  del borde que está a  $T_i$  (ver figura 1.3 b):

$$T(x) = T_i - \frac{j}{\kappa} x \quad (1.15)$$

Para caracterizar el comportamiento como aislante de la lámina es habitual utilizar el valor de su **resistencia térmica**, definida como el cociente entre su espesor y la conductividad térmica del material:  $R_T = \Delta X/\kappa$ . Las unidades en que se expresa la resistencia térmica son  $W^{-1}.m^2.K$ . La ley de Fourier puede expresarse por tanto como:

$$\frac{dQ}{dt} = -A \frac{\Delta T}{R_T} \quad (1.16)$$

Pensando en problemas “reales”, la situación de la figura 1.3 a) corresponde a una idealización simple. Rara vez nos vamos a encontrar con elementos aislantes absolutamente homogéneos, caracterizados por un único valor de conductividad. En la figura 1.4 a) se muestra un esquema de una situación más realista, en la que la transferencia de calor se realiza a través de diversos elementos, cada uno de los cuales tiene sus propias dimensiones, conductividad, etc. Pensad por ejemplo en un recinto, a temperatura  $T_{int}$ , separado por paredes, ventanas, puertas de madera..., del exterior que está a una temperatura  $T_{ext}$ ; el calor que fluye entre el interior del recinto y el exterior se calcularía como la suma del que se transmite por las paredes, por las ventanas, por la puerta...

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{Total} = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dQ}{dt}\right)_2 + \dots \quad (1.17)$$

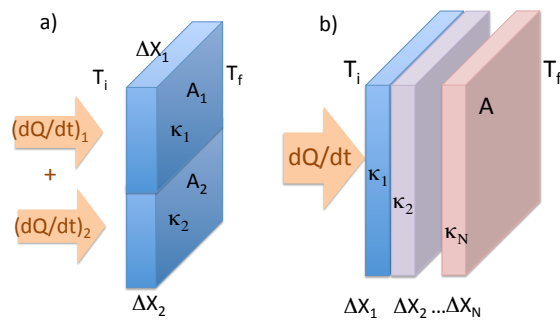


Figura 1.4: a) Representación esquemática de la conducción de calor cuando se tiene una asociación de elementos “en paralelo”. b) Representación esquemática de la conducción de calor a través de una serie de láminas apiladas.

Otra situación que nos encontraremos habitualmente se corresponde al apilamiento de varias láminas, cada una de ellas similares a la vista en 1.3 a), y

cuyo esquema se muestra en la figura 1.4 b). En este caso se puede definir una resistencia térmica total, característica del sistema “en serie”, igual a la suma de la resistencia de cada una de las láminas:

$$\frac{dQ}{dt} = -A \frac{\Delta T}{R_T^{total}}; \quad R_T^{total} = \sum R_T^i \quad (1.18)$$

Por otra parte, a la hora de evaluar la energía transferida a través de cualquier elemento, hay que considerar algunos efectos adicionales. Uno de los más importantes es el relacionado con las capas de aire en contacto con las superficies de los elementos, que tienen un efecto aislante. Son las denominadas capas de “aire muerto”. En el caso de una pared vertical, por ejemplo, la resistencia térmica de esas capas es de unos  $0,7 \text{ W}^{-1} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}$ .

### 1.3.2. Transferencia de calor por convección

En un proceso de convección la transferencia de calor se produce por movimiento de una masa de fluido de una región del espacio a otra. Puede distinguirse entre dos tipos de procesos:

- Convección libre. El movimiento de materia se debe a diferencias de densidad causadas por la expansión térmica (pensad por ejemplo en lo que ocurre con el aire caliente, que asciende, pasando a ocupar su lugar una masa de aire frío, que desciende)
- Convección forzada. El fluido circula impulsado por un ventilador o una bomba.

Los procesos de convección son en general complejos; nos fijaremos solo en unos cuantos hechos experimentales:

- La corriente de calor por convección es proporcional a la superficie de contacto (típicamente entre un objeto a elevada temperatura y el fluido circundante; pensad por ejemplo en los llamados “radiadores” de los sistemas tradicionales de calefacción, por los que circula agua caliente, y cuya forma garantiza que la superficie de contacto con el medio sea grande)
- La viscosidad de los fluidos frena la convección natural cerca de una superficie estacionaria. Ya hemos visto al hablar de conducción del efecto aislante de las capas de aire “pegadas”, por ejemplo, a una pared. En la

convección forzada esa capa es eliminada y aumenta la transferencia de calor. Eso permite entender por qué se siente más frío en un día ventoso que cuando el aire está en calma, siendo igual la temperatura.

- La corriente de calor por convección aumenta con la diferencia de temperatura entre la superficie y el fluido.

Sin entrar en más detalles, para evaluar la transferencia de calor por convección se utiliza por el momento la ecuación:

$$\frac{dQ}{dt} = -Ah(T_s - T_f) \quad (1.19)$$

donde  $h$  es el **coeficiente de transferencia de calor por convección**,  $A$  es el valor del área de contacto con el fluido,  $T_s$  la temperatura de la superficie y  $T_f$  la del fluido.<sup>5</sup>

### 1.3.3. Transferencia de calor por radiación

En este caso, la transferencia de calor se produce mediante la radiación electromagnética (EM). Cuando nos acercamos a una brasa, o “sentimos” el calor del sol, esa energía nos llega por radiación; aunque hubiera vacío entre los objetos radiantes y nosotros, la recibiríamos. Es interesante hacer hincapié en que no hay que confundir la luz reflejada por un objeto con la radiación que ese mismo objeto pueda emitir. Cuando la radiación incide sobre un objeto opaco, parte se refleja. Eso es lo que permite que lo veamos, debido a que percibimos la luz ambiental que se refleja en su superficie. Los objetos claros reflejan la mayor parte de la radiación y los oscuros absorben la mayor parte. Imaginemos un cuerpo que absorbiera toda la radiación que recibiera (y por tanto que no reflejase nada). Un sistema de esas características recibe el nombre de **cuerpo negro** y constituye un radiador ideal: aquel que absorbe toda la energía y emite la radiación característica de la temperatura a la que está. Es importante tener en cuenta que todos los cuerpos (no solo los cuerpos negros) emiten radiación EM. A la temperatura a la que están la mayoría de los objetos que nos rodean (temperatura ambiente o unas pocas decenas de grados por encima), la radiación emitida corresponde a la parte infrarroja (IR) del espectro, y no lo vemos.<sup>6</sup>

<sup>5</sup>Es complicado evaluar  $h$  ya que depende de la geometría de la superficie, de las condiciones termodinámicas del fluido, etc.; en general puede variar de punto a punto de la superficie. En los problemas que puedan plantearse en este curso, la utilización de valores promedio para este coeficiente (tabulados) nos permitirá un tratamiento aproximado.

<sup>6</sup>Evidentemente hay excepciones, como son el filamento de una bombilla encendida o la resistencia de un calefactor, por poner algún ejemplo cercano.

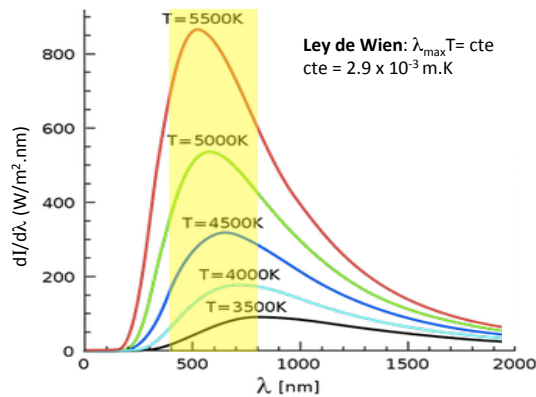


Figura 1.5: Representación de la intensidad radiada por un emisor a diferentes temperaturas. Puede observarse el desplazamiento del máximo de la emisión hacia longitudes de onda del rango visible al aumentar la temperatura del emisor.

Cuando la temperatura alcanza unos  $600^{\circ}C$ , aunque el máximo de radiación corresponde al infrarrojo, una pequeña cantidad de radiación se emite en la zona visible y el objeto se ve de color rojo. Si la temperatura sigue subiendo, el máximo de radiación continúa desplazándose hacia menores longitudes de onda, emitiéndose más luz visible. Al llegar a los  $1.000^{\circ} C$  vemos que la luz radiada es naranja. Si la temperatura alcanza los  $2500$  o  $3000^{\circ}C$  se tiene un objeto incandescente, que emite en todo el espectro pero con una parte muy importante en el rango visible. Cuando aumenta la temperatura del cuerpo radiante se tiene por tanto un desplazamiento del máximo de la radiación emitida hacia longitudes de onda más pequeñas. Por otra parte, la potencia radiada aumenta rápidamente con la temperatura, tal y como expresa la **Ley de Stefan – Boltzmann**, que relaciona la potencia radiada por el emisor con la temperatura absoluta elevada a la cuarta:

$$\frac{dQ}{dt} = Ae\sigma T^4 \tag{1.20}$$

En esa expresión:

- A es el área del cuerpo radiante y T la temperatura, expresada en K.
- e es la emisividad del objeto radiante, coeficiente numérico entre 0 y 1 que representa el cociente entre la radiación emitida por el cuerpo y la que emitiría una superficie igual de un radiante perfecto (cuerpo negro, con  $e=1$ ). La emisividad depende del material, de su acabado (más o menos pulido), de la temperatura, de la longitud de onda...
- $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann, con un valor  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$

En una situación real, a la hora de calcular el flujo neto de energía debido a este mecanismo, hay que tener en cuenta que los cuerpos emisores también absorben energía de la que están emitiendo los objetos de su entorno, de modo que para un radiador situado en un medio a temperatura  $T_0$ , se tendrá:

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{neto} = Ae\sigma(T^4 - T_0^4) \quad (1.21)$$



## Capítulo 2

# PRINCIPIOS DE TERMODINÁMICA

Tras haber revisado en el tema anterior los conceptos de calor y temperatura vamos a comenzar este, con la vista puesta en el estudio de los dos primeros principios de la termodinámica. Comenzaremos por introducir algunos conceptos y presentar algunas definiciones.

### 2.1. *Introducción*

En este tema se van a estudiar los intercambios de energía de **sistemas termodinámicos**. Un sistema termodinámico, formado por un número muy elevado de partículas (pero que se tratan como “un todo”), se caracterizará por una serie de propiedades macroscópicas que definirán el estado en que se encuentra. Las magnitudes que se utilizan para describir esas propiedades son las **variables termodinámicas**: (presión,  $p$ ; volumen,  $V$ ; temperatura,  $T$ ).

Las **funciones de estado** se definen como combinaciones de las variables de estado y parámetros del sistema. Reciben ese nombre porque su valor queda determinado por el estado en que se encuentra el sistema, independientemente de cómo ha llegado hasta él. Son funciones de estado la energía interna,  $U$ , la entalpía,  $H$  o la entropía,  $S$ .

Dependiendo de la naturaleza del sistema, es posible establecer relaciones sencillas entre las variables termodinámicas, que se expresan mediante las denominadas **ecuaciones de estado**, que caracterizan la situación de equilibrio del sistema.

Un sistema termodinámico, inicialmente en un estado “ $i$ ”, puede pasar a otro estado final “ $f$ ” mediante intercambios de energía con el exterior. Hablaremos de procesos cuasiestáticos cuando la transformación del sistema desde su estado inicial al final se realiza a través de una sucesión de estados intermedios

de equilibrio (en cada uno de los cuales es válida la ecuación de estado). Las condiciones en que se realizan las cesiones y absorciones de energía determinan el tipo de **procesos termodinámicos** a los que se ve sometido el gas, algunos de los cuales estudiaremos con detalle en la sección 2.3.

### 2.1.1. Representación de los estados y procesos termodinámicos

Hemos visto que el estado de un sistema termodinámico se define mediante los valores de las variables termodinámicas, que a su vez se relacionan por las ecuaciones de estado. Es muy común utilizar gráficas (**diagramas termodinámicos**), para representar los estados del sistema y los procesos mediante los que pasa de su estado inicial a otro. Existen distintos tipos de diagramas, dependiendo de las variables o funciones elegidas para la representación, siendo muy habituales los diagramas pV. En la figura 2.1 se muestran varios ejemplos, correspondientes a algunos de los procesos que estudiaremos más adelante. Pensemos que cada punto representa un estado, mientras que las líneas corresponden a procesos: se trazan a partir de la sucesión de puntos (=estados de equilibrio) por los que pasa el gas entre dos situaciones extremas. Así, en la figura se muestran dos procesos a T constante o isotermos, otro a volumen constante o isocoro y finalmente otro a presión constante o isobaro)

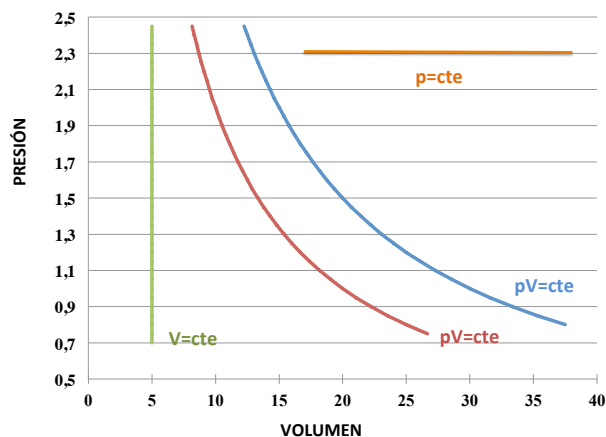


Figura 2.1: Diagrama pV donde se muestran diferentes tipos de procesos termodinámicos.

Se denominan procesos cíclicos a los definidos por una serie de transformaciones tras las que el gas vuelve al estado de partida. En un diagrama pV, un proceso cíclico se identifica como una línea cerrada.

## 2.2. Gas ideal. Ecuación de estado

Los sistemas termodinámicos pueden obedecer a distintas ecuaciones de estado. No obstante, el comportamiento de la mayoría de los gases en condiciones de baja presión y temperaturas no muy bajas, existiendo poca interacción entre sus moléculas, se ajusta al modelo de **gas ideal**. Vamos a centrarnos por el momento en los gases ideales, cuya ecuación característica es:

$$pV = nRT \quad (2.1)$$

que expresa la relación existente entre las variables p, V y T, y donde n representa el número de moles de gas y R es la constante de los gases (=número de Avogadro por la constante de Boltzmann):

$$R = N_A k_B = 0,08206 \text{ atm.l.mol}^{-1}.K^{-1} = 8,3145 \text{ J.mol}^{-1}.K^{-1} \quad (2.2)$$

### 2.2.1. Energía de un gas ideal. Capacidades caloríficas.

Se ha visto en el tema anterior que el calor es energía que se transfiere de un sistema a otro. Si se tiene un gas ideal en un estado de equilibrio, caracterizado por una cierta energía interna  $U^1$ , es posible modificar esa energía aportando (o retirando) calor al (del) sistema. De acuerdo con la teoría cinética de los gases, la energía del gas viene determinada por su temperatura, siendo la expresión que relaciona ambas magnitudes dependiente del número de átomos por molécula de gas. Para un gas ideal monoatómico (con 1 átomo por molécula), la energía es:

$$U = n \frac{3}{2} RT \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>La energía interna de un sistema sería la suma de las energías cinéticas de las partículas respecto al CM más la energía potencial asociada a las interacciones entre esas partículas. En general, la contribución de las interacciones entre partículas es importante en líquidos y sólidos, no en gases.

siendo análoga la expresión para los gases diatómicos (dos átomos por molécula, por ejemplo, el  $O_2$  o el  $N_2$ ), cambiando el factor  $3/2$  por  $5/2$ .

También se ha visto que el calor cedido o absorbido por un sistema se relacionaba con la variación de su temperatura mediante el calor específico.

$$dQ = nc^n(T)dT^2 \quad (2.4)$$

Si el calor específico  $c(T)$ , que en general depende de la temperatura, es constante en el intervalo de temperatura considerado, integrando la expresión anterior se tiene:

$$Q = nc\Delta T \quad (2.5)$$

Para un gas el valor de  $c$  va a depender de las condiciones en que se realizan los intercambios de energía con el exterior. No es lo mismo considerar procesos en los que el volumen de gas se mantiene constante que aquellos en los que no varía la presión. En lo que sigue, vamos a evaluar  $c_V$ , calor específico del gas ideal correspondiente a procesos en que la absorción o cesión de calor se realiza manteniendo el volumen constante.

Consideremos  $n$  moles de un gas ideal monoatómico, encerrado en un recipiente de volumen fijo. Cualquier aporte de calor al sistema se traducirá en un aumento de su energía interna, de forma que:

$$dQ = dU = n\frac{3}{2}RdT \quad (2.6)$$

A partir de esta expresión es inmediato obtener el valor de  $c_V$ :

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}R \quad (2.7)$$

Análogamente, se tiene que el valor del calor específico a volumen constante es  $c_V=5R/2$  para gases diatómicos.<sup>3</sup>

Si el aporte de calor a un sistema se realiza permitiendo que su volumen varíe, hay que tener en cuenta el trabajo mecánico que puede desarrollar el gas en su expansión, por lo que como se demostrará en la sección siguiente el calor específico será distinto (mayor) que el correspondiente a procesos realizados a volumen constante.

<sup>2</sup>En este tema, al mencionar los calores específicos de los gases nos referiremos siempre a las magnitudes molares, por lo que prescindiremos del superíndice “n”, para simplificar la notación.

<sup>3</sup>En general, el calor específico puede escribirse en términos del número ( $f$ ) de los llamados “grados de libertad” del sistema  $c_V=(f/2)R$ . Los grados de libertad de una molécula representan los posibles movimientos independientes de la misma. Para un gas monoatómico, el único movimiento posible para cada una de las partículas (puntuales) es la traslación, con tres posibles direcciones independientes ( $x$ ,  $y$ ,  $x$ ). Por tanto,  $f=3$ . Para una molécula diatómica, se tienen dos grados de libertad más, correspondientes a su rotación en torno a los dos ejes para los que el momento de inercia no despreciable. En ese caso  $f= 5$ .

## 2.3. Primer principio de la termodinámica

Vamos a considerar como sistema termodinámico un gas ideal, que puede intercambiar energía con el exterior de dos formas: absorbiendo o cediendo calor ( $Q$ ) y mediante la realización de trabajo ( $W$ ). El primer principio de la termodinámica es básicamente una expresión de la conservación de la energía:

$$\Delta U = Q - W \quad (2.8)$$

Para evaluar correctamente los flujos de energía entre el sistema y el exterior, es fundamental respetar el convenio de signos acordado. En el esquema de la figura 2.2 se ilustra el criterio seguido en estos apuntes.

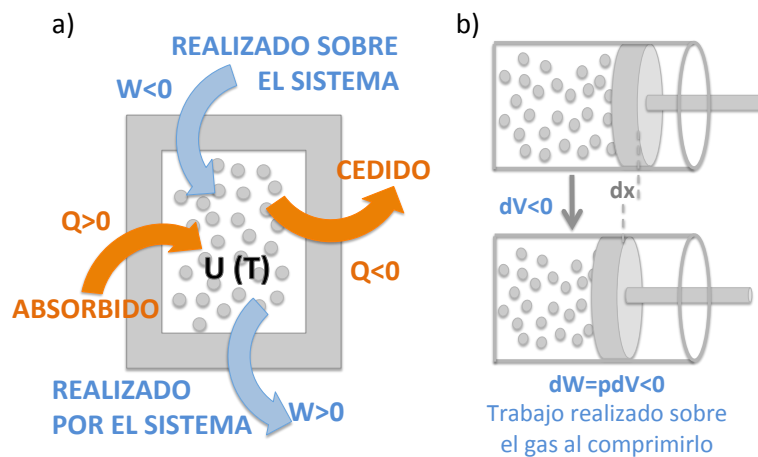


Figura 2.2: a) Esquema de un sistema termodinámico, cuya energía interna es función de la temperatura; puede intercambiar energía con el exterior en forma de calor o trabajo. b) Trabajo infinitesimal asociado a una compresión infinitesimal de un gas a presión  $p$ .

De acuerdo con este convenio, el trabajo mecánico realizado por el gas, correspondiente a una variación infinitesimal de volumen  $dV$ , será (ver figura 2.2 b):

$$dW = pdV \quad (2.9)$$

y para calcular el trabajo sobre el gas cuando el gas sufre una transformación desde un estado  $i$  a un estado  $f$ :

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV \quad (2.10)$$

Cuando se trata de describir variaciones infinitesimales, una forma que se usa habitualmente para la primera ley de la termodinámica es:  $dU = dQ - pdV$ .

De acuerdo con lo anterior, y si pensamos en la representación de los procesos termodinámicos en un diagrama  $pV$ , es inmediato ver que el trabajo se identifica con el área bajo la curva entre los puntos correspondientes a  $V_i$  e  $V_f$ .

Un sistema termodinámico puede ir, en general, de un estado inicial a otro final siguiendo distintos procesos (diferentes caminos en un diagrama  $pV$ ). Para cada uno de esos caminos de  $i \rightarrow f$ , tanto  $Q$  como  $W$  serán en general distintos (ambos dependen de la “trayectoria”, es decir del proceso seguido para ir de  $V_i$  a  $V_f$ ) pero la variación de energía interna será la misma. Al tratarse de una función de estado, el valor de  $U$  queda determinado por el estado del gas, independientemente del camino seguido para llegar a él. En los siguientes apartados vamos a evaluar los intercambios de energía de un gas ideal a través de diferentes procesos termodinámicos. Al tratarse de un gas ideal el sistema satisfará la ecuación de estado, de forma que en todos los casos se cumple la relación 2.1 entre las variables  $p$ ,  $V$  y  $T$ . Además, cada uno de los procesos se definirá por la existencia de una relación adicional entre dos de esas variables.

### 2.3.1. Procesos a volumen constante o isocoros

Si el proceso al que se ve sometido el gas ideal tiene lugar sin que haya variación de volumen, no se realiza ningún trabajo. En esas condiciones la variación de energía interna es igual al calor absorbido (aumenta  $U$  y por tanto la temperatura del gas) o cedido (disminuye  $U$  así como la temperatura). El calor intercambiado se expresa en función de la variación de temperatura y del calor específico (molar) a volumen constante.

$$\Delta U = Q = nc_V \Delta T \quad (2.11)$$

En un proceso isocoro el cociente entre  $p$  y  $T$  se mantiene constante en todo el proceso, verificándose  $p/T = \text{constante}$ .

### 2.3.2. Procesos a presión constante o isobaros

Si el proceso al que se ve sometido el gas desde su estado inicial al final tiene lugar a presión constante, el cálculo del trabajo realizado es muy sencillo.

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = p\Delta V = p(V_f - V_i) \quad (2.12)$$

Por su parte, el calor intercambiado será, expresado en función del calor específico a presión constante:

$$Q = nc_p\Delta T = nc_p(T_f - T_i) \quad (2.13)$$

Por tanto, la variación de energía interna en este proceso puede expresarse, atendiendo al primer principio de la termodinámica como:

$$\Delta U = nc_p\Delta T - p\Delta V = nc_p\Delta T - nR\Delta T \quad (2.14)$$

Ahora bien, la variación de energía interna del gas entre dos estados (independientemente del proceso seguido) viene determinada por el producto de la variación de la temperatura por el calor específico a volumen constante:

$$\Delta U = nc_V\Delta T \quad (2.15)$$

A partir de las dos expresiones anteriores se deduce la relación entre los valores del calor específico a volumen y a presión constante:

$$nc_V\Delta T = nc_p\Delta T - nR\Delta T \rightarrow c_V = c_p - R \quad (2.16)$$

Como hemos comentado antes, se tiene que  $c_p$  es mayor que  $c_v$ .

En un proceso isobaro el cociente entre  $V$  y  $T$  se mantiene constante en todo el proceso, verificándose  $V/T = \text{constante}$ .

### 2.3.3. Procesos a temperatura constante o isotermos

En cualquier proceso en el que se mantenga constante la temperatura del gas ideal no se produce variación de su energía interna. En esas condiciones, el calor intercambiado es igual al trabajo,  $Q=W$ , por lo que la evaluación de este último permite determinar por completo los intercambios de energía del sistema.

$$Q = W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (2.17)$$

En un proceso isoterma el producto de presión y volumen se mantiene constante en todo el proceso, verificándose  $pV = \text{constante}$ .

### 2.3.4. Procesos adiabáticos

Los procesos adiabáticos son aquellos en los que no se produce transferencia de calor, para lo que el sistema debe permanecer aislado. En esas condiciones, la variación de energía interna es igual al valor del trabajo, cambiado de signo:

$$\Delta U = -W = - \int_{V_i}^{V_f} p dV \quad (2.18)$$

Para calcular  $W$  es por tanto necesario encontrar una relación entre  $p$  y  $V$ , que permita expresar el integrando en función de una sola variable. Para ello, tendremos en cuenta que  $U$  solo depende de la temperatura, y la ecuación de estado de los gases ideales.

$$dU = nc_V dT = -pdV \Rightarrow c_V dT = -\frac{RT}{V} dV \Rightarrow c_V \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V} \quad (2.19)$$

Integrando la última expresión entre los estados inicial y final del gas, se tiene:

$$c_V \ln \frac{T_f}{T_i} = R \ln \frac{V_i}{V_f} \quad (2.20)$$

y como  $c_p = c_V + R$ , sustituyendo  $R$  y dividiendo por  $c_V$  en la ecuación anterior podemos escribir:

$$\ln \frac{T_f}{T_i} = \left( \frac{c_p}{c_V} - 1 \right) \ln \frac{V_i}{V_f} \quad (2.21)$$

El cociente  $c_p/c_V = \gamma$  es el denominado coeficiente adiabático del gas ideal. Teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos, se tiene:

$$\frac{T_f}{T_i} = \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^{(\gamma-1)} \Rightarrow T_f V_f^{(\gamma-1)} = T_i V_i^{(\gamma-1)} \quad (2.22)$$

Despejando  $T$  en la ecuación del gas ideal ( $T = pV/nR$ ) y sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$p_f V_f^\gamma = p_i V_i^\gamma \Rightarrow pV^\gamma = \text{constante} \quad (2.23)$$



que establece una relación entre  $p$  y  $V$ , válida a lo largo del proceso adiabático.<sup>4</sup> Esta última relación permite calcular el trabajo, a partir de la resolución de la integral de  $dW$  entre los estados inicial y final:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{cte}{V^\gamma} dV = \frac{1}{\gamma - 1} (p_i V_i - p_f V_f) \quad (2.24)$$

Se propone como ejercicio la resolución de la integral para obtener esta expresión final del trabajo en un proceso adiabático. Se propone asimismo llegar a este resultado por un camino alternativo, a partir de la variación de la energía interna del gas:  $\Delta U = n c_V (T_f - T_i)$  y sustituyendo la temperatura por su expresión a partir de la ecuación de estado del gas ideal.

## 2.4. Segundo principio de la termodinámica. Máquinas térmicas

Acabamos de ver que el primer principio de la termodinámica es una expresión de la conservación de la energía. Pero hay muchos procesos que, aunque respetarían el primer principio (conservación de la energía), no ocurren nunca de forma espontánea.<sup>5</sup> Se va a ver que el segundo principio de la termodinámica no se expresa mediante una ecuación, sino que establece la imposibilidad de que ocurran determinadas cosas. En concreto, la posibilidad o imposibilidad de conseguir energía que esté en condiciones de ser utilizada para algo es el punto central del segundo principio. Por ejemplo, es fácil convertir energía mecánica en calor pero, en sentido inverso, es imposible absorber calor de un sistema y convertirlo completamente en energía mecánica, sin ningún otro cambio adicional. La respuesta a por qué ocurre esto la da la segunda ley de la termodinámica. Tiene que ver con el sentido de los procesos termodinámicos. Esta ley impone restricciones al funcionamiento de sistemas reales (como un motor o una planta de producción de electricidad), por lo que se aplica a muchos problemas prácticos.

Se conocen varias maneras de enunciar el segundo principio de la termodinámica, algunas de las cuales - en las que nos vamos a centrar- se refieren justamente a esas restricciones. Para poder entender sus enunciados comenzaremos presentando los sistemas termodinámicos con los que se va a trabajar, que en general serán gases que experimentan transformaciones cíclicas.

<sup>4</sup>De forma análoga a  $pV = cte$  para un proceso isoterma.

<sup>5</sup>Por ejemplo, el calor siempre fluye de un cuerpo caliente a uno más frío; lo contrario no violaría la primera ley de la termodinámica, pero no se da en la naturaleza.

- En uno de los dos casos que se estudian, el sistema transforma en trabajo parte del calor que absorbe de un foco que está a temperatura elevada (foco caliente). Constituye lo que denominaremos máquina térmica o máquina de calor.
- En el otro, el sistema absorbe calor de un foco frío y lo cede a uno caliente, siendo en este caso necesario que se realice trabajo sobre gas. Estaremos entonces considerando un refrigerador.

En este contexto, se entiende por foco caliente (o frío) un sistema idealizado cuya capacidad calorífica es tan grande que puede absorber o ceder calor sin que varíe su temperatura.

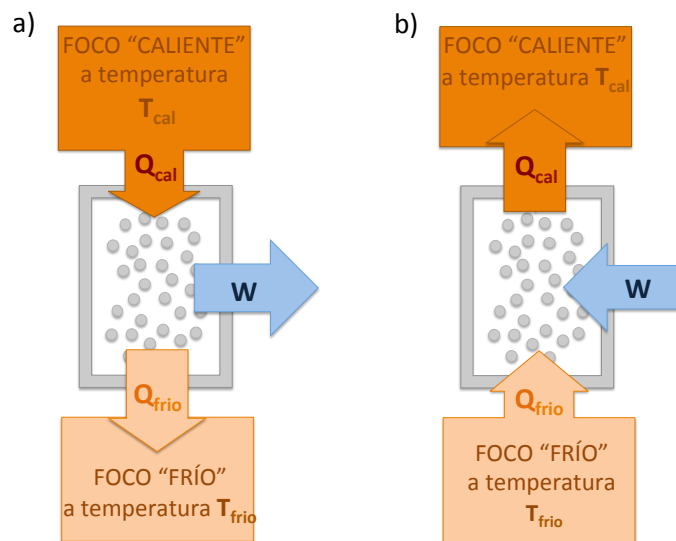


Figura 2.3: a) Esquema de una máquina térmica y b) de un refrigerador, mostrando el sentido de los flujos de energía en cada ciclo. En a)  $Q_{cal}$  representa el calor absorbido por el gas y  $Q_{frío}$  el calor cedido por el gas al foco frío, mientras que en el refrigerador b)  $Q_{cal}$  es el calor cedido por el gas al foco caliente y  $Q_{frío}$  el calor absorbido del foco frío por el gas.

Los dos enunciados del segundo principio a los que se ha hecho referencia en el párrafo anterior son:

1. Enunciado de la máquina térmica: No existe ninguna transformación termodinámica cíclica cuyo único efecto sea extraer calor de un foco y convertirlo íntegramente en trabajo; siempre existe una cesión energía al foco frío. (Es decir, no hay máquinas térmicas perfectas.)

2. Enunciado del refrigerador: No existe ninguna transformación termodinámica cíclica cuyo único efecto sea extraer calor de un foco a una temperatura menor y cederlo a otro foco a mayor temperatura. Es necesario realizar un trabajo sobre el gas para que pueda producirse flujo de calor del foco frío al foco caliente (No hay refrigeradores perfectos.)

Centrémonos de momento en la máquina térmica esquematizado en la figura 2.3 a). Al trabajar cíclicamente es evidente que el gas tiene que volver a su estado inicial al terminar cada ciclo, por lo que  $\Delta U$  es cero. Si escribimos la expresión del primer principio de la termodinámica para ese ciclo, se tiene:

$$\Delta U = 0 = Q - W = Q_{cal} + Q_{frio} - W \quad (2.25)$$

Teniendo en cuenta los signos de los flujos de energía, tal y como se muestran en la figura 2.3 a), podemos escribir la expresión anterior en términos de sus valores absolutos:

$$|Q_{cal}| - |Q_{frio}| - |W| = 0 \Rightarrow |W| = |Q_{cal}| - |Q_{frio}| \quad (2.26)$$

Dado que la finalidad de este sistema es producir trabajo mecánico a partir del calor absorbido, se define su **eficiencia** como el cociente entre el trabajo neto realizado por el sistema y el calor absorbido (del foco caliente).

$$\epsilon = \frac{|W|}{|Q_{cal}|} = \frac{|Q_{cal}| - |Q_{frio}|}{|Q_{cal}|} = 1 - \frac{|Q_{frio}|}{|Q_{cal}|} \quad (2.27)$$

Su valor, menor que la unidad, refleja el primero de los dos enunciados del segundo principio de la termodinámica expuestos. Es habitual expresar la eficiencia en porcentaje y, de acuerdo con lo visto es imposible construir un motor térmico con una eficiencia del 100 %.

Se puede hacer una descripción análoga para un refrigerador, en el que el sistema absorbe calor del foco frío y lo cede a uno que está a mayor temperatura. En este caso, el balance energético en cada ciclo se expresará:

$$\begin{aligned} \Delta U = 0 &= Q_{cal} + Q_{frio} - W = -|Q_{cal}| + |Q_{frio}| + |W| \Rightarrow \\ &\Rightarrow |W| = |Q_{cal}| - |Q_{frio}| \end{aligned} \quad (2.28)$$

Para un refrigerador, en el que lo que interesa es extraer calor del foco que está a temperatura baja, se define el **coeficiente de rendimiento** como el cociente entre el calor ( $Q_{frio} > 0$ ) absorbido del foco frío y el trabajo ( $W < 0$ ) que hay que realizar sobre el sistema:

$$\eta = \frac{|Q_{frio}|}{|W|} = \frac{|Q_{frio}|}{|Q_{cal}| - |Q_{frio}|} \quad (2.29)$$

El principio de funcionamiento de los sistemas acondicionadores de aire es igual al que se acaba de describir. Si pensamos por ejemplo en una bomba de calor, es fácil ver que hace exactamente lo mismo que un refrigerador, lo único que cambia es el objetivo. En un refrigerador el objetivo es enfriar (y mantener frío) un espacio que ya está a baja temperatura. La bomba de calor, sin embargo, tiene como objetivo aportar calor y mantener caliente el espacio caliente.

Las máquinas térmicas y los refrigeradores pueden funcionar siguiendo distintos tipos de procesos cíclicos, pero hay uno que tiene un interés particular. Se trata del llamado **ciclo de Carnot**, que consiste en 4 procesos: una expansión isoterma, una expansión adiabática, una compresión isoterma y por último una compresión adiabática. En la figura 2.4 se representa un ciclo de Carnot (en un diagrama pV), en el que se han marcado los sentidos de los flujos de energía, manteniendo la notación de la figura 2.3. La particularidad de este ciclo es que, dados dos focos, el foco caliente a temperatura  $T_{cal}$  y el frío a temperatura  $T_{frio}$ , la máquina térmica con mayor rendimiento que puede diseñarse es la que se basa en un ciclo de Carnot. No se puede diseñar ningún otro sistema que supere el límite teórico máximo que proporcionan las máquinas de Carnot.

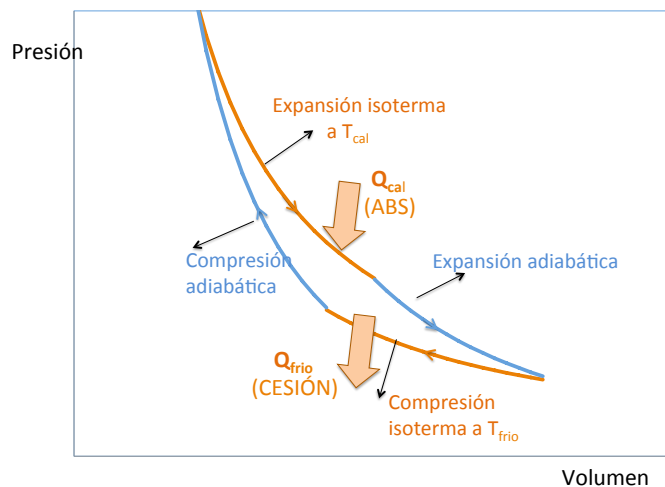


Figura 2.4: a) Diagrama pV de un ciclo de Carnot, en el que se ilustra los flujos de energía para el caso de un motor térmico.

Teniendo en cuenta las características de los procesos que constituyen el ciclo de Carnot, puede demostrarse que la eficiencia de los motores térmicos y el rendimiento de los refrigeradores de Carnot dependen ex-

clusivamente de las temperaturas (en K) de los focos frío y caliente:

$$\epsilon = 1 - \frac{T_{frio}}{T_{cal}} \quad y \quad \eta = \frac{T_{frio}}{T_{cal} - T_{frio}} \quad (2.30)$$

En el caso de la bomba de calor, como el objetivo es aportar calor al foco caliente, el rendimiento será:

$$\eta = \frac{T_{cal}}{T_{cal} - T_{frio}} \quad (2.31)$$



# Conclusiones I

Conclusiones de la primera parte ...





Parte II

**ELECTROSTÁTICA**



## INTRODUCCIÓN

En gran medida, los conceptos básicos de la Mecánica Clásica, de los cuales nos ocupamos en el volumen primero de esta serie (Física 1), se van a extrapolar al caso de la Electricidad, en cuyo ámbito se centra la Parte II de este manual. Así pues, refiriéndonos a las cargas eléctricas, frecuentemente hablaremos en el sentido habitual de fuerza, trabajo, energía potencial . . . Comenzaremos por los aspectos relativos a la interacción electrostática, es decir, lo que se refiere a campos de fuerzas (sobre cargas) producidos por otras cargas, que se encuentran en reposo.

Se aprenderá a utilizar algunos métodos de cálculo del campo eléctrico en el vacío, basados en diferentes conceptos (principio de superposición y ley de Gauss ) mediante ejemplos sencillos, como distribuciones de cargas puntuales o distribuciones continuas de elevada simetría.

Las cargas eléctricas están presentes en toda la materia, por lo que también se estudiarán las propiedades básicas de los materiales conductores (metales) y dieléctricos, dentro de los cuales las cargas muestran comportamientos característicos.



## Capítulo 3

# CAMPO ELECTROSTÁTICO

Aunque la descripción cuantitativa de los fenómenos que se derivan de la interacción electrostática es mucho más reciente (siglo XVIII), la existencia de la misma ya fue observada por los griegos, que descubrieron que una varilla de ámbar frotada con el pelo era capaz de atraer pequeños fragmentos de paja. Observaron asimismo que dos varillas de ámbar frotadas se repelen, mientras que una de ámbar y otra de vidrio se atraen.

Del mismo modo que ocurre con el ámbar y el vidrio, se observó que multitud de sustancias se atraen o repelen al ser frotadas, lo que se describe diciendo que al frotar se induce una propiedad: la adquisición de **carga eléctrica**, que puede ser “positiva” o “negativa”.

De acuerdo con el convenio propuesto por B. Franklin, se denomina carga eléctrica **positiva** a la que adquiere la varilla de vidrio al ser frotada. Diremos que cualquier sustancia que repela al vidrio frotado posee carga positiva, mientras que las que sean atraídas poseen carga negativa.

### 3.1. *Ley de Coulomb*

Los resultados de los experimentos mencionados pueden explicarse hoy en día en función de la estructura de la materia, constituida por átomos o moléculas que son eléctricamente neutros. Lo que ocurre, por ejemplo, cuando frotamos el vidrio con un paño de seda, es que esta queda cargada negativamente porque **arranca electrones** de los átomos de vidrio, dejándolo con **balance de carga positivo**.

Para llegar a una descripción cuantitativa de la interacción electrostática, vamos a estudiar el experimento pensado planteado en la figura 3.1.

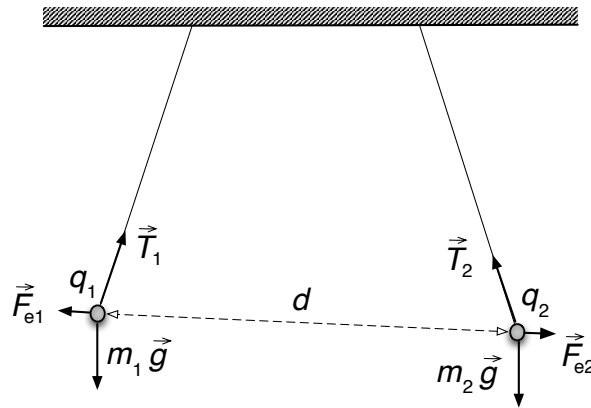


Figura 3.1: Repulsión electrostática entre dos esferas con cargas eléctricas del mismo signo.

El estudio de la situación de equilibrio del sistema conduciría a las siguientes conclusiones:

- La fuerza que surge entre las esferas lleva la dirección de la línea que las une; se trata de una fuerza central.
- Su magnitud es inversamente proporcional a  $d^2$ .
- Su magnitud es proporcional a la carga de cada esfera.
- Su magnitud es independiente del signo de las cargas, pero no su sentido.

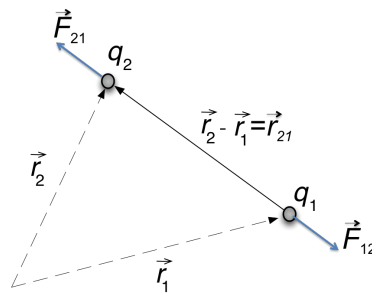


Figura 3.2: Representación vectorial de la fuerza electrostática entre cargas puntuales. Se ha representado la situación en que ambas cargas tienen el mismo signo; si fueran de distinto signo las fuerzas tendrían el sentido opuesto al dibujado.

En términos cuantitativos, la fuerza sobre una carga puntual  $q_2$  debida a la presencia de otra carga puntual  $q_1$  se puede expresar mediante la

fórmula (Ley de Coulomb):

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} \quad (3.1)$$

donde  $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , y  $k$  es una constante de proporcionalidad que depende del sistema de unidades utilizado. Así, en el sistema M.K.S.A. (esto es, en el Sistema Internacional de unidades), la unidad de carga es el Coulomb (C), y el valor de  $k$  es:

$$k = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} = 8.9875 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad dieléctrica del vacío, constante cuyo valor es  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ . Si se tiene un conjunto de partículas, se encuentra que la fuerza sobre cualquiera de ellas ( $q_i$  en este caso) cumple el principio de superposición:

$$\vec{F}_i = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = \sum_{i \neq j} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}$$

Aquí,  $\vec{r}_{ij}$  debe ser interpretado de acuerdo con el esquema de la figura 3.2, pero aplicado a las cargas genéricas  $q_i$  y  $q_j$ .

### 3.2. Campo electrostático. Líneas de campo

La expresión anterior nos permite evaluar las fuerzas que se ejercen las cargas eléctricas entre sí, pero no es operativa en problemas reales, donde, por ejemplo, no conocemos *a priori* las cargas presentes. Resulta útil desvincular el efecto que un conjunto de cargas tendría sobre otra carga, del valor concreto de esta última carga. La noción de **campo eléctrico**,  $\vec{\mathcal{E}}$  nos proporciona esa posibilidad. Veremos que un sistema de cargas creará un campo eléctrico en todos los puntos del espacio; sobre una carga puntual (que llamaremos de prueba) colocada en un determinado punto, se ejercerá una fuerza que vendrá dada por el producto del valor del campo en ese punto por el valor de la carga de prueba.

En este capítulo se hace hincapié en el cálculo del campo eléctrico  $\vec{\mathcal{E}}$  creado por un sistema de cargas:

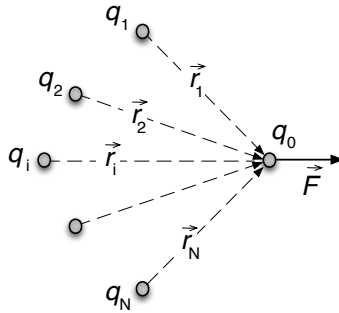


Figura 3.3: Fuerza realizada por un sistema de cargas sobre una carga puntual de prueba  $q_0$  colocada a una cierta distancia de ellas.

De acuerdo con la descripción anterior, el campo eléctrico será:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Entendemos por  $\vec{F}$  la fuerza que el sistema ejerce sobre una carga puntual de prueba. La consideramos muy pequeña para que su presencia no distorsione la configuración de la distribución original.<sup>1</sup> Tendremos:

$$\vec{F} = q_0 \vec{\mathcal{E}}$$

Como veremos en lo que sigue, desarrollaremos métodos para calcular el campo, en ocasiones incluso sin conocer el detalle de las cargas que lo producen, lo que introduce importantes ventajas.

Una forma útil de poner de manifiesto la estructura de un campo es la representación gráfica de **líneas de campo**: en cada punto del espacio dichas líneas tienen por dirección tangente la del campo eléctrico en ese punto.

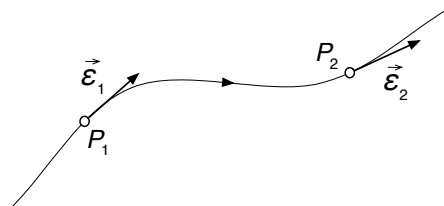


Figura 3.4: En cada punto del espacio, el vector campo eléctrico es tangente a sus líneas de campo.

<sup>1</sup>Pensemos que las cargas de la distribución podrían ser móviles y sus posiciones variarían por la presencia de la carga de prueba



Evidentemente las líneas de campo, que salen de las cargas positivas y terminan en las negativas, no pueden cortarse.<sup>2</sup> En una representación, el número de líneas que salen de una carga positiva (o llegan a una negativa) es “representativo” de valor de la carga. Además, las líneas de campo incluyen información sobre la magnitud del campo en cada punto. Esto se corresponderá con la mayor o menor densidad de líneas de campo, teniéndose una disminución del espaciado entre ellas allí donde el campo es más intenso. Dicha propiedad será explicada de modo general en el siguiente capítulo pero se puede comprender su esencia mediante el caso particular del campo creado por una carga puntual. Tomando origen en la posición que esta ocupa, el campo eléctrico se expresa

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (3.2)$$

La distancia entre dos líneas de campo se puede cuantificar mediante la longitud del arco de circunferencia  $l = r\theta$  (ver figura). Basta notar que  $s$  aumenta linealmente con la distancia, mientras que el campo  $\mathcal{E}$  disminuye con su cuadrado.

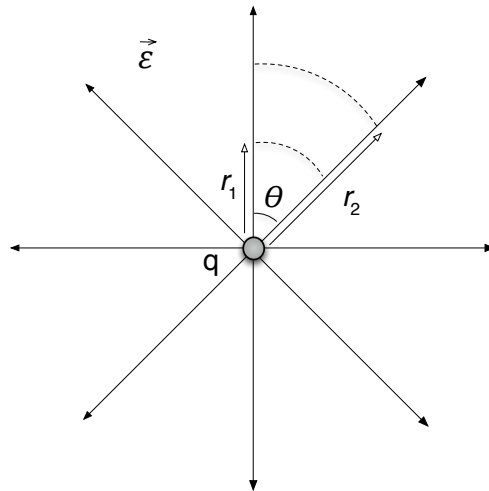


Figura 3.5: La intensidad del campo eléctrico disminuye al aumentar el espaciado entre las líneas de campo (es decir, al disminuir la “densidad” de líneas)

<sup>2</sup>Es evidente que el vector campo eléctrico en un punto no puede tener simultáneamente dos direcciones.

### 3.3. Campo creado por distribuciones de carga. Principio de superposición

El campo creado por una carga puntual viene dado por la expresión 3.2 cuando la posición que ocupa ésta se utiliza como origen de coordenadas. Por otra parte, debido al carácter aditivo de la fuerza electrostática, para calcular el campo creado por un sistema de cargas, utilizaremos el **Principio de Superposición**:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{F}}{q_o} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = \sum_i \vec{\mathcal{E}}_i$$

Debe notarse que  $\vec{r}_i$  representa el vector de posición que une a la carga  $q_i$  de la distribución con el punto donde colocamos la carga de prueba, es decir, donde estamos evaluando el campo eléctrico (ver figura 3.3)

#### 3.3.1. Distribuciones de carga continua

Aunque, desde el punto de vista clásico, las cargas eléctricas pueden considerarse puntuales (iones, electrones,...), en los problemas que incluyen cuerpos macroscópicos se puede hablar de **distribuciones de carga continuas**. Esto significa que la descripción matemática del problema se hará mediante los conceptos del cálculo infinitesimal, es decir, entenderemos que los objetos se componen de elementos de volumen diferenciales, dentro de los cuales la carga es uniforme. Dicho de otro modo, los fenómenos físicos involucrados no son sensibles al hecho de que haya localizaciones concretas donde la carga se concentra u otras “vacías”. Para entender la validez de esta hipótesis, consideremos por ejemplo, las propiedades de un fragmento de oro. Su densidad es  $\rho = 19.3 \text{ g/cm}^3$ , y su peso atómico  $P_{at} = 196.97 \text{ g}$ . Entonces, en un centímetro cúbico de oro tendremos  $5.9 \times 10^{22}$  átomos. Podemos pensar que cada fragmento del metal, por pequeño que sea, contiene una cantidad de carga proporcional a su volumen.

En general, distinguiremos entre distribuciones lineales, superficiales y volúmicas de carga. En todas ellas aplicaremos la idea de superposición en un sistema continuo:  $\vec{\mathcal{E}} = \int d\vec{\mathcal{E}}$ . Esta expresión indica que obtendremos el campo creado por una distribución mediante integración de las contribuciones diferenciales de cada uno de sus elementos de carga ( $dq \rightarrow d\vec{\mathcal{E}}$ ). Nótese que dado el carácter vectorial del campo eléctrico, en

los casos más generales habría que resolver las tres expresiones siguientes, asociadas a cada componente del campo:

$$\mathcal{E}_x = \int d\mathcal{E}_x, \quad \mathcal{E}_y = \int d\mathcal{E}_y, \quad \mathcal{E}_z = \int d\mathcal{E}_z$$

Veamos las expresiones formales a utilizar en cada caso, dependiendo de la configuración concreta del sistema de cargas:

- Distribución lineal de carga:

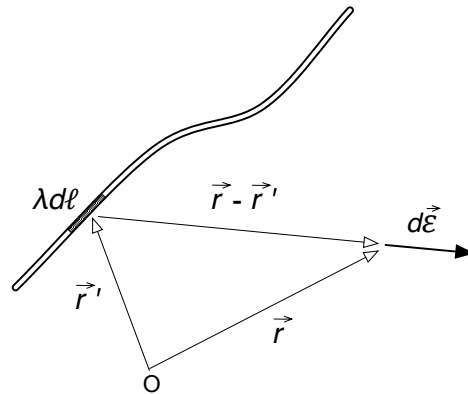


Figura 3.6: Campo eléctrico creado por una distribución lineal de carga. Aquí,  $dq = \lambda dl$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \int d\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl \quad (3.3)$$

donde  $\lambda$  es la densidad lineal de carga (carga por unidad de longitud, en  $Cm^{-1}$ ) de la distribución.

En la práctica utilizaremos una notación simplificada, en la que denotaremos con  $\vec{r}$  la posición del punto  $P$  (en el que se quiere calcular el campo) respecto a la posición del elemento que crea dicho campo. Para una distribución lineal resultaría:

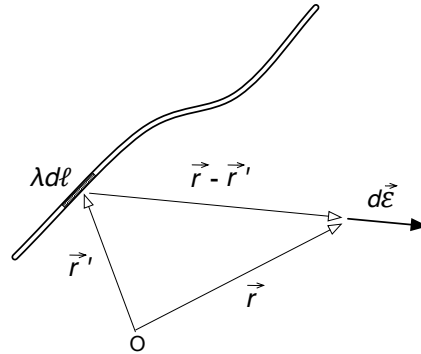


Figura 3.7: Campo eléctrico creado por una distribución lineal de carga, indicando el significado de  $\vec{r}$ .

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \int d\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') \hat{r}}{|\vec{r}'|^2} dl \quad (3.4)$$

Haciendo uso de la misma notación simplificada, veamos ahora los casos de distribuciones superficiales y volúmicas de carga:

- Distribución superficial de carga:

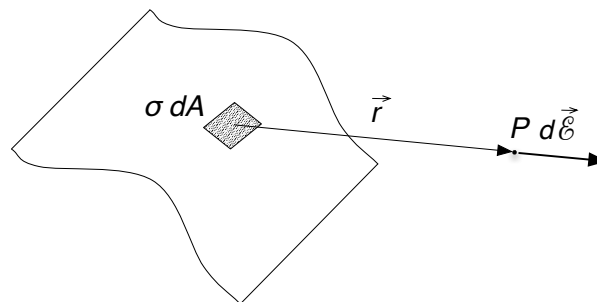


Figura 3.8: Campo eléctrico creado por una distribución superficial de carga, donde  $dq = \sigma dA$ .

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \int d\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') \hat{r}}{|\vec{r}'|^2} dA \quad (3.5)$$

donde  $\sigma$  es la densidad superficial de carga (en  $Cm^{-2}$ ) del sistema.

- Distribución volúmica de carga:

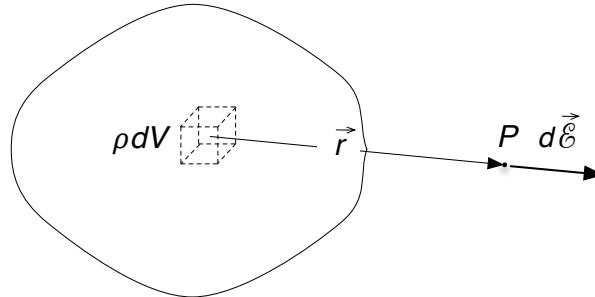


Figura 3.9: Campo eléctrico creado por una distribución volumétrica de carga, donde  $dq = \rho dA$ .

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \int d\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \hat{r}}{|\vec{r}'|^2} dV \quad (3.6)$$

donde  $\rho$  es la densidad volumétrica de carga (en  $Cm^{-3}$ ) del sistema.

### 3.3.2. Ejemplos de cálculo de $\vec{\mathcal{E}}$ por superposición.

A modo de guía general, los pasos que se seguirán para el cálculo del campo eléctrico creado por una distribución continua de carga serán:

1. Se divide la distribución en elementos de carga ( $dQ$ , léase “diferencial de carga”), adaptados a la geometría.
2. Se escribe la expresión genérica del campo eléctrico ( $d\vec{\mathcal{E}}$ ) creado por uno cualquiera de esos elementos  $dQ$ .
3. Se analiza la dirección del campo creado por los distintos elementos, prestando atención a si, debido a la geometría, hay alguna(s) componente(s) del campo eléctrico que se anulan.
4. Se “suman” las componentes relevantes del campo creado por todos los elementos de carga que constituyen la distribución inicial. Al tratarse de elementos infinitesimales, se planteará en forma de integral (extendida a toda la distribución).
5. Para poder resolver la integral, es necesario expresar el integrando en función de una variable. En muchos ejemplos no hay una única forma de hacerlo (se pueden elegir distintas variables de integración).

En la práctica, en los casos planteados en el presente curso, lo más habitual será utilizar la expresión 3.4. En muchas ocasiones nos preguntaremos directamente por el campo creado por distribuciones lineales: segmentos, anillos, ... En otros casos, apelando a la generalidad del principio de superposición, partiremos del campo creado por una distribución

lineal para obtener el de una superficial como suma de lineales. Por ejemplo, el campo creado por un disco se calculará sumando las contribuciones de los “anillos” de grosor diferencial  $dr$  que lo componen.

### Ejemplo 1. Campo creado por un segmento rectilíneo

Se plantea como problema el cálculo del campo electrostático sobre los puntos de la mediatriz de un segmento de longitud  $2L$  y carga total  $Q$ , que se distribuye de modo uniforme a lo largo de  $2L$  ( $\lambda \equiv Q/2L$ ).

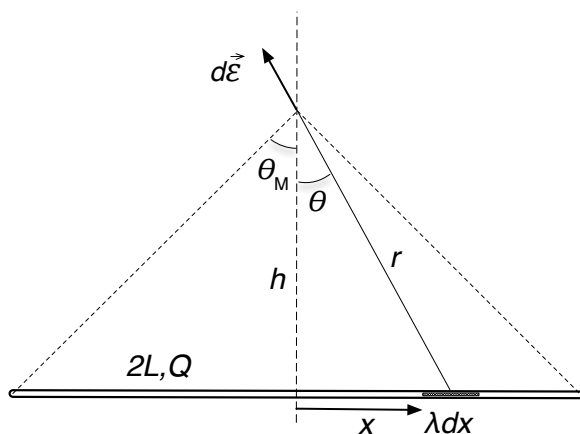


Figura 3.10: Campo creado por los elementos de un segmento rectilíneo en la mediatriz del mismo.

Consideremos un elemento cualquiera del segmento, de longitud  $dx$  y por tanto de carga  $dQ = \lambda dx$ , situado en una posición  $x$  respecto al origen. El módulo del campo eléctrico  $d\mathcal{E}$  creado por ese elemento será:

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2}.$$

Dada la simetría del problema, podemos anticipar que el campo total  $\vec{\mathcal{E}} = (0, \mathcal{E}_y, 0)$ <sup>3</sup> por lo cual aplicaremos la ecuación 3.4 para la componente  $y$ :

$$\mathcal{E}_y = \int d\mathcal{E}_y$$

donde

$$d\mathcal{E}_y = d\mathcal{E} \cos \theta$$

<sup>3</sup>Puede verse fácilmente que la componente “x” del campo creado por el elemento marcado en la figura se va a anular con la del elemento situado simétricamente en la posición “-x” respecto al origen.

Nótese que se usa la notación simplificada ya descrita, de forma que  $r$  indica el módulo del vector de posición relativo desde el elemento de carga hasta el punto donde calculamos el campo.

Transformaremos el integrando para expresarlo en función de una variable de integración. En este caso, una elección adecuada es el ángulo  $\theta$  (aunque también se puede resolver en función de  $x$ ). Para expresarlo en función de  $\theta$  se utilizarán las relaciones:

$$h = r \cos \theta \quad ; \quad x = h \tan \theta$$

$$\Downarrow$$

$$r = \frac{h}{\cos \theta} \quad ; \quad dx = \frac{h}{\cos^2 \theta} d\theta$$

Entonces

$$\mathcal{E}_y = \int d\mathcal{E}_y = 2 \int_0^{\theta_M} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \text{sen } \theta_M \quad (3.7)$$

Analicemos el resultado para situaciones límite con interpretación física inmediata:

- En puntos muy próximos al segmento (así se vería el campo en un hilo infinito) tenemos  $\mathcal{E}_y \simeq \lambda/(2\pi\epsilon_0 h)$  ya que  $\theta_M \simeq \pi/2$ .
- Por otra parte, si nos colocamos en puntos muy alejados:  $\mathcal{E}_y \simeq Q/(4\pi\epsilon_0 h^2)$  como correspondería a ver el segmento como una carga prácticamente puntual. Aquí hemos utilizado que para ángulos pequeños el seno y la tangente se confunden ( $\text{sen } \theta_M \simeq \tan \theta_M$ ).

### Ejemplo 2. Campo creado por un anillo

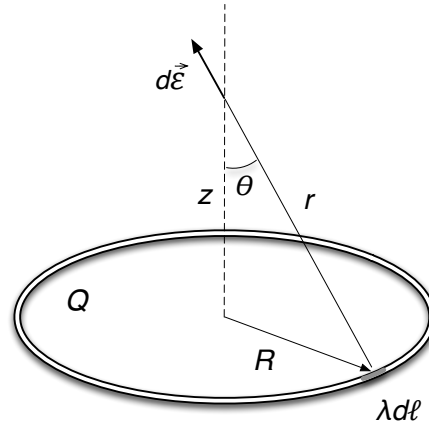


Figura 3.11: Esquema del campo creado por un elemento cualquiera de un anillo uniformemente cargado, en los puntos de su eje.

En este caso vamos a calcular el campo electrostático creado por un anillo de radio  $R$ , con densidad de carga uniforme  $\lambda = Q/(2\pi R)$ . Lo calcularemos en el eje de simetría del anillo, en el cual se anularán las componentes horizontales de  $\vec{\mathcal{E}}$  (tendremos  $\vec{\mathcal{E}} = (0, 0, \mathcal{E}_z)$ ). El módulo del campo creado por un elemento del anillo (arco de longitud  $dl$  y carga  $dQ = \lambda dl$ ) como el indicado en el dibujo será:

$$d\mathcal{E} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)}$$

Dado que las componentes de ese campo en direcciones perpendiculares al eje  $z$  se van a anular con las del creado por el elemento de carga diametralmente opuesto, el campo total se calculará integrando la componente  $z$ ,  $d\mathcal{E}_z$

$$\mathcal{E}_z = \int d\mathcal{E}_z = \int d\mathcal{E} \cos\theta$$

siendo

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad ;$$

de modo que

$$\mathcal{E}_z = \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}} \int dl$$



Nótese que la integración, a lo largo de todo el anillo, no requiere una evaluación explícita; de modo evidente  $\int d\ell = 2\pi R$ . Entonces, podemos concluir

$$\mathcal{E}_z = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.8)$$

Se propone como ejercicio considerar el límite de grandes distancias, en el cual la expresión obtenida debe reproducir la del campo creado por una carga puntual.

### Ejemplo 3. Campo creado por un disco

En este ejemplo trataremos el caso de una distribución de carga superficial. Planteamos el cálculo del campo electrostático creado por un disco de radio  $R$ , uniformemente cargado con densidad  $\sigma = Q/(\pi R^2)$ . De nuevo, lo evaluaremos en los puntos de su eje de simetría, donde por razones obvias, vamos a tener  $\vec{\mathcal{E}} = (0, 0, \mathcal{E}_z)$ .

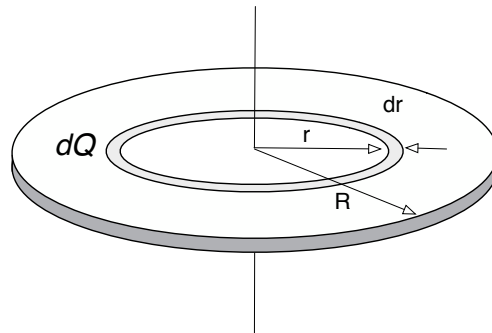


Figura 3.12: Una distribución de carga superficial en forma de disco, se puede considerar como una superposición de anillos de carga  $dQ = \sigma(2\pi r)dr$ .  $dr$  es el “grosor” de los anillos.

Como decíamos anteriormente, aunque se trate de un problema bidimensional, puede reducirse a un cálculo con distribuciones lineales. De hecho, atendiendo al esquema de la figura 3.12, el campo del disco puede obtenerse como superposición de los campos creados por una serie de “anillos” concéntricos, cada uno con carga  $dQ$  que puede expresarse como:<sup>4</sup>

$$dQ = \sigma ds = \sigma 2\pi r dr$$

<sup>4</sup>Nótese que  $2\pi r dr$  representa la superficie de la “corona” circular sombreada en la figura, de radio interior  $r$  y radio exterior  $r+dr$ . Identificamos esa corona, “muy delgada” con un anillo.

Entonces, reemplazando  $Q \rightarrow dQ$ ,  $R \rightarrow r$  en la expresión 3.8 del campo debido a un anillo que se acaba de obtener, tenemos

$$d\mathcal{E}_z = \frac{\sigma z r dr}{2\epsilon_o(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Debe notarse que aquí  $d\mathcal{E}_z$  se refiere al campo creado por un “elemento” diferencial de carga en forma de anillo, que forma parte del disco. Es decir, la aplicación del concepto de superposición adquiere un sentido amplio, y no necesariamente ha de consistir en la división en elementos “casi-puntuales”, sino que puede adaptarse a la geometría del problema que nos pueda interesar.

Finalmente, si integramos la expresión anterior (siendo la variable de integración  $r$ ) para acumular el efecto de todos los anillos diferenciales:

$$\int d\mathcal{E}_z = \int_0^R \frac{\sigma z r dr}{2\epsilon_o(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \quad (3.9)$$

expresión que también resulta interesante analizar en casos límite.

- a distancias pequeñas ( $z/R \rightarrow 0$ ) tenemos  $\mathcal{E}_z \simeq \sigma/2\epsilon_o$ . Es la expresión del campo creado por una distribución plana infinita, cargada con  $\sigma$ .
- en el caso opuesto, es decir al alejarnos más y más del disco ( $R/z \rightarrow 0$ ) se cumple  $\mathcal{E}_z \simeq Q/(4\pi\epsilon_o z^2)$ .

## Capítulo 4

# TEOREMA DE GAUSS

El teorema de Gauss (o ley de Gauss) constituye un resultado fundamental en la teoría electromagnética. En última instancia, resulta ser una consecuencia “geométrica” de la expresión  $\vec{\mathcal{E}} = (kq/r^2)\hat{r}$ , correspondiente al campo electrostático creado por las cargas puntuales. Esencialmente, la ley de Gauss expresa la relación entre la localización de las fuentes de campo (las cargas eléctricas) y una propiedad global del campo en el espacio en torno a estas. Dicha propiedad se denomina **flujo del campo** y su valor nos permite conocer las cargas presentes en una zona del espacio. Por otra parte, su aplicación en el sentido recíproco es de enorme interés. Conocidas las cargas que hay en una región del espacio, el concepto global de flujo nos puede facilitar el cálculo del campo electrostático asociado. Veremos que hay problemas en que esta idea proporciona un método muy conveniente para evaluar  $\vec{\mathcal{E}}$ , alternativo al de superposición presentado en el capítulo anterior.

### 4.1. *Flujo del campo eléctrico*

Como decíamos arriba, la ley de Gauss se refiere a una propiedad “global” del campo electrostático denominada flujo. Esta magnitud física **cuantifica** un concepto del que ya hemos hablado: las líneas de campo (que tienen su origen en las cargas) y que atraviesan una determinada superficie. Podemos establecer una analogía con un fluido (de allí el nombre), siendo las líneas de campo como las trayectorias de las partículas de un fluido en movimiento. Con esta finalidad, vamos a introducir algunos conceptos matemáticos necesarios para dotar a la idea de un carácter cuantitativo.

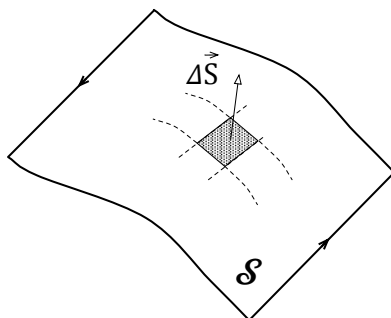


Figura 4.1: Vector superficie asociado a un elemento de superficie. Se indica también el criterio de orientación para superficies abiertas con un sentido de circulación en el perímetro.

#### 4.1.1. Vector superficie

Dada una superficie plana, el **vector superficie** se define como perpendicular a la misma y su módulo se hace coincidir con su área. La asignación del vector  $\vec{S}$  a una superficie plana es única. En caso de que la superficie no sea plana a nivel global, tomaremos elementos suficientemente pequeños para que se puedan considerar planos, asignando a cada elemento un  $\Delta\vec{S}$ .

El sentido del vector superficie se asigna mediante el siguiente convenio:

- Si la superficie es cerrada, sentido hacia fuera.
- Si la superficie es abierta pero tiene definido un sentido de recorrido de su perímetro, se elige según este sentido. (ver Figura 4.1).
- Si no se da ninguno de los dos casos anteriores, se puede elegir el sentido.

Es habitual escribir el vector de superficie utilizando un vector unitario  $\hat{n}$ , perpendicular a la superficie y en el mismo sentido que  $\Delta\vec{S}$ .

$$\Delta\vec{S} = \Delta S \hat{n} \quad (4.1)$$

#### 4.1.2. Flujo del campo eléctrico

El flujo del campo eléctrico a través de un elemento de superficie se define como el producto escalar del vector campo por el vector de superficie:

$$\Delta\Phi = \vec{\mathcal{E}} \cdot \Delta\vec{S} = |\vec{\mathcal{E}}| |\Delta\vec{S}| \cos\theta$$

donde  $\Delta\vec{S}$  es el área que rodea el punto elegido, en el que el campo es  $\vec{E}$  y  $\theta$  es el ángulo que forman ambos vectores.

¿Qué ocurre cuando se quiere calcular el flujo de campo eléctrico a través de una superficie “grande”? Consideremos en primer lugar una situación como la de la figura 4.2 en la que el campo es uniforme, tomando el mismo valor en todos los puntos de la superficie de interés, plana en este ejemplo.

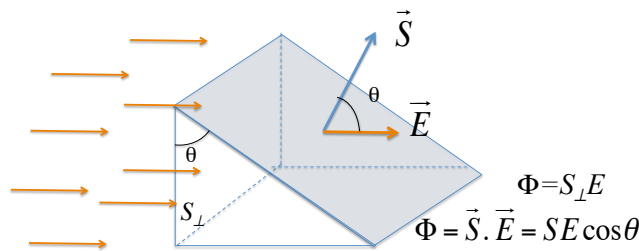


Figura 4.2: Esquema en el que se muestra que en el cálculo del flujo sólo es relevante la componente del campo paralela al vector superficie.

Evidentemente podemos usar la expresión análoga a la anterior, sustituyendo  $\Delta\vec{S}$  por  $\vec{S}$ . Es importante insistir en que el producto escalar determina que únicamente la componente de  $\vec{E}$  que atraviesa la superficie (paralela al vector superficie) sea relevante.

Si consideramos el caso general de una superficie extensa y curva, de modo que la dirección de  $\Delta\vec{S}$  pueda variar de punto a punto, y además el campo eléctrico también pueda variar de un punto a otro, el flujo total que la atraviesa se calculará mediante una suma extendida a todos los elementos (cuasi-planos) que la constituyen:

$$\Phi_S = \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i$$

En el límite continuo:

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

En el caso particular de superficies cerradas, la integral se suele expresar así:

$$\Phi_S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (4.2)$$

Recordemos que, de acuerdo con lo que se ha dicho antes, el sentido positivo del flujo será “hacia afuera”.

**Ejemplo:** Cálculo del flujo a través de una superficie esférica “imaginaria” de radio  $r$ , del campo eléctrico creado por una carga puntual situada en su centro.

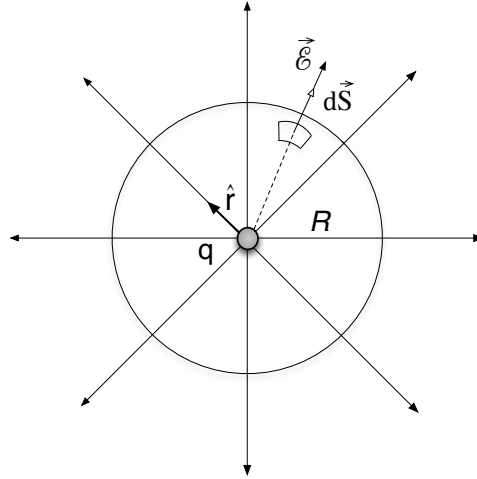


Figura 4.3: Flujo del campo electrostático de una carga puntual a través de una superficie esférica centrada.

La expresión del campo eléctrico generado por la carga es:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Teniendo en cuenta que  $d\vec{S} = dS \hat{r}^1$ :

$$\Phi_S = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \oint_S dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.3)$$

En la línea de los comentarios que se hicieron al principio del capítulo, este resultado se puede interpretar del siguiente modo. Si “medimos” el flujo  $\Phi_S$ , puede obtenerse el valor de la carga dentro de la superficie  $S$ .  $\Phi_S$  no depende del radio de la esfera sobre la que se ha trabajado. Por otra parte,  $\Phi_S$  seguiría siendo el mismo si la carga no estuviese en el centro o si la superficie fuese cualquier otra, siempre que contenga a la carga  $q$ . Para entender esto solo hay que recordar que el número de líneas de campo que atravesarán cualquier superficie (=flujo) que encierre a  $q$  será el mismo (todas las líneas que salen de  $q$  atraviesan las superficies que la encierran, independientemente de su forma).

<sup>1</sup>Nótese que  $\hat{r} = \hat{n}$

Lo anterior nos permite generalizar la expresión 4.3, resultado que constituye el llamado **Teorema de Gauss**, cuyo enunciado, así como la demostración se exponen en la siguiente sección.

## 4.2. Teorema de Gauss

Este teorema, de vital importancia en Electrostática, se puede enunciar así:

El flujo total del campo eléctrico a través de una superficie cerrada  $S$ , es igual al producto de  $1/\epsilon_o$  por la suma algebraica de las cargas existentes dentro de  $S$ .

$$\Phi_S = \oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_o}$$

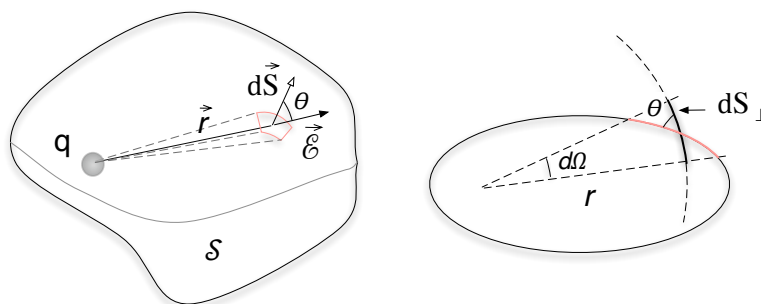


Figura 4.4: Esquema para la demostración del teorema de Gauss aplicado a una carga puntual. En la parte derecha se muestra el esquema de la definición de ángulo sólido sustentado por un elemento de área. Por claridad, representamos una sección.

Demostración:<sup>2</sup>

- Para una carga puntual:

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{S}$$

donde  $\hat{r} \cdot d\vec{S} = dS \cos \theta$ .

<sup>2</sup>La demostración del teorema es opcional.

Teniendo en cuenta que  $\frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{dS_{\perp}}{r^2}$  es el ángulo sólido<sup>3</sup>  $d\Omega$  sustentado por  $dA$  respecto al punto P (ver Figura 4.4):

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_o} \oint_S d\Omega = \frac{4 \pi q}{4 \pi \epsilon_o} = \frac{q}{\epsilon_o}$$

(Como se quería demostrar)

Aparte de su interés teórico, el teorema de Gauss resulta muy útil cuando  $\vec{\mathcal{E}} \parallel d\vec{S}$  y  $|\vec{\mathcal{E}}| = \text{constante}$  sobre la superficie  $\mathcal{S}$ . Nótese que, en ese caso,  $\Phi_{\mathcal{S}} = \mathcal{E}S$  y podemos usarlo para obtener  $\mathcal{E}$ .

- Para generalizarlo a la carga total  $Q$  encerrada por la superficie considerada, basta recordar que  $\vec{\mathcal{E}}$  cumple el principio de superposición.
- Respecto a las cargas no encerradas en  $S$ , basta darse cuenta de que producen flujo neto nulo.

### 4.3. Cálculo del campo eléctrico aplicando el Teorema de Gauss

Como se deduce de los comentarios anteriores, el Teorema de Gauss se puede aplicar para calcular el campo eléctrico en situaciones donde, debido a la simetría, es posible expresar el flujo de forma sencilla. De hecho, nos centraremos en situaciones en las que podemos escribir el flujo como  $\Phi_{\mathcal{S}} = \mathcal{E}S$ . Veámoslo en varios casos concretos.

#### 4.3.1. Esfera de radio $a$ cargada uniformemente con densidad volúmica de carga $\rho_o$ .

Como es evidente, la simetría que presenta la distribución de carga conducirá a una estructura de campo electrostático con líneas radiales, a modo del creado por una carga puntual (Figura 4.3). En este sentido la elección de la superficie  $\mathcal{S}$  para aplicar el Teorema de Gauss será en forma de superficie esférica concéntrica a la de la distribución. Por otra parte, teniendo en cuenta que el flujo está determinado por las cargas

<sup>3</sup>Este concepto generaliza el de ángulo plano, el cual, se define como  $s_{\perp}/r$  (es decir, arco/radio). Así, el valor máximo del ángulo plano puede obtenerse en una circunferencia como  $\theta_M = 2\pi r/r = 2\pi$ . En el ángulo sólido, sin embargo,  $\Omega_M = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$ .



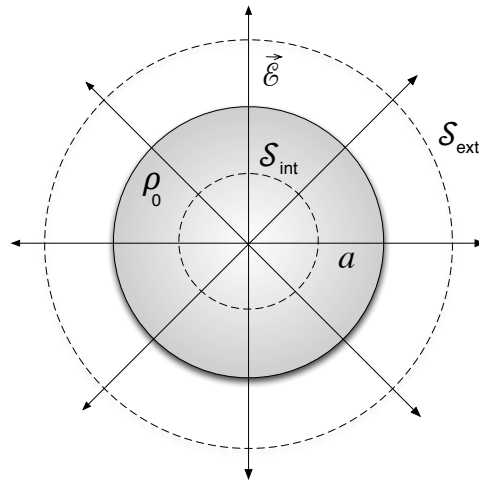


Figura 4.5: Superficies (denominadas “gaussianas”) esféricas consideradas para calcular el campo electrostático en el interior y en el exterior de una esfera de radio  $a$  cargada uniformemente con densidad volúmica de carga  $\rho_o$

“encerradas” resulta natural pensar que la expresión de  $\mathcal{E}$  depende de si nos referimos a puntos interiores o exteriores a la esfera de carga. Por tanto, haremos el estudio distinguiendo entre ambos casos.

#### Campo en el exterior:

Para calcular el campo eléctrico en el exterior de la esfera aplicando el Teorema de Gauss, consideremos una superficie esférica  $\mathcal{S}_{\text{ext}}$  de radio  $r_e > a$  a través de la cual calculamos el flujo (ver Figura 4.5). Teniendo en cuenta la definición de flujo dada en 4.2:

$$\Phi = \oint_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \mathcal{E}_r 4 \pi r_e^2$$

siendo  $\mathcal{E}_r$  la componente radial del campo eléctrico (por simetría,  $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_r \hat{r}$ ).

Por otra parte, de acuerdo con el Teorema de Gauss, el flujo debe ser:

$$\Phi = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_o \frac{1}{\epsilon_o}$$

donde  $Q = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_o$  es la carga total de la esfera.

Igualando las dos expresiones del flujo y despejando  $\mathcal{E}_r$  se tiene que:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_o a^3}{3 \epsilon_o} \frac{1}{r_e^2} \hat{r} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_o r_e^2} \hat{r} \quad (4.4)$$

Ésta es la expresión del campo eléctrico para cualquier punto situado fuera de la esfera, a una distancia  $r_e$  del centro de ésta. Nótese que es la misma que correspondería a una carga puntual del mismo valor, colocada en el centro de la esfera.

### Campo en el interior:

Consideremos ahora una superficie esférica  $\mathcal{S}_{\text{int}}$  de radio  $r_i < a$  (ver Figura 4.5), y procedamos de forma análoga, escribiendo las expresiones del flujo de campo eléctrico a través de dicha superficie:

$$\Phi = \oint_{\mathcal{S}_{\text{int}}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \mathcal{E}_r 4 \pi r_i^2$$

y

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r_i^3 \rho_0$$

donde  $Q_i = \frac{4}{3} \pi r_i^3 \rho_0$  es la carga “encerrada” dentro de la superficie gaussiana de radio  $r_i$ .

Igualando las dos expresiones anteriores del flujo se obtiene  $\mathcal{E}_r$ , que permite saber cuál es el campo eléctrico en un punto cualquiera situado dentro de la esfera cargada, a una distancia  $r_i$  de su centro:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_0}{3 \epsilon_0} r_i \hat{r} \equiv \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 a^3} r_i \hat{r} \quad (4.5)$$

donde  $Q$  sigue siendo la carga total de la esfera.

En la figura 4.6 se muestra cómo varía el campo eléctrico con la distancia al centro de la esfera, atendiendo a las expresiones 4.4 y 4.5.

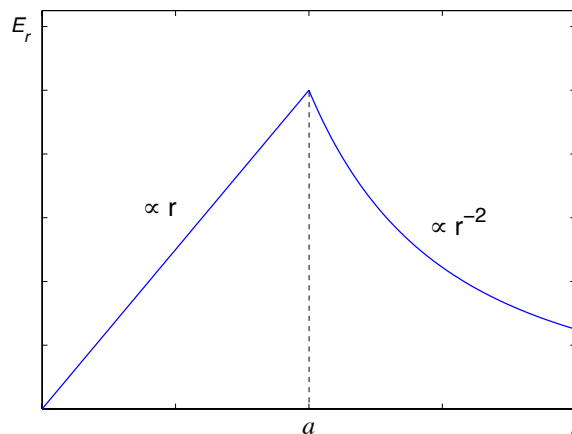


Figura 4.6: Gráfica de  $\mathcal{E}_r$  para una esfera de radio  $a$  cargada uniformemente

### 4.3.2. Cilindro de radio $a$ y longitud infinita, uniformemente cargado

De nuevo, este es un problema que reúne condiciones de simetría que permiten encontrar una superficie “gaussiana” en la cual el cálculo del flujo resulta trivial. Obviamente no hay cilindros “infinitos”, pero el cálculo siguiente da una buena aproximación al valor del campo si se cumple que la longitud  $L$  del cilindro es mucho mayor que  $a$ .

Supongamos que el cilindro de la figura 4.7 está uniformemente cargado con densidad volúmica  $\rho_o$ . Vamos a calcular el campo eléctrico dentro y fuera del cilindro aplicando el Teorema de Gauss.

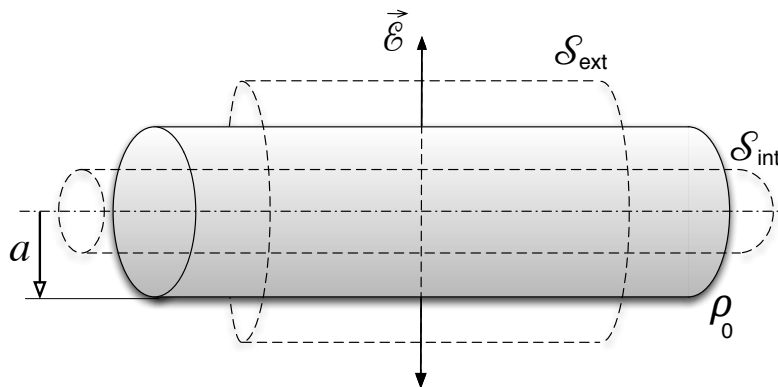


Figura 4.7: Superficies gaussianas consideradas para calcular el campo electrostático en el interior y en el exterior de un cilindro muy largo, de radio  $a$  cargado uniformemente con densidad  $\rho_o$ .

La simetría del problema nos indica que  $\vec{E} = E \hat{r}$ . Tomaremos, por tanto, superficies gaussianas de forma cilíndrica, coaxiales al cilindro cargado. Nótese que el flujo es nulo a través de las bases de dichas superficies, de modo que el flujo total proviene de la zona lateral.

#### Campo en el exterior:

Calculemos el flujo a través de la superficie lateral cilíndrica  $SL$  de radio  $r_e$  mayor que el radio del conductor  $a$  y longitud  $L_e$  (ver Figura 4.7).

$$\Phi = \int_{SL} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_\rho \int_{SL} dS = E_\rho 2 \pi r_e L_e$$

Teniendo en cuenta que al aplicar el teorema de Gauss debe cumplirse:

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_o} = \frac{\rho_o \pi a^2 L_e}{\epsilon_o},$$

Despejando se obtiene el campo electrostático:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_o a^2}{2 \epsilon_o} \frac{1}{r_e} \hat{r}$$

### Campo en el interior:

Lo que cambia respecto a la situación anterior es que en este caso la carga encerrada dentro de la superficie gaussiana cilíndrica ya no es la que correspondería a todo el cilindro, sino la contenida en el volumen  $\pi r_i^2 L_i$ , luego  $q = \rho_o \pi r_i^2 L_i$ . Así:

$$\int_{SL} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \mathcal{E}_\rho \int_{SL} dS = \mathcal{E}_\rho 2 \pi r_i L_i = \frac{\rho_o \pi r_i^2 L_i}{\epsilon_o}$$

Despejando el campo eléctrico se obtiene:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_o}{2 \epsilon_o} r_i \hat{r}$$

La representación gráfica del campo eléctrico en función de la distancia al centro del cilindro cargado se propone como ejercicio. Tendrá un aspecto muy similar a la de la Figura 4.6.

Se propone también como ejercicio calcular el campo eléctrico generado por un hilo infinito uniformemente cargado con una densidad lineal de carga  $\lambda$  a una distancia  $r$  del hilo. Nótese que el procedimiento será del todo análogo al desarrollado para el campo creado en el exterior por el cilindro cargado que se acaba de ver. De hecho, el resultado puede obtenerse directamente sin más que sustituir la carga por unidad de longitud en la distribución cilíndrica,  $\pi \rho_o a^2$ , por  $\lambda$  en la expresión del campo en el exterior.

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\lambda}{2 \epsilon_o} \pi \frac{1}{r_e} \hat{r} \quad (4.6)$$

### 4.3.3. Lámina plana infinita cargada con densidad $\sigma$

Esta geometría (simetría traslacional en el plano de la lámina) representa el último conjunto de problemas que se van a resolver aplicando el Teorema de Gauss. Vamos a resolverlo para el caso de una lámina bidimensional, aunque el método puede servir como pauta para casos análogos como sería una lámina “gruesa” con densidad volúmica de carga o asociaciones de láminas cargadas y paralelas entre sí. Como se indica en la figura, la simetría traslacional determina que las líneas de  $\mathcal{E}$  sean perpendiculares a la lámina. Resulta por tanto sencillo aplicar el teorema

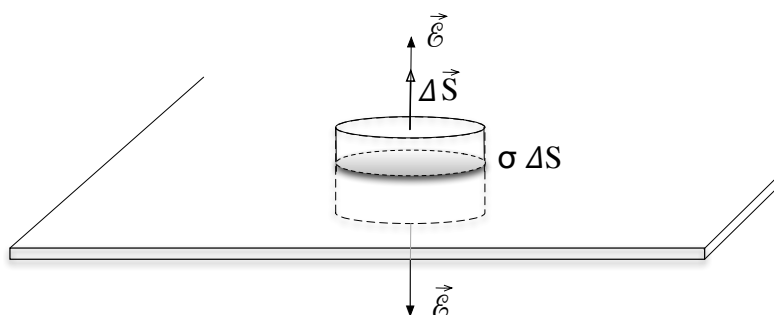


Figura 4.8: Superficie cilíndrica considerada para calcular el campo electrostático alrededor de una lamina infinita de carga

de Gauss en una superficie cilíndrica cuyo eje sea también perpendicular a la lámina. En este caso, al existir flujo solamente a través de las bases de la superficie gaussiana cilíndrica, se tendrá que:

$$\oint \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = 2\mathcal{E}\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Se recomienda como ejercicio que se verifique que esta expresión coincide con el límite para distancias pequeñas de la fórmula 3.9, campo eléctrico obtenido por el método de superposición para un disco cargado.



## Capítulo 5

# POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Vamos a extender al caso del campo electrostático los conceptos de trabajo y energía introducidos en los capítulos de Mecánica. En particular, comenzaremos verificando que la fuerza electrostática presenta carácter conservativo. Esto conducirá a introducir el concepto de energía potencial electrostática  $\mathcal{U}$  y, a partir de él, el de potencial electrostático  $\mathcal{V}$ . Este último resultará de gran interés por múltiples razones. Por una parte, el cálculo del potencial puede resultar mucho más directo que el del campo  $\vec{\mathcal{E}}$ , y este se puede obtener eventualmente a partir de  $\mathcal{V}$ . Por otra parte, a nivel práctico, el potencial se puede “medir” con instrumentación y métodos sencillos, de modo que permite una rápida caracterización de los sistemas eléctricos.

### 5.1. Definición de potencial electrostático

Vamos a considerar que una carga puntual  $q$  se desplaza entre los puntos  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$ , en el seno del campo eléctrico creado por otra carga  $q'$  (Fig. 5.1), y evaluaremos el trabajo que realiza el campo en dicho desplazamiento. La expresión del campo creado por  $q'$  es:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{q'}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

El trabajo <sup>1</sup> realizado por el campo eléctrico  $\vec{\mathcal{E}}$  en el recorrido  $\Gamma$  entre  $a$  y  $b$ :

$$W_{a \rightarrow b} = \int_{\Gamma} q \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = q \int_{\Gamma} \frac{q'}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr$$

---

<sup>1</sup>Recuérdese que el trabajo se calcula como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento.

siendo  $dl$  un desplazamiento infinitesimal a lo largo del camino  $\Gamma$ . En la expresión anterior se ha tenido en cuenta que el producto escalar  $\hat{r} \cdot d\vec{l} = dr$ , tal y como puede verse en la figura 5.1.

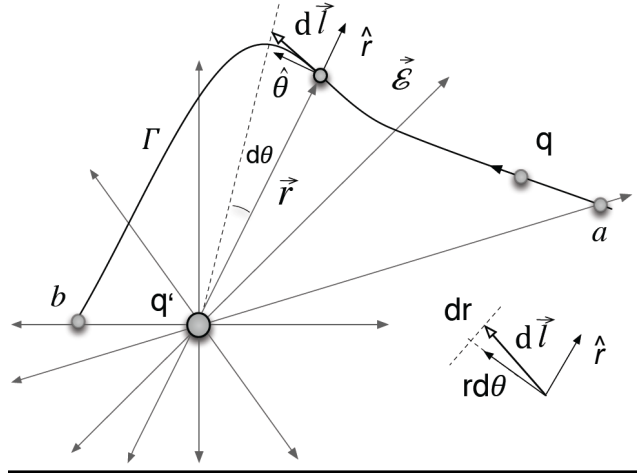


Figura 5.1: Desplazamiento por el camino  $\Gamma$  (de a hasta b) de una carga puntual  $q$  en el seno del campo eléctrico generado por  $q'$ .

$$W_{a \rightarrow b} = \frac{q q'}{4 \pi \epsilon_o} \int_{\Gamma} \frac{dr}{r^2} = \frac{q q'}{4 \pi \epsilon_o} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \equiv \mathcal{U}_a - \mathcal{U}_b = -\Delta \mathcal{U}$$

Es decir, el resultado es independiente de  $\Gamma$ , solo depende de los extremos (distancias  $r_a$  y  $r_b$ ), y por lo tanto, podemos definir la función **energía potencial electrostática** de modo que  $W_{a \rightarrow b} = -\Delta \mathcal{U} = \mathcal{U}_a - \mathcal{U}_b$ . De hecho, esta relación determina la función  $\mathcal{U}$  salvo una constante global arbitraria  $C$ .

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = \frac{q q'}{4 \pi \epsilon_o} \frac{1}{r} + C$$

Para los problemas en los que no hay carga en el infinito, se suele tomar allí el origen de potencial:  $\mathcal{U}(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  ( $C = 0$ ).

La energía potencial cumple el principio de superposición, de forma que, si la carga  $q$  está en presencia de un conjunto de cargas  $\{q'_i\}$ , siendo  $r_i$  la distancia a cada una de ellas, la energía potencial será:

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \left( \frac{q'_i}{r_i} \right) q$$



Para distribuciones continuas el sumatorio se transforma en integral, y la carga  $q'_i$  en un diferencial de carga  $dq$ , como ya se ha visto en los capítulos anteriores: en distribuciones lineales de carga  $dq = \lambda dl$ , en distribuciones superficiales  $dq = \sigma dS$ , y en distribuciones volumétricas  $dq = \rho dV$ . En general, lo expresaremos:

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \int \frac{q dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.1)$$

siendo  $\vec{r}$  la posición ocupada por  $q$  y  $\vec{r}'$  la que ocupa  $dq$ . (El denominador del integrando es el módulo del vector de posición de la carga  $q$  respecto a  $dq$ , es decir la distancia entre ambas.) En la práctica es habitual utilizar la notación simplificada introducida en el capítulo anterior, escribiendo:

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \int \frac{q dq}{|\vec{r}|} \quad (5.2)$$

donde  $\vec{r}$  representa el vector de posición de la partícula  $q$  respecto a la posición que ocupa el elemento  $dq$ .

En lugar de manejar la energía potencial electrostática, que depende de la partícula  $q$  “de prueba”, es habitual trabajar con la **energía potencial por unidad de carga**, más conocida como **potencial**, que se denota  $\mathcal{V}$ :

$$\mathcal{V}(\vec{r}) = \frac{\mathcal{U}(\vec{r})}{q}$$

Es importante destacar que el potencial electrostático puede relacionarse con el campo electrostático. De hecho, la variación de potencial asociada a un desplazamiento infinitesimal  $d\vec{l}$  viene dada por<sup>2</sup>:

$$\delta\mathcal{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} \quad (5.3)$$

En cuanto a las unidades, la energía potencial electrostática se mide en Julios (1 J = 1 N m), y el potencial en Voltios (1 V = 1 J/C).

<sup>2</sup>Aclaración relativa a la notación. A lo largo de este capítulo se utilizan las expresiones  $\delta\mathcal{V}$  y  $d\mathcal{V}$  asociadas al potencial electrostático. La primera, como define la ecuación 5.3, corresponde a la variación que experimenta  $\mathcal{V}$  al pasar de un punto a otro del espacio, es decir la diferencia de potencial entre dos puntos muy próximos. La segunda,  $d\mathcal{V}$  denotará el potencial creado en un punto por un elemento diferencial de carga  $dq$ , según indica 5.4.

## 5.2. Ejemplos de cálculo del potencial

Veamos algunos ejemplos de cálculo del potencial creado por distribuciones de carga, utilizando diferentes métodos.

### 5.2.1. Mediante el principio de superposición

En primer lugar recurriremos al principio de superposición, es decir, aplicaremos la expresión 5.1 que, en el caso de distribuciones continuas de carga, “acumula” las contribuciones de los elementos diferenciales que la componen. Concretamente:

$$\mathcal{V}(\vec{r}) = \int d\mathcal{V} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|} \quad (5.4)$$

Nótese que  $dq$  representa a cada uno de los infinitos elementos de carga que formarán parte de la distribución continua. El ejemplo que se va a ver a continuación corresponde a una distribución lineal de carga, un anillo de radio  $R$  y carga  $Q$ , distribuida de forma uniforme en el anillo. Veremos que  $dq$  será la carga de una porción infinitesimal del anillo (un pequeño arco de circunferencia, de longitud  $dl$ ).

#### Potencial creado por un anillo cargado

Nos vamos a referir al ejemplo de la figura, que simboliza un anillo cargado con densidad uniforme, así como su eje de simetría, en cuyos puntos se quiere evaluar el potencial.

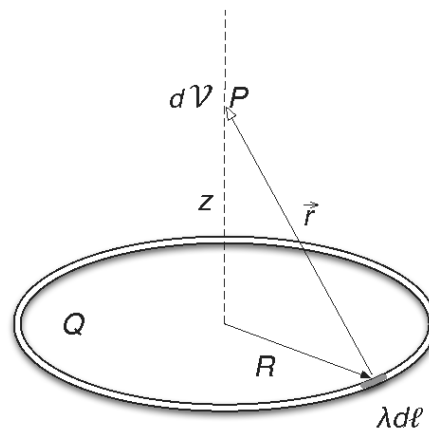


Figura 5.2: Anillo cargado con densidad uniforme  $\lambda = Q/(2\pi R)$ .

$$dq = \lambda dl$$

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{V} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}} \int dl = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}}$$

En este caso la integral ha resultado ser trivial. Es inmediato comprobar que la derivada  $(-\delta\mathcal{V}/dz)$  de la expresión anterior proporciona el valor del campo  $\mathcal{E}_z$  para el anillo, que ya se obtuvo en un tema anterior. (ecuación 3.8).

### 5.2.2. Cálculo del potencial $\mathcal{V}$ a partir del campo $\vec{\mathcal{E}}$

Vamos a calcular a continuación el potencial electrostático asociado a un hilo infinito, cargado uniformemente con una densidad lineal de carga  $\lambda$ . Como se vio en la ecuación 4.6 del capítulo anterior, el campo eléctrico creado por esta distribución es:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

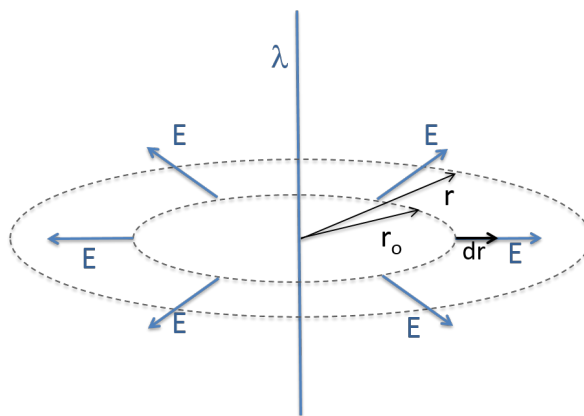


Figura 5.3: Hilo infinito cargado con densidad uniforme  $\lambda$ .

<sup>3</sup>Nótese que  $R$  es una constante y que  $z$  representa la altura sobre el origen del punto  $P$  en el que se está calculando el valor del potencial; la distancia entre cualquier  $dq$  del anillo y  $P$  es constante. La parte del integrando que depende de  $R$  y  $z$  puede salir fuera, ya que es constante al hacer la integral recorriendo el anillo, “sumando” las contribuciones de todos los  $dq$ .

Podremos obtener la diferencia de potencial entre dos puntos a distancias  $r_o$  y  $r$  del hilo, integrando la anterior expresión del campo a lo largo de la dirección radial, perpendicular al hilo, con límites entre  $r_o$  y  $r$ :

$$\mathcal{V}(r) - \mathcal{V}(r_o) = - \int_{r_o}^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \frac{dr}{r}$$

$$\mathcal{V}(r) - \mathcal{V}(r_o) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r_o}{r}$$

Es inmediato comprobar que para la situación de la figura, con  $\lambda$  positiva, la diferencia que se acaba de calcular es negativa (el potencial eléctrico disminuye conforme nos alejamos del hilo)

### 5.3. Superficies equipotenciales

De acuerdo a todo lo expuesto hasta el momento, el potencial electrostático es una función cuyos valores dependen del punto del espacio en el que se calcule. Por ejemplo, si se trata del que crea una carga puntual, podemos representarlo mediante la expresión:

$$\mathcal{V}(x, y, z) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \equiv \frac{q}{4 \pi \epsilon_o r}$$

si tomamos como origen de coordenadas el lugar que ocupa la carga y el origen de potencial en el infinito.

Nótese que los valores de  $\mathcal{V}$  son constantes en aquellos conjuntos de puntos que verifiquen la condición  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , que evidentemente corresponden a las superficies esféricas centradas en la carga. Los lugares geométricos de puntos en los que el potencial toma el mismo valor determinan las **superficies equipotenciales**.

Las superficies equipotenciales no pueden cortarse nunca. Además, son perpendiculares a las líneas de fuerza del campo electrostático. Esto puede entenderse fácilmente ya que a lo largo de ellas las cargas se desplazan sin necesidad de trabajo eléctrico (dado que no hay variación de potencial) y, por tanto, deben ser perpendiculares al campo eléctrico en cada punto. ( $dW = \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = 0$ , luego  $\vec{\mathcal{E}} \perp d\vec{l}$ )

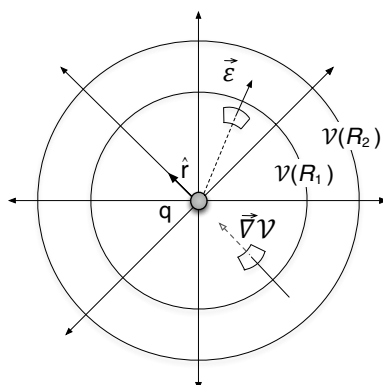


Figura 5.4: Líneas de campo electrostático y superficies equipotenciales alrededor de una carga puntual. Se indica también la dirección del gradiente de la función potencial.

Estas propiedades del campo y del potencial que se ilustran en la figura para el caso de la carga puntual pueden, como veremos a continuación, expresarse de modo muy general para el campo y el potencial creados por cualquier distribución de carga.

## 5.4. Relación entre $\vec{\mathcal{E}}$ y $V$

### 5.4.1. Gradiente del potencial

Recordemos por una parte que la relación entre campo y variaciones de potencial se expresa (ecuación 5.3):

$$\delta\mathcal{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l}$$

lo cual significa que el incremento que experimenta el potencial cuando nos desplazamos entre los puntos  $\vec{r}$  y  $\vec{r} + d\vec{l}$  viene dado por  $-\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l}$  como indica la figura 5.5. Si nos enfrentamos a un problema unidimensional, con dependencia de una sola variable (por ejemplo, la variable  $x$ ), tendríamos:

$$\delta\mathcal{V} = -\mathcal{E}_x dx \Rightarrow \mathcal{E}_x = -\frac{\delta\mathcal{V}}{dx}$$

Análogamente podrían escribirse las expresiones para  $\mathcal{E}_y$  y  $\mathcal{E}_z$ , como las correspondientes derivadas direccionales del potencial, a lo largo de las direcciones  $y$  y  $z$ , respectivamente.

En general, el vector campo puede obtenerse a partir del potencial, como la generalización a tres dimensiones de la fórmula unidimensional,

calculando cada componente de la forma descrita.

$$\vec{\mathcal{E}} = - \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \hat{k} \right) \equiv - \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right)$$

que de forma compacta se escribe mediante la relación:

$$\vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla} \mathcal{V} \quad (5.5)$$

donde el operador  $\vec{\nabla}$  representa el **Gradiente** (del potencial en este caso)

En el caso concreto de simetría esférica, donde solo hay una variable relevante,  $r$ , la operación gradiente se realiza de modo simplificado mediante la expresión  $\vec{\nabla} \mathcal{V} = (\delta \mathcal{V} / dr) \hat{r}$

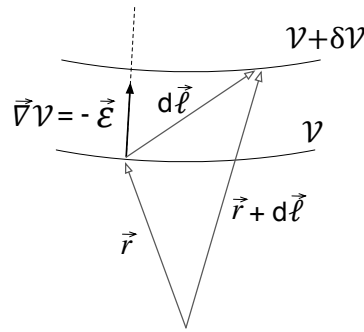


Figura 5.5: Representación gráfica de la variación del potencial entre dos superficies equipotenciales, su gradiente y la relación con el campo electrostático.

Insistamos, para concluir el análisis que, de manera evidente, se cumple que el vector gradiente (y por tanto el campo eléctrico) es perpendicular a las superficies equipotenciales, ya que para cualquier desplazamiento  $d\vec{l}$  que tenga lugar en dichas superficies,

$$\delta \mathcal{V} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \mathcal{V} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \mathcal{V} \perp d\vec{l}$$

También es obvio que  $\vec{\nabla} \mathcal{V}$  apunta en la dirección de máxima variación del potencial, que corresponde con la perpendicular a las equipotenciales, ya que para una misma variación  $d\mathcal{V}$ , el desplazamiento más corto es a lo largo de la perpendicular.

#### 5.4.2. Cálculo de $\vec{\mathcal{E}}$ a partir del potencial

La expresión 5.5 es de gran importancia porque, como ya se dijo, hay situaciones en las que se dispone de la función  $\mathcal{V}(x, y, z)$  y podemos calcular el campo  $\vec{\mathcal{E}}$  de un modo más sencillo que por integración directa.

Por ejemplo, ya hemos indicado que en los casos del apartado 5.2, se puede verificar que la expresión de  $\vec{\mathcal{E}}$  obtenida por este método coincide con la calculada mediante la técnica de superposición. Digamos por completitud que en el caso del anillo, resulta evidente que el potencial en el eje cumple:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = -\mathcal{E}_z$$

Si recordamos la expresión (calculada antes usando el principio de superposición) del potencial creado por un anillo en puntos del eje de simetría ( $z$ ) perpendicular al anillo y que pasa por su centro, se tiene:

$$\mathcal{V} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Es inmediato comprobar que la derivada de esta expresión respecto a  $z$ , cambiada de signo, nos proporciona el campo eléctrico en puntos del eje  $z$ .

$$E(z) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_o\sqrt{R^2 + z^2}}\right) = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_o(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

## 5.5. Energía electrostática de una distribución

### 5.5.1. Definición

Hemos visto que para una carga puntual en presencia de un cierto campo eléctrico puede definirse una función energía potencial, de modo que cuando la carga se mueve entre dos puntos  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$ , el campo realiza un trabajo  $W_{a \rightarrow b} = -\Delta U = \mathcal{U}_a - \mathcal{U}_b$ . En vista de esto podemos inferir que para crear una cierta distribución de carga tendremos que realizar un trabajo opuesto al que realizará el campo en dicho proceso. Por ejemplo, para construir un sistema formado por dos cargas puntuales iguales separadas entre sí por una distancia  $d$  tendremos que colocar la segunda

carga en el potencial de la primera, es decir, invertiremos una energía que será igual a:

$$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

Nótese que esta energía queda “almacenada” si el sistema de las dos cargas permanece estable. Obviamente, para que así sea es necesaria la acción de fuerzas adicionales que mantengan las cargas ancladas en sus posiciones. Si se libera el sistema, las dos cargas se separarían de nuevo por acción de su repulsión mutua, liberando justamente la energía almacenada.

Calculemos el trabajo necesario para crear una distribución formada por un conjunto de  $n$  cargas puntuales. Esto implica evaluar el trabajo que hay que realizar **contra** el campo (nótese el signo en  $\Delta\mathcal{U}$ ) al ir llevando cada carga “desde el infinito” hasta su posición final (ver Fig. 5.6). Supondremos que el proceso se realiza una por una, de modo que cuando la carga  $q_i$  llega a la posición  $\vec{r}_i$  lo hace en presencia de las  $i - 1$  anteriores.

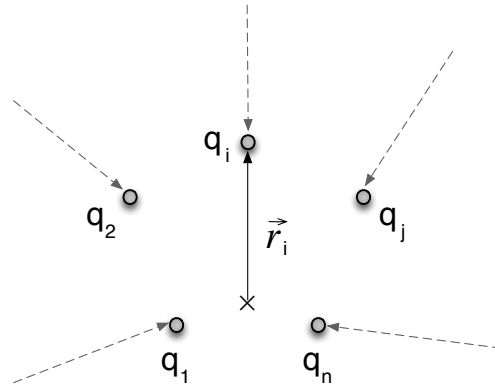


Figura 5.6: Creación de una distribución discreta de cargas llevando cada una de ellas desde el infinito hasta su posición.

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{\infty \rightarrow \vec{r}_1}^1 = \mathcal{U}(\vec{r}_1) = 0 \quad (\text{para traer la primera, } q_1) \\ W_{\infty \rightarrow \vec{r}_2}^2 = \mathcal{U}_1(\vec{r}_2) = q_2 \mathcal{V}_1(\vec{r}_2) \quad (\text{para traer } q_2, \text{ estando ya } q_1) \\ W_{\infty \rightarrow \vec{r}_3}^3 = q_3 (\mathcal{V}_1(\vec{r}_3) + \mathcal{V}_2(\vec{r}_3)) \quad (\text{para traer } q_3, \text{ estando ya } q_1 \text{ y } q_2) \\ \vdots \\ W_{\infty \rightarrow \vec{r}_n}^n = \sum_{i=1}^{n-1} q_n \mathcal{V}_i(\vec{r}_n) \end{array} \right.$$



El trabajo total necesario para construir la distribución será:

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_{i=1}^n W_{\infty \rightarrow \vec{r}_i}^i = \sum_{i=1}^n \left( q_i \sum_{j < i} \mathcal{V}_j(\vec{r}_i) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left( \sum_{j \neq i} \mathcal{V}_j(\vec{r}_i) \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \mathcal{V}(\vec{r}_i) \equiv \mathcal{U}
 \end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado la notación:

- $\mathcal{V}_j(\vec{r}_i)$  es el potencial en  $\vec{r}_i$  debido a la carga  $q_j$ .
- $\mathcal{V}(\vec{r}_i)$  es el potencial total en  $\vec{r}_i$ .

Y también la propiedad, que se cumple para cualquier pareja  $q_i, q_j$  :  
 $q_i \mathcal{V}_j(\vec{r}_i) = q_j \mathcal{V}_i(\vec{r}_j)$

Por otra parte, si lo que tenemos es una distribución continua de carga, la expresión anterior se transforma en:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \mathcal{V}(\vec{r}) dV$$



## Capítulo 6

# ELECTROSTÁTICA EN MATERIALES CONDUCTORES

En este capítulo nos ocuparemos del comportamiento de los materiales conductores bajo la acción de campos electrostáticos.<sup>1</sup>

La característica esencial de los materiales conductores es que en presencia de un campo, por débil que sea, las cargas del material se van a desplazar a lo largo de las líneas de fuerza. Hay diversos aspectos que podríamos considerar acerca de la dinámica de dichas cargas pero, por el momento, nos centraremos en los denominados “estados de equilibrio”. Estos se alcanzarán cuando la distribución de las cargas en el conductor dé lugar a un campo total que sea nulo allí donde pudiera existir movimiento de las mismas.

Nos centraremos en conductores a los que se comunica carga y analizaremos la redistribución de la misma, sin atender al detalle del proceso entre sucesivos estados de equilibrio.

### 6.1. *Condiciones de equilibrio electrostático*

Vamos a demostrar que, utilizando el concepto de material conductor junto con principios básicos expuestos en los capítulos anteriores, se puede obtener la configuración de equilibrio en estos sistemas. Más concretamente, analizaremos la distribución de las cargas eléctricas una vez alcanzado el equilibrio, como respuesta a procesos inducidos por un agente externo: ceder/retirar cargas, someter a campos o potenciales, etc.

---

<sup>1</sup>Nota: aunque no sean sinónimos, en este contexto hablaremos indistintamente de conductores o de metales.

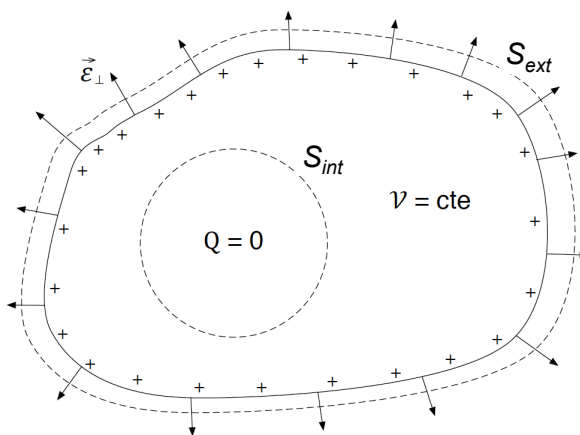


Figura 6.1: Esquema del estado de equilibrio de un conductor. Si el sistema posee carga neta, ésta se reparte a lo largo de su superficie.  $S_{ext}$  encierra la carga total, pero  $S_{int}$  no puede encerrar carga neta.

Hay una serie de aspectos específicos importantes para el análisis:

- En el interior de un conductor en equilibrio no puede existir campo electrostático (si existiera, las cargas se moverían, rompiendo la condición de equilibrio).
- Al ser nulo el campo en el interior, el potencial electrostático permanecerá constante en todo el volumen del conductor:

$$\delta\mathcal{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \mathcal{V} = cte.$$

- Al ser nulo el campo en el interior, no puede haber cargas en el seno del conductor, por lo que no puede haber densidad volúmica de carga:  $\rho=0$ . En un conductor en equilibrio, solo puede haber carga neta en su superficie.
- Solo puede existir campo electrostático en las superficies donde hay carga neta, siendo perpendicular a la superficie.<sup>2</sup>

Todos estos aspectos se ilustran en la figura 6.1.

Podemos calcular el campo en la superficie del conductor, (ver figura 6.2) aplicando la ley de Gauss para la superficie cilíndrica indicada. Tendremos que el flujo a través de esa superficie es:

$$d\Phi = \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} \quad (6.1)$$

<sup>2</sup>Cualquier otra opción rompería la condición de equilibrio. Por ejemplo, una componente de  $\vec{\mathcal{E}}$  paralela a la superficie provocaría el movimiento de cargas a lo largo de la misma.

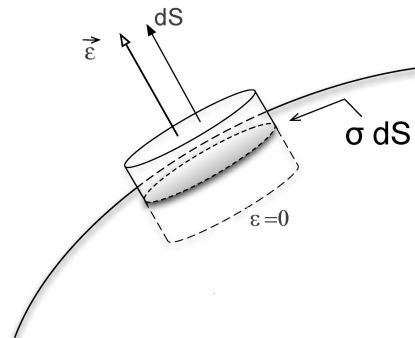


Figura 6.2: El campo electrostático creado por el elemento de carga en la superficie de un conductor cargado.  $\sigma dS$  representa la carga del conductor encerrada por la superficie gaussiana - cilíndrica - dibujada.

Por otra parte, de acuerdo con el teorema de Gauss:

$$d\Phi = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \quad (6.2)$$

de forma que, igualando ambas expresiones

$$\mathcal{E} \cdot dS = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.3)$$

La última expresión nos permite calcular el campo eléctrico en la superficie del conductor, conocida la densidad superficial de carga.

### 6.1.1. Ejemplo: Campo electrostático y potencial en presencia de una esfera conductora.

Vamos a ilustrar los conceptos anteriores mediante un ejemplo que permite una evaluación cuantitativa: el caso de una esfera conductora a la que se comunica una carga neta  $Q$  (ver figura 6.3). Evidentemente, la carga se distribuirá de forma uniforme sobre la superficie de la esfera, siendo  $\sigma = Q/4\pi a^2$  la densidad superficial de carga. Puede verse que en este problema cualquier superficie gaussiana esférica de radio  $r \geq a$  encierra a la carga total,  $Q$ , mientras que cualquier superficie gaussiana de radio  $r < a$  no contiene carga en su interior. Por tanto, por aplicación directa de la ley de Gauss se obtiene:

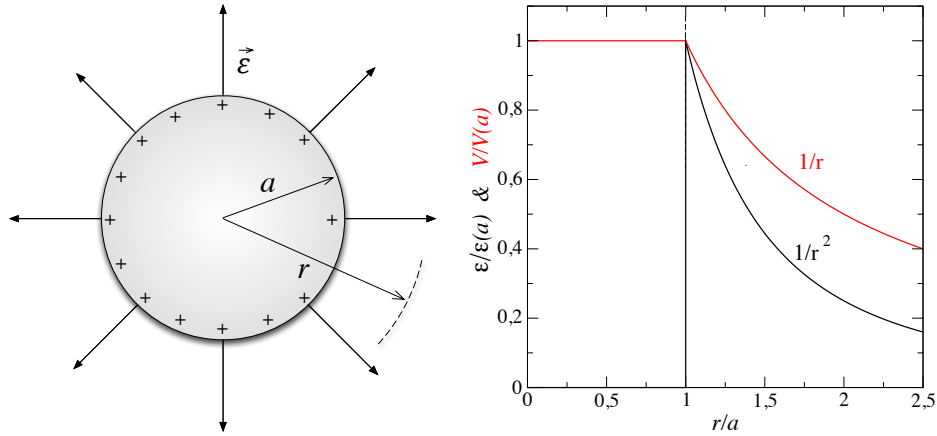


Figura 6.3: Distribución de carga en la superficie de una esfera conductora. En la gráfica de la derecha se ha representado el campo y el potencial en el interior y exterior de esa esfera.

$$\vec{\mathcal{E}} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & , \quad r \geq a; \\ 0 & , \quad r < a; \end{cases} \quad (6.4)$$

En cuanto al potencial, tomando como origen el infinito, se tiene que:

$$\mathcal{V} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & , \quad r \geq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & , \quad r < a \end{cases} \quad (6.5)$$

El valor del potencial en el interior del conductor en equilibrio, que ya se ha mencionado debe ser constante, se obtiene por continuidad del potencial exterior; la expresión de  $\mathcal{V}(r)$  cuando  $r=a$  proporciona el valor para  $r < a$ .

### 6.1.2. Ejemplo: Conductores con cavidades

Supongamos que se tiene un conductor que posee una cavidad interior (Figura 6.4). Las condiciones de equilibrio (esto es, carga y campo nulos en su volumen) determinan que las cargas netas (de existir) se localizarán en la superficie. Como este sistema posee dos superficies (interna y

externa), en un caso general podrá haber un reparto entre ambas. Dicho reparto vendrá dado por la presencia de posibles cargas adicionales, tanto en el interior de la cavidad, como en el exterior del conductor. Como hechos principales, que se reflejan en la figura, debe notarse que (i) al aplicar el teorema de Gauss a la superficie  $S$  se concluye que de haber carga en la cavidad se inducirá una carga de signo opuesto en la cara interna del conductor. En la figura se muestra un ejemplo con  $+Q$  en la cavidad y  $-Q$  en la cara interna del conductor. (ii) Si el conductor permanece aislado, la carga total que tuviera inicialmente debe mantenerse. Si inicialmente era neutro, aparecerá  $+Q$  en la cara externa (es decir una carga igual y opuesta a la de la superficie interna).

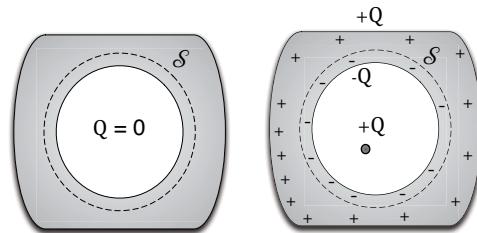


Figura 6.4: En un conductor aislado con una cavidad se inducen cargas de superficie al colocar una carga en el interior de la cavidad. En la figura se ilustra la situación correspondiente a un conductor inicialmente neutro.

Veamos un ejemplo con una geometría conocida. Supongamos que se tiene una corteza esférica conductora, de radios  $a$  y  $b$ , cargada con una carga  $Q$ , como en la figura 6.5a). Esa carga se distribuirá de forma uniforme sobre la superficie exterior, de radio  $b$ , de forma que:

$$\vec{\mathcal{E}} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & , \quad r \geq b; \\ 0 & , \quad r < b; \end{cases} \quad (6.6)$$

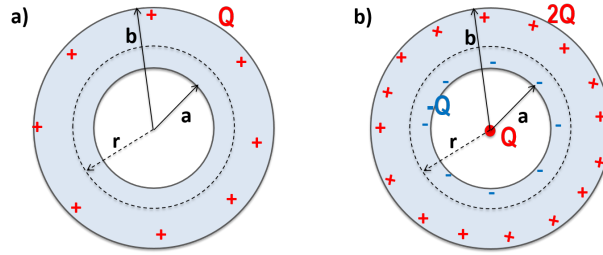


Figura 6.5: a) Corteza esférica conductora, cargada con carga  $Q$ . b) Distribución de carga en dicha corteza al introducir una carga puntual  $Q$  en el centro.

Obsérvese en ambos esquemas que la superficie gaussiana de radio  $r$  indicada en el conductor (en trazo discontinuo) no puede encerrar carga neta, ya que el campo en esa región es nulo.

¿Qué ocurre si se introduce una carga puntual  $Q$  en el centro de la corteza? La carga  $Q$  del conductor se redistribuirá, de forma que una vez alcanzado el equilibrio, quedará una carga  $-Q$  en la superficie interior, de radio  $a$  (lo que garantizará que el campo sea cero en el interior del conductor). Por otra parte, en la superficie exterior se tendrá una carga  $+2Q$  (la carga total del conductor debe mantenerse). De acuerdo con esta nueva distribución, el campo eléctrico en las tres regiones definidas en este sistema será:

$$\vec{\mathcal{E}} = \begin{cases} \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & , \quad r \geq b; \\ 0 & , \quad a < r < b; \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & , \quad r \leq a; \end{cases} \quad (6.7)$$

## 6.2. Apantallamiento y conexión a tierra

Las características de las situaciones de equilibrio electrostático en materiales conductores ofrecen una interesante opción en el campo de las aplicaciones, que es el denominado “apantallamiento”. Dicho brevemente, significa que aprovechando la propiedad de campo nulo en el interior del



conductor en equilibrio, podemos usar los metales como “capas de invisibilidad electrostática”. Como veremos bastará con introducir el sistema que se desea apantallar en una cavidad dentro de un conductor. En éste se inducirán las distribuciones de carga oportunas para crear un campo que anule el que pudiera crear una fuente externa, quedando libre de campo la zona de la cavidad.

### 6.2.1. Apantallamiento

Siguiendo con el conductor hueco visto en el apartado anterior, supongamos ahora que la carga  $+Q$  se sitúa en el exterior (Figura 6.6). Como se indica de modo esquemático en la figura, el material reacciona induciéndose cargas de superficie para producir campo nulo en la zona conductora. Nótese que, estando el conductor aislado, debe mantenerse la neutralidad global. Por otra parte, la ausencia de campo en el interior del conductor implica que en la zona de la cavidad la presencia de la carga externa resulta “invisible”. Decimos que el interior está apantallado.

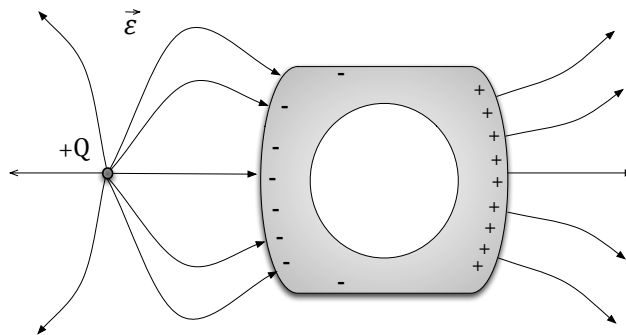


Figura 6.6: Conductor aislado en presencia de una carga exterior.

### 6.2.2. Conductor conectado a tierra

Para terminar esta sección, introduciremos el concepto de tierra. La idea básica es que se trata de una reserva inagotable de carga, a la que podemos conectar cualquier sistema, del que retirará o al que suministrará las cargas necesarias para que el conjunto (sistema + tierra) se mantenga a potencial **nulo**.

A nivel teórico, podemos identificar la tierra como un conductor de tamaño infinito, de modo que la variación de su potencial asociada a las variaciones de carga es prácticamente nula. Por ejemplo, si suponemos que es una esfera de radio enorme (partiendo de la ecuación 6.5) tenemos que

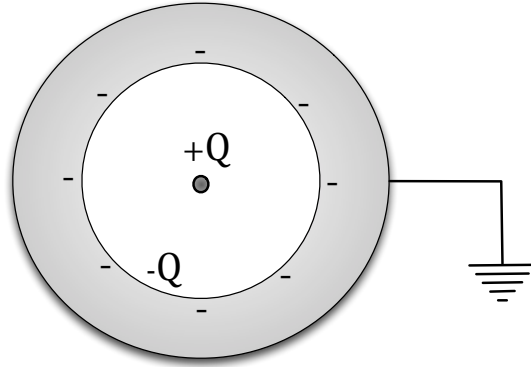


Figura 6.7: Conductor con una cavidad, conectado a tierra y al que se ha colocado una carga en su interior.

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 a} \rightarrow 0 \quad \text{ya que} \quad a \rightarrow \infty$$

En la práctica, los instrumentos e instalaciones eléctricas se conectan a tierra mediante una varilla clavada en el suelo en el exterior del edificio.

Por lo que se refiere a los problemas con conductores, la idea básica es que todo aquello que se conecte a tierra estará a potencial 0, pudiendo para ello tomar o ceder carga hasta un cierto valor no necesariamente nulo. Como ejemplo, véase la figura 6.7, en la cual la corteza conductora de radios  $a$  y  $b$  está conectada a tierra por lo que su potencial debe ser cero; eso necesariamente implica que no haya carga en la superficie exterior.<sup>3</sup> Puede verse que el exterior queda “apantallado” de la presencia de la carga  $+Q$  en la cavidad.

### 6.3. Capacidad. Concepto de condensador

Como hemos visto, cuando se establece el equilibrio electrostático en una región del espacio en presencia de conductores cargados, las cargas se distribuyen en las superficies de estos, de modo que  $\vec{\mathcal{E}}$  se anula en su interior, siendo en su superficie perpendicular a la misma.

En general, dado un sistema de conductores, el valor de  $\vec{\mathcal{E}}$  (y equivalentemente el de  $\mathcal{V}$ ) está determinado por los valores de sus cargas totales:

<sup>3</sup>Si la hubiera, el potencial del conductor sería  $Q_b/(4\pi\epsilon_0 r)$ , pero hemos visto que debe ser nulo, luego  $Q_b$  será cero.

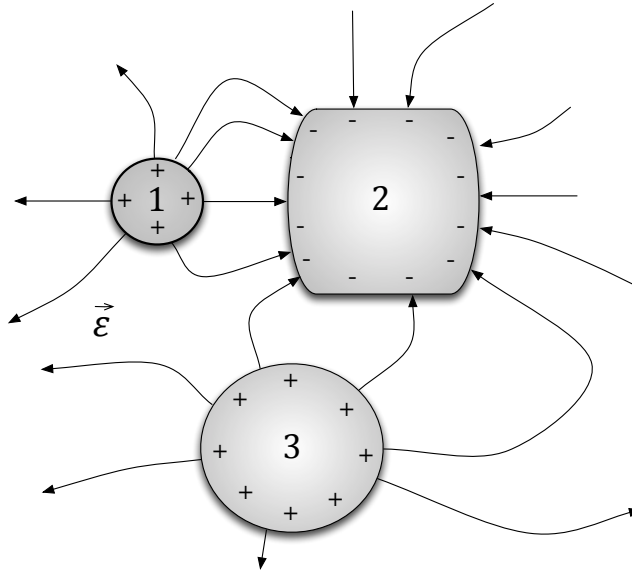


Figura 6.8: Objetos conductores cargados (etiquetados como 1, 2 y 3) en equilibrio electrostático. Se muestran las líneas del campo electrostático de modo esquemático.

$Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , sus geometrías y posiciones relativas. La influencia de la geometría se refleja en unos factores que pueden determinarse “a priori” para cada sistema de conductores. Veámoslo en algún caso sencillo.

**Ejemplo:** para una esfera conductora cargada (carga  $Q$ ) y de radio  $a$  sabemos que su potencial viene dado por la expresión (asumiendo que el potencial se anula en el infinito):

$$\mathcal{V} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a},$$

de modo que el coeficiente geométrico que determina  $\mathcal{V}$  a partir de  $Q$  es  $1/(4\pi\epsilon_0 a)$ . Al coeficiente geométrico que nos da la relación  $Q(\mathcal{V})$  se le llama **capacidad** y en este caso sería

$$C = 4\pi\epsilon_0 a$$

Nótese que (dependiendo tan solo de la geometría)  $C$  indica la facilidad con que un conductor es capaz de almacenar carga. Si  $C$  es grande,  $Q$  puede serlo sin que  $\mathcal{V}$  crezca demasiado. En el SI, la capacidad se mide en faradios (F):

$$\text{Faradio} = \frac{\text{Coulombio}}{\text{Voltio}}$$

Dado que los valores que toma  $C$  en los sistemas reales de interés son muy pequeños en estas unidades, en la práctica se utilizan subdivisiones:  $\mu F$ ,  $nF$  o  $pF$ .

Si se consideran sistemas de más de un conductor, la relación entre las cargas de cada uno de ellos y el potencial es más compleja. No obstante, hay algunos casos particulares en los que esta relación se simplifica notablemente. Por ejemplo, si se tienen dos conductores estando uno de ellos contenido en una cavidad del otro, como en el ejemplo de la figura 6.9. Como sabemos, el campo en la región interior, y por tanto el potencial, es independiente de lo que ocurra en el exterior. Además, las cargas en sus caras enfrentadas serían iguales y opuestas ( $+Q$  y  $-Q$  por ejemplo). Otro caso sería el de dos conductores planos, enfrentados, cargados con  $+Q$  y  $-Q$  respectivamente (figura 6.10.).

Los dos sistemas mencionados en el párrafo anterior son ejemplos de **condensadores**, que actúan como “almacenes” de carga (y de energía) en los circuitos eléctricos. La diferencia de potencial entre los dos conductores se relaciona exclusivamente con la carga  $Q$  a través de un coeficiente puramente geométrico, de modo que tenemos

$$Q = C\Delta\mathcal{V}$$

donde  $Q$  es el valor absoluto de la carga (de cualquiera de los dos conductores) y  $\Delta\mathcal{V}$  la diferencia de potencial (tomada con signo positivo) entre los conductores. Aquí  $C$  es la capacidad del condensador. Veámoslo en algunos casos concretos:

### Ejemplo 1: el condensador esférico

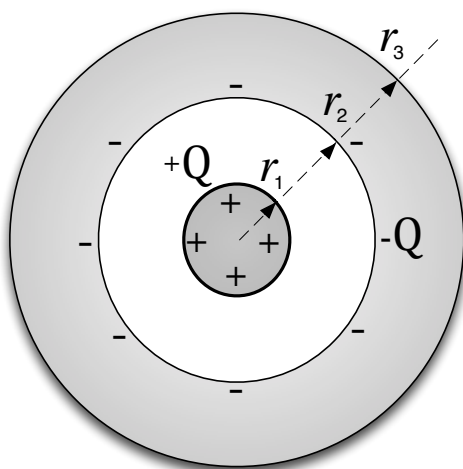


Figura 6.9: Condensador esférico, formado por un conductor interior macizo (radio  $r_1$ ) y una corteza esférica concéntrica, de radios  $r_2$  y  $r_3$ .

La diferencia de potencial entre el conductor cargado con  $+Q$  y el cargado

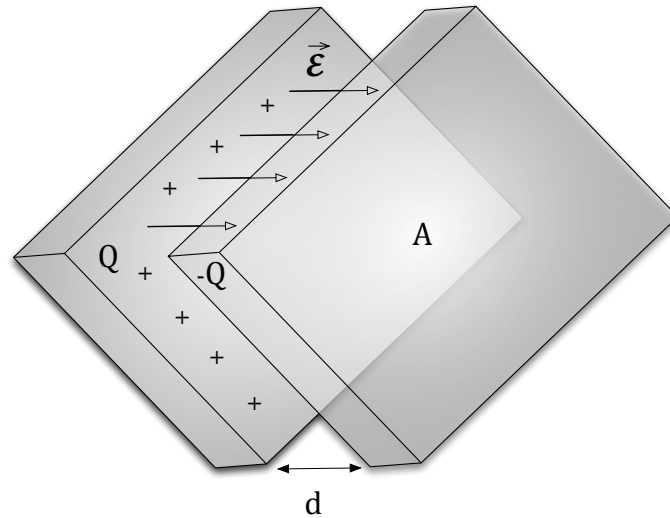


Figura 6.10: Condensador plano, de placas paralelas con sección  $A$  y separadas por una distancia  $d$ .

con  $-Q$  será:

$$\Delta\mathcal{V} = V(r_1) - V(r_2) = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{Q}{\Delta\mathcal{V}} = 4\pi\epsilon_o \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

### Ejemplo 2: el condensador plano

En la práctica, la región situada entre dos conductores planoparalelos muy próximos (a los que suele llamarse placas) está apantallada del exterior. Consideremos dos placas de superficie  $A$ , separadas una distancia  $d$  y cargadas, una con  $Q$  y otra con  $-Q$ . En esta geometría, los efectos de dispersión de las líneas de campo en los extremos serán despreciables. Entonces, podemos suponer que  $\mathcal{E}$  es uniforme entre los conductores y calcularlo como la suma del creado por dos planos cargados, uno con  $\sigma = Q/A$  y otro con  $-\sigma$ .

$$\Delta\mathcal{V} = \mathcal{E} d = \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_o} - \frac{-\sigma}{2\epsilon_o} \right) d = \frac{\sigma}{\epsilon_o} d = \frac{Q d}{\epsilon_o A}$$

con lo cual, en este caso

$$C = \frac{\epsilon_o A}{d}$$

Por hacernos una idea de valores típicos de capacidad en condensadores, para una superficie de las placas de unos  $10 \text{ cm}^2$  y una separación entre ellas de  $1 \text{ mm}$ , se obtiene una capacidad del orden de los nanofaradios (nF).

#### 6.4. Densidad de energía electrostática

Basándonos en el caso de un condensador plano y aprovechando la sencillez de las expresiones matemáticas que lo caracterizan, vamos a introducir un nuevo concepto relacionado con la energía que almacena un sistema de cargas. Supongamos que el condensador tiene cargas  $+Q$  y  $-Q$  en sus placas y que estas se hallan a una diferencia de potencial  $\Delta\mathcal{V}$ . Según se ha visto en la sección 5.5 este sistema almacena una energía dada por:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = \frac{1}{2}(Q\mathcal{V}^+ - Q\mathcal{V}^-) = \frac{1}{2} Q \Delta\mathcal{V} = \frac{1}{2} C \Delta\mathcal{V}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

donde hemos utilizado que todas las cargas sobre la placa positiva están al mismo potencial ( $\mathcal{V}^+$ ), y las de la placa negativa a  $\mathcal{V}^-$ .

Debe notarse que  $U$  puede expresarse de diferentes modos, dependiendo de las variables de interés en cada caso. Por otra parte, existe una opción adicional, que consiste en referirse al campo electrostático entre las placas. Así pues, usando, por ejemplo que  $\mathcal{E} = \sigma/\epsilon_0$  y  $Q = \sigma A$  tenemos:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 A d$$

es decir

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 \text{vol},$$

siendo *vol* el volumen entre las placas.

Puesto que en este sistema el campo está básicamente confinado en el espacio entre las placas, podemos interpretar que la energía se encuentra en el volumen en el cual las placas crean un campo, y considerar que existe una densidad de energía  $\epsilon_0 \mathcal{E}^2/2$  allí donde existe  $\mathcal{E}$ . Esta interpretación de la energía electrostática, en términos del campo eléctrico que crean las cargas asociadas es, de hecho, general. Como ejemplo, en un sistema muy diferente, el lector la puede verificar para el caso de una esfera (no conductora) con densidad volúmica de carga.<sup>4</sup>

<sup>4</sup>La expresión de la energía electrostática almacenada en una esfera con densidad de

---

carga uniforme se puede obtener a partir de la expresión  $\mathcal{U} = \int u \, dV = \int u_{int} \, dV_{int} + \int u_{ext} \, dV_{ext}$ , que implica integrar por separado en el interior y exterior de la esfera, utilizando las expresiones de  $\mathcal{E}_{int}$  y  $\mathcal{E}_{ext}$  ya conocidas.





## Capítulo 7

# ELECTROSTÁTICA EN MATERIALES DIELECTRICOS

En este capítulo estudiaremos algunos aspectos básicos del comportamiento de otro tipo de materiales, los dieléctricos, bajo la acción de campos electrostáticos. Como una aplicación, analizaremos el efecto de la presencia de un material dieléctrico colocado entre los conductores, en las propiedades de los condensadores estudiados en el capítulo anterior.

### 7.1. *Descripción básica de un dieléctrico*

En los denominados “dieléctricos” las cargas del medio no poseen la libertad de moverse a través del mismo como en el caso de los conductores, pero pueden hacerlo en un rango suficiente como para producir efectos observables (y técnicamente aprovechables). El mecanismo fundamental consiste en la “polarización” a nivel molecular, basada en que en las moléculas puede favorecerse el desplazamiento interno de las cargas (redistribución de la carga en cada molécula).

Así pues, la descripción básica de un dieléctrico considera que este se compone de moléculas, eléctricamente neutras globalmente, pero en las que se acumula carga positiva en unas partes y negativa en otras. La aplicación de un campo externo puede forzar una orientación preferente de esas moléculas, lo que a nivel macroscópico provocará que se pueda acumular carga eléctrica en ciertas zonas del material, dando lugar a campos eléctricos. Así por ejemplo, el sistema de la figura 7.1 equivale a una lámina de carga positiva en la superficie derecha.

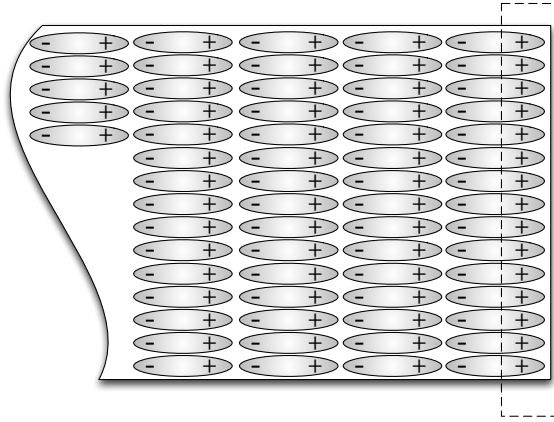


Figura 7.1: Esquema de una porción de material dieléctrico con sus moléculas polarizadas y orientadas. La carga neta observable sólo aparece en la superficie, ya que en cualquier otro punto la proximidad de cargas positivas y negativas produce una cancelación efectiva.

*OPCIONAL* (hasta el final de la sección 7.1)

En lo que sigue expondremos una teoría sencilla para caracterizar estos materiales y sus propiedades. Los principios físicos que se usarán están basados en la imagen de un dieléctrico que se presenta en la figura anterior.

En la línea de los comentarios anteriores, el elemento básico que se puede utilizar para la descripción de los materiales dieléctricos es el **dipolo eléctrico**. De forma idealizada, cada "dipolo molecular" se podría describir como dos cargas puntuales, una positiva  $+q$  y otra negativa  $-q$ , separadas entre sí por una distancia  $\underline{a}$ . Convencionalmente se define el **vector distancia**  $\vec{a}$  como el que tiene origen en  $-q$  y extremo en  $+q$ . Asimismo se define el **vector momento dipolar**  $\vec{p}$ :

$$\vec{p} \equiv q \vec{a}$$

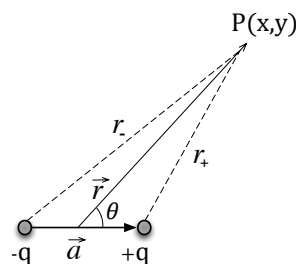


Figura 7.2: Representación de un dipolo eléctrico y de un punto P genérico, en el espacio que lo rodea.

Es evidente que para aquellas propiedades físicas que se investigan en escalas de tamaño “grandes” frente a las dimensiones de la molécula, aproximar cada una de ellas por un momento dipolar  $\vec{p}_i$  resultará una descripción coherente.

Si el dipolo de la figura 7.2 está sometido a un campo externo, digamos  $\vec{\mathcal{E}}^E$  y consideramos al dipolo como un sistema rígido, de modo que el vector  $\vec{a}$  (y por tanto  $\vec{p}$ ) puede trasladarse o rotar, pero no variar su longitud, los posibles movimientos vendrán descritos por la acción de la fuerza y el par de fuerzas externos totales (recuérdese lo visto al estudiar la dinámica del sólido rígido). Al considerar el conjunto de dipolos moleculares en el material dieléctrico, puede demostrarse que el efecto de un campo eléctrico externo se traduce en que el momento dipolar (de la molécula  $i$ -ésima) tenderá a rotar hasta alinearse con el campo, de modo que  $\vec{\tau}^{\text{Ext}} = 0$ .

Podemos concluir que el sistema de dipolos, que constituye la descripción básica del material dieléctrico, responderá a un campo electrostático tendiendo a “alinearse” los momentos según las líneas de ese campo, puesto que esa es la disposición de equilibrio estable.

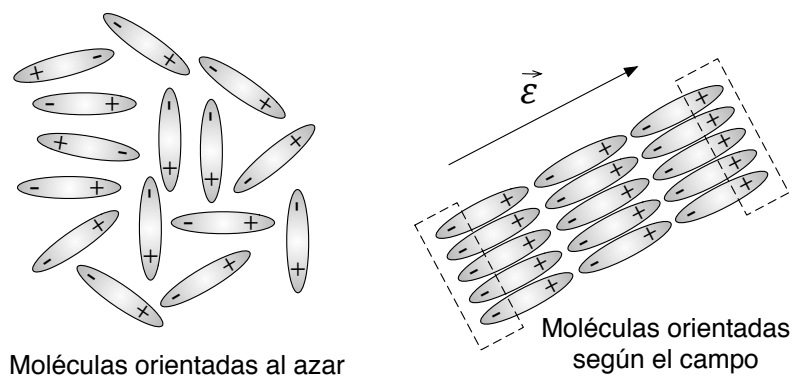


Figura 7.3: Representación de un conjunto de moléculas polares (dipolos), dispuestas al azar (figura de la izquierda) y orientadas bajo la acción de un campo electrostático (figura de la derecha).

Según podemos observar en la figura 7.3, las moléculas del medio dieléctrico se orientan hasta que se cumpla la condición  $\vec{p}_i \times \vec{\mathcal{E}}_i^{\text{Ext}} = 0$ , tendiendo a producir una distribución efectiva de carga neta en las caras del material. Puede apreciarse que esta distribución (“láminas” negativa y positiva respectivamente, rodeadas en la figura con trazo discontinuo) produce un campo electrostático que se opone al que produjo la polarización del material. En los apartados siguientes introduciremos algunos conceptos básicos relativos al análisis cuantitativo del campo producido

por el material. Como veremos, la respuesta dieléctrica es de gran interés en aplicaciones tecnológicas.

Es interesante mencionar que en las figuras anteriores se ha representado el dieléctrico mediante una serie de momentos dipolares. A modo ilustrativo y por claridad, en las figuras aparece únicamente un pequeño conjunto de ellos, pero hemos de pensar que en un medio real (sólido o líquido convencionales) puede haber del orden de  $10^{20}$  moléculas en  $1 \text{ mm}^3$  de material. Esto significa que en una situación típica en la que pensemos en aplicaciones macroscópicas, podremos tratar las propiedades del medio mediante variables continuas.

## 7.2. Condensadores con dieléctrico

Los materiales dieléctricos son de gran utilidad en las aplicaciones tecnológicas. Como veremos a continuación, un caso paradigmático es su papel para aumentar la capacidad en los condensadores. Cuando se introduce un material dieléctrico entre las placas de un condensador, el efecto básico es multiplicar su capacidad  $\underline{C}$  por un factor que es igual a la permitividad relativa del medio,  $\epsilon_r$ , también conocida como constante dieléctrica.

En el caso de los condensadores electrolíticos, esto supone aproximadamente un factor 1000, por lo que en los de dimensiones típicas (sección 6.3, ejemplo 2), las capacidades pasan del rango de los  $nF$  a los  $\mu F$ .

En el ejemplo que vamos a estudiar, se va a calcular la capacidad del condensador plano paralelo de la figura 7.4, en el cual se inserta un dieléctrico de constante dieléctrica  $\epsilon_r$ . Consideraremos inicialmente el condensador cargado a una diferencia de potencial  $\mathcal{V}_o$  cuando había vacío entre las placas y veremos cuál es el efecto al introducir el dieléctrico.<sup>1</sup>

Consideremos que  $+Q$  y  $-Q$  son las cargas en cada placa conductora. Recordemos que la capacidad se define en términos de la carga en las placas (que denominaremos ahora  $Q_{libre}$ ) y la diferencia de potencial entre ellas, tomada con signo positivo:  $V^+ - V^- (= \mathcal{V}_o)$ .

Por otra parte, no olvidemos que  $\mathcal{V}_o$  puede calcularse a partir del campo electrostático. Considerando que el campo es uniforme entre las placas del condensador plano, ya hemos visto que:

<sup>1</sup>También se podría plantear la situación en la que el condensador, ya con el dieléctrico entre las placas, se carga a una diferencia de potencial  $\mathcal{V}_o$ . En este caso, la carga libre acumulada en las placas es mayor, en un factor  $\epsilon_r$ , que cuando hay vacío entre ellas.

$$V_o = \int_{x=0}^{x=d} \mathcal{E} dx = \mathcal{E}d$$

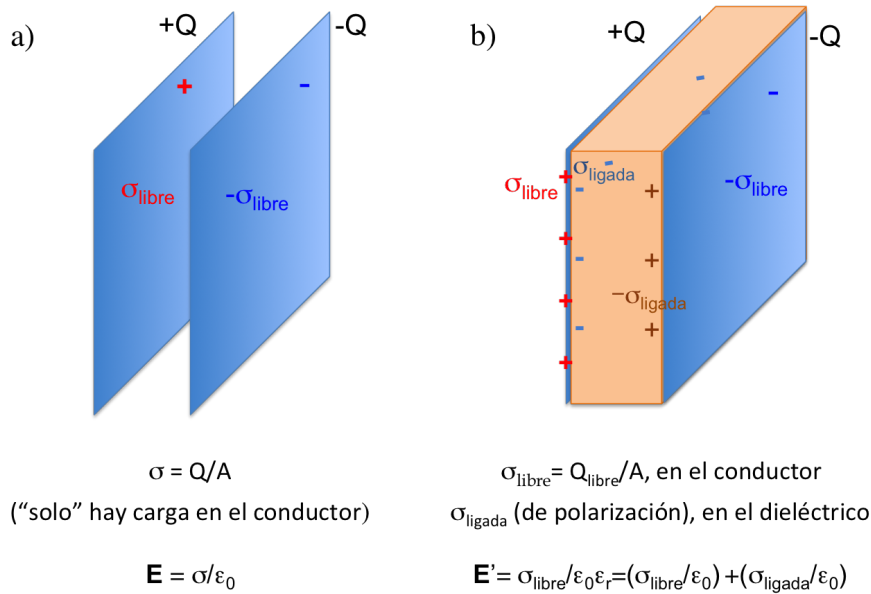


Figura 7.4: Condensador plano de placas paralelas (de área  $A$ ) entre las que: a) existe vacío; b) se coloca una lámina dieléctrica. Se indican las expresiones para el campo eléctrico entre las placas en ambas situaciones.

Como se vio en el capítulo anterior, expresaremos  $\mathcal{E}$  dentro de un condensador sin dieléctrico como  $\mathcal{E} = Q_{\text{libre}}/A\epsilon_0 = \sigma_{\text{libre}}/\epsilon_0$ . En esas condiciones (figura 7.4a), vimos que la capacidad del condensador era  $C = \epsilon_0 A/d$ .

Analicemos el efecto de la introducción de un dieléctrico llenando todo el volumen entre las placas (figura 7.4b). En esta situación, el material sometido al campo creado por los conductores se va a polarizar, apareciendo una densidad de carga ligada en sus caras. El efecto de esa polarización es disminuir el campo entre las placas, por lo que la diferencia de potencial entre las mismas también disminuirá y la capacidad del condensador, de acuerdo con su definición, se verá aumentada. El factor en que aumentará la capacidad es igual a la constante dieléctrica,  $\epsilon_r$ , del material. Si llamamos  $C'$  a la capacidad de este nuevo sistema se tiene:

$$C' = C\epsilon_r = \frac{A\epsilon_r\epsilon_0}{d} \tag{7.1}$$

Podemos calcular fácilmente el valor de la carga de polarización en la superficie del dieléctrico. El campo cuando hay dieléctrico entre las placas,  $\mathcal{E}'$ , será:

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}}{\epsilon_r} = \frac{\sigma_{libre}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (7.2)$$

Por otra parte, y a la vista de la figura 7.4b, es fácil ver que el campo  $\mathcal{E}'$  es debido a las distribuciones de carga (planas, paralelas entre sí) del problema: un plano de densidad de carga  $\sigma_{libre}$  (en la placa positiva), otro de densidad de carga ligada sobre el dieléctrico,  $\sigma_{ligada}$ , de signo opuesto, y los correspondientes al otro lado con  $-\sigma_{ligada}$  y  $-\sigma_{libre}$ . Por tanto, el campo será:

$$\mathcal{E}' = \frac{\sigma_{libre}}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{ligada}}{2\epsilon_0} - \frac{-\sigma_{ligada}}{2\epsilon_0} - \frac{-\sigma_{libre}}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma_{libre}}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_{ligada}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{libre}}{\epsilon_0} - \frac{|\sigma_{ligada}|}{\epsilon_0} \quad (7.3)$$

Igualando las dos expresiones para  $\mathcal{E}'$  y despejando, se tiene que:

$$|\sigma_{ligada}| = \sigma_{libre} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \quad (7.4)$$

Por lo que respecta a la energía potencial electrostática del condensador, es fácil demostrar, teniendo en cuenta lo visto en el capítulo anterior, que será:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \mathcal{E}'^2 vol \quad (7.5)$$

siendo  $vol$  el volumen entre las placas. Vemos que puede tomarse como regla que basta reemplazar  $\epsilon_0$  por  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  en las expresiones estudiadas previamente. No obstante, esta idea ha de manejarse con cuidado pues requiere que el dieléctrico llene todo el espacio en el que existe campo eléctrico para el problema en cuestión.

# Conclusiones II

Conclusiones de la segunda parte ...





Parte III

CORRIENTE ELÉCTRICA



## INTRODUCCIÓN

En el capítulo 6 se han estudiado las propiedades de equilibrio electrostático en materiales conductores. Asumiendo que dicho estado se alcanza y sin más que aplicar las propiedades de la interacción electrostática, se ha deducido cómo se distribuyen las cargas, los campos y potenciales generados, etc. En los capítulos que siguen, presentaremos la descripción teórica de diferentes aspectos relacionados con el movimiento de cargas en un conductor. Introduciremos algunas magnitudes y modelos físicos que permitirán representar la dinámica de las cargas desde el nivel microscópico (partículas cargadas en movimiento dentro de un material) hasta el macroscópico (circuitos eléctricos). En este último caso hablaremos de modelos de “parámetros concentrados” en el sentido siguiente: en un circuito, por ejemplo, una resistencia se describe como un elemento entre cuyos extremos aparece una caída de tensión proporcional al valor de ésta (ley de Ohm:  $\Delta V = I R$ ). Esta relación puede entenderse como el resultado de promediar el movimiento de las cargas sometidas a campos eléctricos dentro del material, pero ese detalle no es necesario para resolver el circuito.



## Capítulo 8

# CORRIENTE ELÉCTRICA. LEY DE OHM

En este capítulo vamos a introducir el concepto de corriente eléctrica, asociado al movimiento de cargas en un conductor. Es importante tener en cuenta que las propiedades estudiadas en el capítulo 6 se refieren únicamente al estado final cuando, tras aplicar al conductor un campo eléctrico, se permite que alcance la situación de equilibrio electrostático. En este capítulo, por el contrario, nos ocuparemos de situaciones en las que se mantiene una diferencia de potencial entre puntos de un conductor, moviéndose las cargas bajo la acción del campo eléctrico existente en el mismo.

En concreto, se estudiará la conocida ley de Ohm, haciendo hincapié en la magnitud macroscópica conocida como resistencia de un conductor y su dependencia con distintas propiedades del mismo. Se introducirá asimismo el concepto de resistividad del material (propiedad microscópica) y su relación con la resistencia a través de parámetros geométricos.

En la sección 8.4 se presenta, con carácter opcional, la deducción de la forma macroscópica de la ley de Ohm a partir de principios básicos, lo que permite relacionarla tanto con las propiedades extrínsecas del conductor (forma y dimensiones) como con sus propiedades intrínsecas (de los portadores de carga y su interacción con el medio).

### 8.1. *Corriente y densidad de corriente*

El concepto elemental de corriente eléctrica corresponde a los casos en que el nivel de descripción necesario no requiere especificar las dimensiones

transversales del conductor. Esto significa que se pueden ignorar la forma y el tamaño de su sección y tratarlo como un sistema unidimensional. (Movimiento de las cargas en un hilo conductor.)

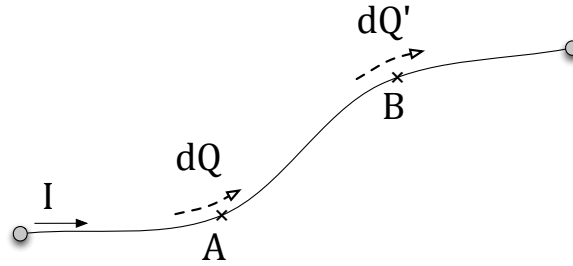


Figura 8.1: Esquema del transporte de corriente unidimensional.

De acuerdo con el esquema de la figura 8.1 se define **intensidad de corriente** como la cantidad de carga que atraviesa un cierto punto del hilo en la unidad de tiempo:

$$I \equiv \frac{dQ}{dt}$$

La intensidad de corriente se mide en *culombios/segundo*  $\equiv$  *amperios*.

Diremos que el transporte de corriente es “estacionario” si en cada instante de tiempo se tiene que  $dQ = dQ'$  para puntos A, B cualesquiera del hilo. En caso contrario ( $dQ \neq dQ'$ ) es evidente que se produce acumulación (o disminución) de carga entre aquellos puntos para los cuales no coinciden la cantidad entrante y saliente. En la gran mayoría de los casos prácticos con circuitos eléctricos pueden suponerse condiciones estacionarias.<sup>1</sup>

Cuando la carga fluye en un conductor de sección relevante, resulta muy útil manejar el concepto de **densidad de corriente**. En este caso, se tiene en cuenta la sección transversal del conductor, a través del cual los portadores de carga recorrerán trayectorias que serán tridimensionales. La figura 8.2 muestra los detalles y magnitudes físicas a considerar.

La densidad de corriente  $\vec{J}$  es un campo vectorial que en cada punto indica el sentido del movimiento de las cargas, y cuyo módulo informa sobre la cantidad de corriente que atraviesa el elemento de área:

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

<sup>1</sup>Como veremos al final de este capítulo, los tiempos característicos de establecimiento del régimen transitorio son despreciables salvo en el caso de trabajar a muy altas frecuencias.

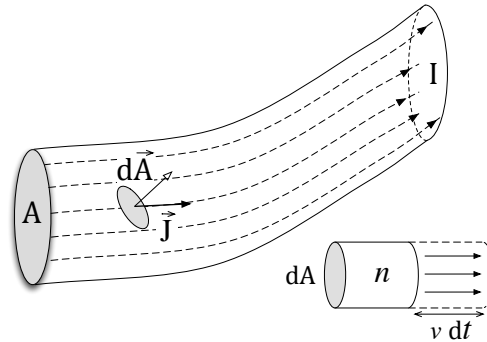


Figura 8.2: Esquema del transporte de corriente en un conductor tridimensional.

y si  $\vec{J} \parallel d\vec{A}$ :

$$J = \frac{dI}{dA}$$

La corriente total que atraviesa el conductor será obviamente

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Digamos para concluir esta sección que el concepto de  $\vec{J}$  permite conectar con las propiedades microscópicas. Consideremos una situación en la cual un conductor de forma cilíndrica posee  $n$  portadores de carga (pensemos en electrones) por unidad de volumen, cada uno con carga  $q$  y que se mueven todos con velocidad uniforme  $v$  paralela al eje del cilindro (detalle inferior de la figura 8.2. La carga  $dQ$  que atraviesa la sección del conductor en dicho intervalo es aquella que está situada dentro del cilindro de longitud  $v dt$  y bases de área  $dA$ :  $dQ = n q v dt$ . Teniendo esto en cuenta, la densidad de corriente puede expresarse, en términos de variables microscópicas como:

$$J = \frac{dI}{dA} = \frac{dQ/dt}{dA} = \frac{n q v dt dA/dt}{dA} = n q v \quad (8.1)$$

relación que usaremos más adelante.

## 8.2. Ecuación de continuidad

(Sección opcional)

Vamos a presentar una expresión que resulta muy útil para resolver algunos problemas de corriente eléctrica, especialmente en lo que se refiere al establecimiento del régimen estacionario. Se trata de la denominada “ecuación de continuidad”, que recoge el hecho de que la carga eléctrica se conserva. Básicamente es la expresión matemática del siguiente principio: si la carga eléctrica contenida en un volumen aumenta o disminuye lo hace mediante su flujo a través de la superficie que lo rodea. En términos de las magnitudes definidas antes y según el esquema de la figura 8.3 esto es

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (8.2)$$

$Q$  representa la carga en el volumen encerrado por  $S$ .

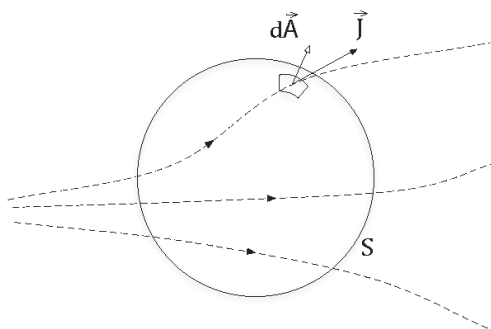


Figura 8.3: Esquema del flujo de corriente tridimensional sobre una superficie cerrada.

Nótese que el signo negativo aparece porque el vector superficie se define hacia fuera de la superficie. Entonces, un flujo positivo de carga corresponde a una disminución de la misma dentro del volumen. Digamos también que la ecuación (8.2) establece una condición de contorno para los problemas con corriente estacionaria:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$

### 8.3. Ley de Ohm. Resistencia. Resistividad

De acuerdo con la ley de Ohm, la corriente que fluye a lo largo de un tramo de cable conductor es proporcional a la caída de tensión entre los



extremos del tramo:<sup>2</sup>

$$\Delta V = V^+ - V^- = I R \quad (8.3)$$

siendo  $R$ , la **resistencia eléctrica**, una propiedad del cable independiente de los valores de  $I$  y de  $\Delta V$ .<sup>3</sup> Los metales obedecen habitualmente a ese comportamiento ( $R=\text{constante}$ ), característico de los materiales denominados óhmicos (que obedecen a la ley de Ohm).

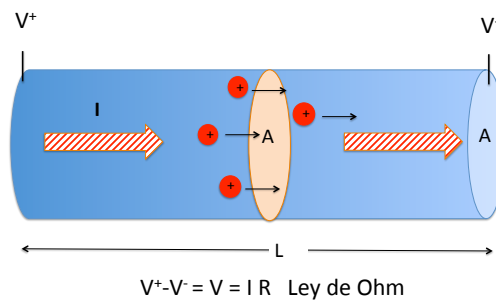


Figura 8.4: Esquema de un conductor con la geometría habitual, de sección constante  $A$  y longitud  $L$ .

La resistencia caracteriza la relación entre  $V$  e  $I$  para un determinado conductor, dependiendo del material del que está hecho, de la temperatura y de parámetros geométricos (forma, dimensiones). En el sistema internacional se mide en ohmios ( $1 \text{ ohmio} = 1 \Omega = 1 \text{ V}/1 \text{ A}$ ).

Las propiedades del material, eliminando la dependencia con la geometría, se describen mediante una magnitud, la **resistividad**  $\rho$ , que depende de la temperatura. En el caso de conductores de sección constante (geometría habitual en los cables, por ejemplo, de sección  $A$  y longitud  $L$ , como el mostrado en la figura 8.4), existe una relación muy sencilla entre ambas magnitudes, resistencia  $R$  y resistividad  $\rho$ , siendo predecible que la resistencia aumente con la longitud del conductor y que sea inversamente proporcional a su sección. De acuerdo con esto:

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (8.4)$$

<sup>2</sup>Aquí la notación  $\Delta V$  se refiere a la “caída de tensión”:  $\Delta V = \int_+^- \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$ . Es decir, no se trata del “incremento” en el sentido literal, sino de la magnitud opuesta.

<sup>3</sup>Es habitual utilizar la notación simplificada  $\Delta V=V$ , de forma que la ley de Ohm se escribe  $V=IR$ .

Evidentemente, la resistividad se mide (en el S.I.) en  $\Omega.m$ , aunque en la práctica es bastante habitual expresar sus valores en  $\Omega.cm$ . Como ya se ha adelantado, la resistividad eléctrica (y su inversa, la conductividad  $\sigma$ ), son característicos del material, siendo destacable el rango amplísimo de valores que pueden encontrarse en la naturaleza: desde los materiales más aislantes a los más conductores hay variaciones de más de 25 órdenes de magnitud. Por otra parte, la resistividad depende de la temperatura. Así, es bien conocido que la resistencia eléctrica de los metales aumenta cuando se calientan. Esa dependencia admite en muchos casos una descripción que se corresponde con la siguiente relación entre  $\rho$  y  $T$ :

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\Delta T) \quad (8.5)$$

donde  $\rho_0$  es el valor de referencia de la resistividad, tomada normalmente a  $20^\circ\text{C}$  y  $\alpha$  es el coeficiente de temperatura de la resistividad, que se expresa en  $C^{-1}$ .

Para ilustrar lo anterior, en la tabla siguiente se recogen los valores de  $\rho_0$  y  $\alpha$  de diversos materiales.

Material	$\rho_0$ ( $\Omega.m$ )	$\alpha(K^{-1}$ o $C^{-1})$
Plata	$1,59 \times 10^{-8}$	0,0038
Cobre	$1,71 \times 10^{-8}$	0,0038
Silicio	640	-0,075
Azufre	$10^{15}$	-
Cuarzo ( $SiO_2$ ) fundido	$7,5 \times 10^{17}$	-

Cuadro 8.1: Valores de la resistividad eléctrica ( $\rho_0$ , a  $20^\circ\text{C}$ ) y del coeficiente de temperatura de la resistividad  $\alpha$  de algunos materiales. Obsérvese que para el silicio, un semiconductor, la resistividad disminuye con la temperatura.

### 8.3.1. Forma microscópica de la Ley de Ohm

Pensemos de nuevo en el conductor de la figura 8.4 (con geometría típica de un cable, en el que la sección es constante). Hemos visto que de acuerdo con la ley de Ohm  $V=I R$ . Por una parte,  $V$  puede expresarse como  $V = \mathcal{E}L$ , siendo  $\mathcal{E}$  el campo eléctrico en el interior del conductor; por otra parte, teniendo en cuenta la relación entre  $R$  y  $\rho$ , podremos escribir:

$$V = \mathcal{E}L = I \frac{\rho L}{A} \Rightarrow \mathcal{E} = I \frac{\rho}{A} \quad (8.6)$$

$I/A$ , la intensidad de corriente por unidad de superficie, es la densidad de corriente que se ha definido antes, de forma que la expresión anterior

puede escribirse como:

$$\vec{\mathcal{E}} = \rho \vec{J} \quad (8.7)$$

La ecuación anterior es la **formamicroscpicadelaleydeOhm**, que relaciona, localmente, el valor del campo eléctrico en el conductor con la densidad de corriente. Pese a que se ha obtenido a partir de un caso particular, es una expresión general, cuya deducción a partir de un modelo microscópico independiente de la geometría se ha incluido (para su consulta opcional) en la sección 8.4.

Para terminar esta sección vamos a obtener, a modo de ejemplo, la relación entre la resistencia de un conductor en forma de corteza esférica y la resistividad del material con que está hecho. Es decir, el objetivo es encontrar una relación análoga a la 8.4, pero en simetría esférica. El método que se va a presentar puede utilizarse igualmente para conductores de otras formas, adaptándolo en cada caso a la geometría del problema.

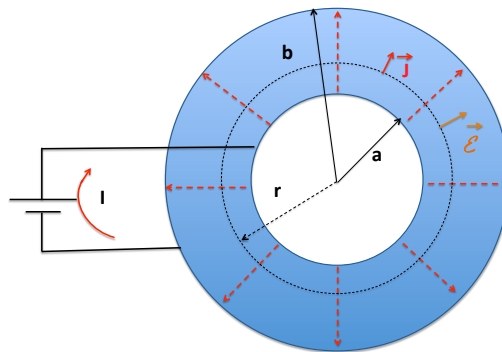


Figura 8.5: Esquema de un conductor, de resistividad  $\rho$ , en forma de corteza esférica de radios  $a$  y  $b$ . A escala microscópica, la ley de Ohm relaciona el valor del campo eléctrico en los puntos de una superficie (genérica) como la señalada con trazo discontinuo, con el valor de la densidad de corriente que fluye a través de esa superficie.

Vamos a considerar un conductor como el que se muestra en la figura 8.5. Una batería (fuente de voltaje) mantiene una diferencia de potencial entre los puntos de radio  $a$  y los de radio  $b$ , estableciendo una corriente de intensidad  $I$  en el sentido marcado. De acuerdo con la ley de Ohm se tiene que  $V = IR$ , siendo  $R$  la resistencia de ese conductor y  $V = V(a) - V(b)$ . Por otra parte, esa diferencia de potencial puede expresarse en términos del campo eléctrico en el conductor:

$$V(a) - V(b) = \int_a^b \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{r} \quad (8.8)$$

Teniendo en cuenta lo anterior así como la relación entre  $\vec{J}$  e  $I$  para este problema (simetría esférica):

$$IR = \int_a^b \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \rho \vec{j} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{\rho I}{4\pi r^2} dr = \frac{\rho I}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (8.9)$$

Es inmediato deducir a partir de 8.9 que la resistencia es:

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \frac{(b-a)}{ab} \quad (8.10)$$

Alternativamente, podemos usar la relación 8.4, “adaptada” a los casos en que la sección atravesada por la corriente no es constante:

$$dR = \frac{\rho dl}{A} \quad (8.11)$$

Siguiendo con el ejemplo de simetría esférica,  $A = 4\pi r^2$  y “dl=dr”. Se propone como ejercicio el cálculo de la resistencia integrando la expresión 8.11 entre los límites a y b.

## 8.4. Potencia disipada. Calor Joule

Un fenómeno bien conocido por todos es el calentamiento de un cable conductor por el que circula una corriente. Para entenderlo, pensemos en que las cargas que circulan por un cable como en la figura 8.4, pasan de un potencial mayor a uno menor, y por tanto su energía potencial disminuye. Si consideramos la carga  $\Delta Q$  que atraviesa una sección del conductor en un intervalo  $\Delta t$ , la disminución de energía experimentada por unidad de tiempo será:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q(V^+ - V^-)}{\Delta t} = IV = I^2 R \quad (8.12)$$

Esto se corresponde con la potencia disipada en forma de calor (efecto Joule).

## 8.5. Deducción de la ley de Ohm. Modelo microscópico

(Sección de LECTURA OPCIONAL)

Teniendo en cuenta las magnitudes físicas introducidas en las secciones anteriores, es posible conectar las propiedades de movimiento de las partículas con las variables medibles (macroscópicas). Teniendo en cuenta  $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$  y  $\vec{J} = nq\vec{v}$ , podemos plantear el esquema que da lugar a la ley de Ohm. Vamos a ver que, mediante argumentos de tipo mecánico (en realidad termodinámico) resulta posible justificar la relación lineal entre  $\Delta\mathcal{V}$  e  $I$ . Asumiremos que todos los portadores de carga (electrones en un

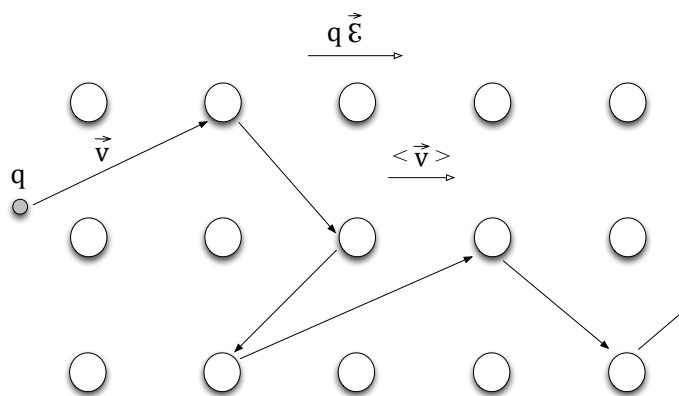


Figura 8.6: Esquema de las colisiones experimentadas por los portadores de carga dentro de un medio conductor.

metal) se pueden describir como partículas clásicas utilizando las leyes de Newton. Por otra parte, las interacciones básicas serán las de dichos electrones (de carga  $-e$ ) sometidos a un campo eléctrico aplicado y las que tienen con los iones del metal. Estas últimas se traducen en procesos de colisión que los electrones sufren en su avance a lo largo del metal.<sup>4</sup> Entonces podemos decir, teniendo en cuenta la ecuación 8.1:

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} \Rightarrow \frac{-e\vec{\mathcal{E}}}{m} = \frac{\langle \vec{v} \rangle}{\tau} = \frac{\vec{J}}{-ne\tau}, \quad (8.13)$$

donde  $\langle \vec{v} \rangle$  es la velocidad media de los electrones y donde se ha introducido el tiempo medio entre colisiones  $\tau$ , para estimar la aceleración. (Se utiliza el valor medio para todo el colectivo en lugar de considerar la

<sup>4</sup>Esta interpretación básica de los fenómenos físicos relacionados con el movimiento de la colectividad de electrones constituyen lo que se denomina modelo de Drude.

velocidad inicial con la que emerge cada electrón tras la colisión):

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_o}{\tau} \rightarrow \frac{\langle \vec{v} \rangle}{\tau}$$

Esto significa que hay un efecto “promediado” introducido por el enorme número de procesos de colisión que ocurren, dando lugar al valor  $\langle \vec{v} \rangle$  (velocidad de arrastre) que apuntará en la dirección de  $\vec{\mathcal{E}}$ . A partir de la expresión 8.13, se tiene que:

$$\vec{J} = \frac{n e^2 \tau}{m} \vec{\mathcal{E}} \equiv \sigma \vec{\mathcal{E}} \quad (8.14)$$

La magnitud  $\sigma$  refleja las propiedades microscópicas del medio. Se denomina conductividad y, a través de los parámetros propios de cada metal, permite comprender fenómenos como la variación de la conductividad con la temperatura.<sup>5</sup> Por razones prácticas, en muchas ocasiones se utiliza la magnitud inversa,  $\rho = 1/\sigma$  (resistividad).

La ecuación 8.14 es la forma microscópica de la ley de Ohm. Vamos a ver que mediante su integración sobre la región que ocupa el conductor (Figura 8.7) obtendremos su relación con la ley macroscópica. Lo haremos mediante un ejemplo.

**Ejemplo:** transporte de corriente a lo largo de un conductor cilíndrico de conductividad  $\sigma$  (Figura 8.7).

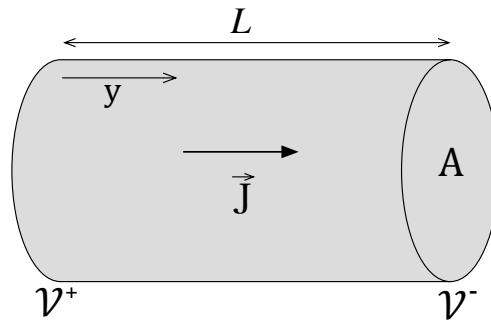


Figura 8.7: Esquema de cálculo de la caída de tensión cuando una corriente atraviesa un conductor cilíndrico.

La “caída de tensión” ( $\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^-$ ) que tiene lugar cuando la corriente atraviesa el conductor se puede calcular por integración del campo eléctrico a lo largo del mismo:

<sup>5</sup>Téngase en cuenta, por ejemplo, que al aumentar la temperatura lo hace la amplitud de las vibraciones de la red de iones y consecuentemente las colisiones de los electrones serán más frecuentes, disminuyendo el tiempo entre ellas  $\tau$  y por lo tanto  $\sigma$ .

$$\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^- = \int_0^L \mathcal{E} dy = \int_0^L \frac{J}{\sigma} dy = \int_0^L \frac{I/A}{\sigma} dy$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\mathcal{V} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{A} I = \rho \frac{L}{A} I$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\mathcal{V} \equiv RI \tag{8.15}$$

En definitiva, queda demostrado que la forma lineal de la ley de Ohm macroscópica (Eq.(8.15)) se deduce de la expresión microscópica (Eq.(8.14)), estableciéndose la relación entre la propiedad medible  $R$  y la propiedad del material  $\rho$ , a través de la geometría del sistema ( $L, A$  en este caso). En el sistema internacional, las unidades para esta magnitud quedan establecidas por las del potencial y la intensidad de corriente: Ohmio ( $\Omega$ ) = Voltio/Amperio.





## Capítulo 9





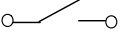
# INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CIRCUITOS

Atendiendo a los conceptos que se introdujeron en los capítulos anteriores (6, 7, 8) el comportamiento eléctrico de la materia se describe mediante modelos matemáticos, expresando las leyes físicas que rigen la evolución espacio-temporal de los campos, en particular  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ . A nivel macroscópico, la integración de las ecuaciones puntuales (promediando las variaciones dentro del material) conduce a relaciones que involucran magnitudes fácilmente medibles en el laboratorio. Por ejemplo, integrando  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  en el espacio entre los conductores que forman las placas de un condensador llegamos al concepto de capacidad, que es la relación entre la carga total almacenada y la caída de tensión medible  $Q = C \Delta^+ \mathcal{V}$ . En el caso de tener corriente estacionaria a través de un conductor, la integración de  $\vec{\mathcal{E}}$  conduce a la célebre ley de Ohm  $\Delta^+ \mathcal{V} = I R$ , que puede verificarse de modo sencillo en un experimento.

La teoría de circuitos, que aquí presentamos a nivel introductorio, se ocupa justamente de aquellas situaciones en las que el nivel descriptivo macroscópico resulta apropiado para caracterizar el sistema. Así pues, refiriéndonos a una resistencia necesitaremos conocer el valor de  $R$  sin importar su relación con los parámetros materiales o geométricos (como podría ser  $R = \rho L/S$  en un hilo de longitud  $L$  y sección  $S$ ). Se habla de modelos de “parámetros concentrados”, refiriéndose en concreto a los valores de  $R$  o  $C$  aludidos anteriormente.

Un circuito es una concatenación de conductores, denominados elementos, que en la descripción ideal que usaremos están caracterizados por un solo parámetro (por ejemplo  $R$  o  $C$ ). A modo de resumen, la tabla siguiente recoge los elementos que van a componer los circuitos que vamos

a estudiar. Conviene aclarar que los “cables” que unirán entre sí a los di-

Nombre	Notación	Símbolo
Generador	$\mathcal{E}_{MF}$	
Resistencia	$R$	
Condensador	$C$	
Cable		
Interruptor	$S$	

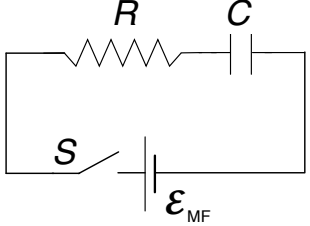
  


Figura 9.1: Tabla resumen de los elementos en un circuito y sus símbolos.

ferentes elementos para formar un circuito, serán materiales conductores. La diferencia con las resistencias propiamente dichas será que a efectos prácticos, el bajo valor de su resistividad (y por tanto de su resistencia) hace que, en la mayoría de los casos, la caída de tensión a lo largo de ellos sea despreciable frente a la que tiene lugar en las resistencias propiamente dichas.

## 9.1. Generadores de tensión

El establecimiento del régimen estacionario de corriente mencionado en el capítulo anterior requiere la acción de un agente externo que “mantenga” el campo eléctrico necesario que permita el movimiento de las cargas (debe compensar las fuerzas resistivas que se oponen a dicho movimiento). Dicho agente, que vamos a denominar **generador de tensión** se ocupará de proporcionar las cargas necesarias para mantener la diferencia de potencial entre dos puntos del conductor cuando circula una corriente.

Evidentemente, los generadores deben involucrar procesos físicos diferentes a los electrostáticos, ya que éstos conducirían inevitablemente al “equilibrio electrostático”. De hecho, comunmente se basan en fenómenos electro-químicos o electro-magnéticos.

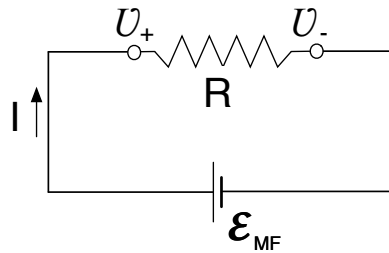


Figura 9.2: Generador en un circuito simple.

### 9.1.1. Fuerza electromotriz. Generadores reales.

Un generador ideal es aquel que, independientemente del circuito al que se conecta, proporciona siempre la misma diferencia de potencial entre sus extremos. La denominaremos fuerza electromotriz del generador. En la figura 9.2 es la que determina la caída de voltaje (o caída de tensión) en la resistencia.

$$\Delta\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^- \equiv \mathcal{E}_{MF} \quad (9.1)$$

En la práctica, los generadores reales no son capaces de mantener el mismo voltaje para cualquier valor de la intensidad que se les requiera. Para valores grandes de  $I$  la tensión de salida del generador caerá. Esto se modeliza mediante un parámetro llamado *resistencia interna*,  $r$ , inherente a todo generador. Por ejemplo, en el caso de la figura 9.3, que supone la conexión del generador en un circuito simple con una resistencia  $R$ , tenemos

$$\Delta\mathcal{V} = \mathcal{E}_{MF} - Ir \Rightarrow \Delta\mathcal{V} = \mathcal{E}_{MF} \frac{R}{R + r} \quad (9.2)$$

donde se ha usado la relación  $I = \mathcal{E}_{MF}/(R + r)$

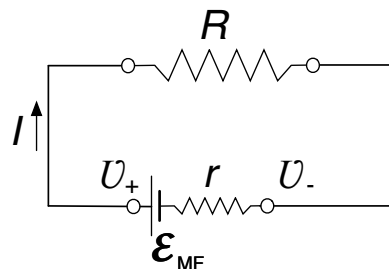


Figura 9.3: Generador real en un circuito simple, con una resistencia de carga  $R$ .  $r$  es la resistencia interna del generador.

## 9.2. Potencia en un circuito

Recordemos que en el régimen estacionario, el movimiento de las cargas a través de un conductor tiene lugar bajo la acción del campo eléctrico. Éste proporciona la energía que se consume en las colisiones de los portadores con los átomos del metal, por lo que la velocidad media de avance es constante. Si se mueve una carga  $\Delta Q$  entre  $\mathcal{V}^+$  y  $\mathcal{V}^-$  por unidad de tiempo, se tiene:

$$\mathcal{P} = \Delta Q \frac{\Delta \mathcal{V}}{\Delta t} = I \Delta \mathcal{V}, \quad (9.3)$$

de modo que la potencia que se está suministrando a una resistencia  $R$  que es atravesada por una intensidad  $I$  vale

$$\mathcal{P} = I^2 R = \frac{(\Delta \mathcal{V})^2}{R} \quad (9.4)$$

**Máxima transferencia de potencia** Nótese que cuando conectamos una resistencia a un generador real, puede optimizarse la transferencia energética. Por ejemplo, en el circuito sencillo de la figura 9.3 se tiene

$$\mathcal{P} = \left( \frac{\mathcal{E}_{\text{MF}}}{R + r} \right)^2 R = \frac{\mathcal{E}_{\text{MF}}^2 R}{(R + r)^2}, \quad (9.5)$$

por lo cual

$$\frac{d\mathcal{P}}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = r \quad (9.6)$$

## 9.3. Leyes de Kirchhoff

Se trata de dos igualdades de gran utilidad en la resolución de problemas de circuitos eléctricos. Fueron enunciadas por el físico alemán Gustav Kirchhoff en 1845 y hacen referencia a las intensidades de corriente y las caídas de tensión en un circuito complejo. Antes de exponerlas, definiremos algunos conceptos necesarios.

1. **Rama:** es cada uno de los elementos de circuito.
2. **Nudo:** es un punto en un circuito donde concurren al menos dos ramas.
3. **Malla:** cada uno de los circuitos que se pueden formar sin utilizar dos veces la misma rama.

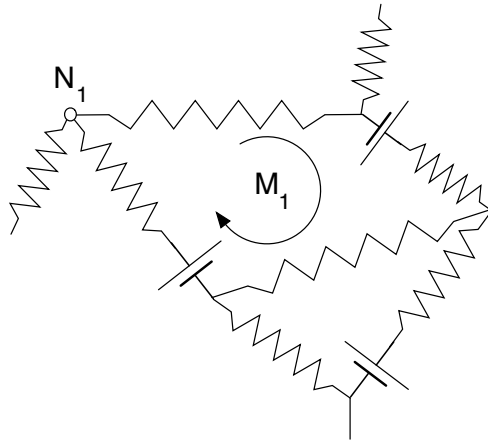


Figura 9.4: Definición de elementos (nudo y malla) en un circuito complejo.

**1ª ley de Kirchhoff** Se trata de la expresión de la conservación de la carga, (en el fondo es otra forma de considerar la ecuación de continuidad (sección 8.4) y dice que en régimen estacionario no puede haber acumulación de carga en los nudos de un circuito, por lo que la  $I$  que llega tiene que ser igual a la que sale.

$$\sum_{i_j} I_{i_j} = 0, \quad \forall N_j \quad (9.7)$$

Nótese que  $I_{i_j}$  representa la corriente que llega al nudo  $j$  a través de la rama  $i_j$ . El sumatorio se extiende a todas las ramas que confluyen en el nudo. En el circuito de la figura 9.5, en su nudo  $N_1$  esto se expresaría:

$$I_{1_1} - I_{2_1} - I_{3_1} = 0$$

**2ª ley de Kirchhoff** La caída de tensión neta que existe al recorrer una malla y volviendo al mismo nudo de partida debe ser nula. En el circuito de la figura, esto se expresa del siguiente modo para la malla  $M_1$ .

$$I_{2_1} R_2 + \mathcal{E}_{MF2} - \mathcal{E}_{MF1} + I_{1_1} R_2 = 0 \quad (9.8)$$

Hay que tener en cuenta que, definido un sentido de recorrido en una malla, serán positivas las fem que generen corriente en ese sentido y negativas las que la generen en el sentido opuesto.

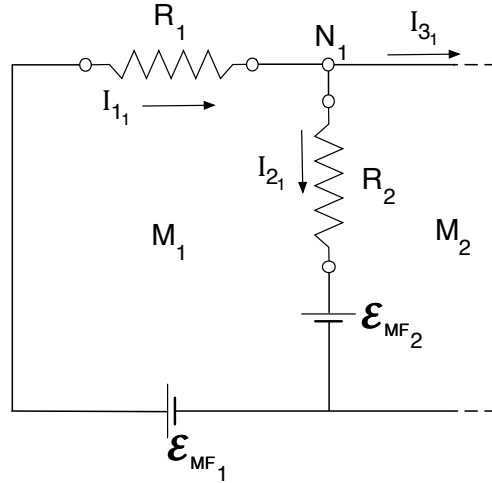


Figura 9.5: Figura básica que ilustra la aplicación de las leyes de Kirchhoff en un circuito (método de nudos).

Como resulta evidente del planteamiento anterior, en un problema de circuitos utilizamos las expresiones correspondientes a las dos leyes de Kirchhoff para generar tantas ecuaciones como incógnitas  $I_i$  tenga nuestro problema. En general, se debe resolver un problema de ecuaciones lineales.

Existe una formulación más compacta del problema, el denominado método de “intensidades de malla”. Utilizando terminología del Álgebra, diríamos que se basa en elegir una base adecuada de intensidades, cuyas combinaciones cumplirán automáticamente la primera ley. En la figura 9.5 definimos dichas intensidades, que debemos interpretar como circulaciones cerradas y aditivas en aquellas ramas de circuito en que coinciden. En el ejemplo considerado, la segunda ley de Kirchhoff tomando como punto de partida el nudo  $N_1$  diría

$$I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_2 + \mathcal{E}_{MF2} - \mathcal{E}_{MF1} = 0 \quad (9.9)$$

En circuitos planos, el método de mallas resulta habitualmente más simple, ya que se reduce el número de incógnitas a resolver.

#### 9.4. Transitorios en circuitos RC

En el apartado anterior, hemos limitado el análisis a circuitos que contienen generadores y resistencias, centrándonos en el régimen estacionario.

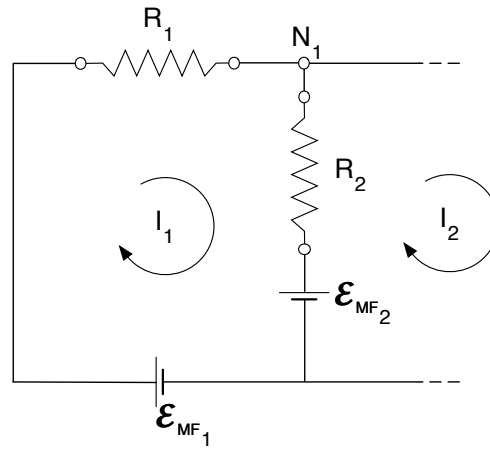


Figura 9.6: Aplicación de la 2ª ley de Kirchhoff en un circuito complejo (método de mallas).

En esta sección, analizaremos el efecto de introducir condensadores en el sistema lo que básicamente se traducirá en la aparición de fenómenos transitorios, relevantes en escalas de tiempo que llegarán incluso a los segundos.

Físicamente, al introducir un condensador como elemento de circuito se acentúan los efectos capacitivos que, aunque presentes, son despreciables en los propios cables o en las resistencias. Aumentar la capacidad significa poder “acumular” cargas con mayor facilidad, lo cual se traduce en que los tiempos de transición hasta alcanzar una situación estacionaria se hacen mucho mayores.

Veremos que este tiempo de transición depende del producto  $\tau = RC$ , (puede comprobarse que tiene dimensiones de tiempo) siendo  $R$  y  $C$  la resistencia y capacidad asociados al sistema. En definitiva, el transitorio viene determinado por la acción conjunta de efectos resistivos y capacitivos en el sistema. En general, el valor de  $C$  asociado a los elementos de circuito que no son explícitamente condensadores será extraordinariamente pequeño y por tanto  $C$  despreciable. No obstante, si en un circuito se combinan un condensador (diseñado para aportar un valor elevado de  $C$ ) y una resistencia (lo que introduce valores elevados de  $R$ ),  $\tau$  pasa a tener valores muy mayores. Por ejemplo, si  $R = 10\text{ k}\Omega$  y  $C = 10\mu\text{F}$  tenemos  $\tau = 0.1\text{ s}$ .

Analizaremos en el próximo apartado los transitorios en circuitos RC.

### 9.4.1. Procesos de carga y descarga en circuitos RC

Vamos a estudiar los procesos de carga/descarga de un condensador en circuitos RC sencillos. Lo haremos bajo la hipótesis de que el sistema evoluciona de modo *cuasi – estacionario*. Esto significa que las magnitudes físicas dependerán del tiempo, pero no de la posición:  $\mathcal{V}(t)$ ,  $I(t)$ ,  $Q(t)$ . En términos de lo dicho anteriormente, puesto que los transitorios asociados al establecimiento de la corriente en los conductores pueden despreciarse, en cada instante de tiempo la corriente que pasa por una rama del circuito es prácticamente la misma, y la cantidad de carga sólo variará en las placas del condensador. Esta aproximación es excelente en el ámbito de los generadores de tensión continua y en un enorme rango de aplicación de los circuitos de corriente alterna.<sup>1</sup>

#### Proceso de descarga en un circuito RC

Supondremos, como indica la figura, que partimos de un condensador cargado ( $\pm Q_0$ ). Si cerramos el interruptor, se establece una corriente a través de la resistencia que inicia el proceso de neutralización de la carga en el condensador.

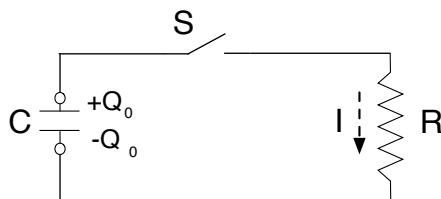


Figura 9.7: Proceso de descarga de un condensador.

Inicialmente:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC} \quad (9.10)$$

La corriente cuasi-estacionaria subsiguiente vendrá dada por

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} \quad (9.11)$$

Aplicando la 2ª ley de Kirchhoff:

<sup>1</sup>Debería ser revisada en el caso de estudiar circuitos de corriente alterna a frecuencias muy elevadas.



$$\begin{aligned}
 IR - \frac{Q}{C} &= 0 \\
 \Downarrow \\
 \frac{dQ}{dt} &= -\frac{Q}{RC} \\
 \Downarrow \\
 Q &= Q_0 e^{-t/RC} \\
 \Downarrow \\
 I &= \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} \quad (9.12)
 \end{aligned}$$

Vemos que  $\tau = RC$  es el tiempo característico de descarga de un condensador, que corresponde al tiempo necesario para que la corriente decaiga en un factor  $e$  respecto a su valor inicial (factor exponencial igual a  $e^{-1}$ ).

**Proceso de carga en un circuito RC** Supongamos ahora, como indica la figura 9.8, que el condensador está inicialmente descargado y que en un instante dado cerramos el interruptor  $S$ .

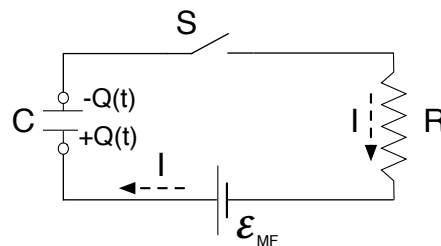


Figura 9.8: Proceso de carga de un condensador.

Se establecerá una intensidad de corriente  $I$  dada por las cargas que proporciona el generador, de modo que si aplicamos la 2ª ley de Kirchhoff en cada instante de tiempo (ahora  $I = dQ/dt$ ):

$$\begin{aligned} IR + \frac{Q}{C} - \mathcal{E}_{\text{MF}} &= 0 \\ \Downarrow \\ RC \frac{dQ}{dt} &= C \mathcal{E}_{\text{MF}} - Q \\ \Downarrow \\ Q &= C \mathcal{E}_{\text{MF}} \left(1 - e^{-t/RC}\right) \\ \Downarrow \\ I &= \frac{\mathcal{E}_{\text{MF}}}{R} e^{-t/RC} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Nótese que estos resultados significan que el proceso de carga del condensador finaliza (asintóticamente) con la desaparición de la intensidad de corriente y la acumulación de carga en las placas, que da lugar a una diferencia de potencial igual y en “sentido” opuesto a la del generador.

El tiempo característico de carga del condensador es igual al de descarga. En la práctica, se puede considerar que un condensador se carga o descarga por completo en un tiempo igual a  $5\tau$ .

# Conclusiones III

Conclusiones de la tercera parte ...



Parte IV

ONDAS



## INTRODUCCIÓN

En la parte 4 se van a tratar algunas características fundamentales del movimiento ondulatorio. En el primer capítulo veremos cómo se describe una onda, en su forma más general, para pasar a continuación a estudiar con detalle las propiedades de las ondas armónicas. Se analizarán las magnitudes que tienen que ver con la propagación de energía en el movimiento ondulatorio, así como diversos fenómenos relacionados con la superposición de onda. En el capítulo siguiente se hará hincapié en las características particulares de las ondas sonoras, introduciendo los conceptos de reverberación, absorción del sonido y aislamiento acústico. Esto servirá como preparación para la resolución, en cursos más avanzados, de problemas de acústica arquitectónica.





## Capítulo 10

# NATURALEZA DE LAS ONDAS

¿Qué es una onda?

Hay muchos ejemplos en los que podemos pensar cuando se nos pregunta por una onda: las ondulaciones que se observan en la superficie del agua cuando tiramos una piedra, la perturbación transversal en una cuerda cuando agitamos un extremo, el sonido,... En todos ellos tenemos una perturbación dependiente del tiempo que se propaga de un punto a otro del espacio.

En los siguientes apartados vamos a presentar de forma general el concepto de onda, para pasar a la descripción detallada de las ondas armónicas para las que analizaremos distintos aspectos, como la propagación de energía o diversos fenómenos de superposición.

### 10.1. *Conceptos básicos*

Llamamos **onda** a cualquier perturbación dependiente del tiempo de una magnitud física que se propaga de un punto a otro del espacio, sin que haya necesariamente desplazamiento de materia en el medio en el que tiene lugar la propagación.

En una onda se propaga energía (pensemos en el efecto destructor de las olas) y momento lineal. La velocidad a la que se propaga es característica del medio y del tipo de onda.<sup>1</sup> En este punto hay que mencionar la diferencia entre la velocidad de propagación de las onda,  $v$ , **velocidad de**

---

<sup>1</sup>Quiere decir que en un mismo medio, por ejemplo una barra rígida, pueden propagarse ondas longitudinales y transversales, y lo hacen con distinta velocidad.

**ondas.** y la velocidad con la que se mueven los puntos del medio material,  $u$ . Esta se calculará como la derivada temporal del desplazamiento del punto respecto a su posición de equilibrio. Veremos más adelante algunos ejemplos.

Según requieran o no la existencia de un medio "soporte" para su propagación, las ondas se clasifican en:

- Ondas elásticas. Necesitan para su propagación de un medio material. Ejemplos de este tipo de ondas son las mencionadas ondas transversales en una cuerda, el sonido propagándose en el aire o en un medio rígido, las ondas superficiales en agua...
- Ondas electromagnéticas. La radiación electromagnética se propaga en el vacío, aunque también puede hacerlo a través de determinados medios materiales (con una velocidad que será, en general, dependiente del medio). Formando parte del espectro electromagnético y con interés particular, encontramos la luz (rango visible del espectro) que estudiaremos en el capítulo de Óptica.

Según la dirección en la que se manifiesta la perturbación respecto a la dirección de propagación, las ondas se clasifican en:

- Ondas transversales, en las que esas direcciones son perpendiculares. Ejemplos: ondas en una cuerda tensa, ondas electromagnéticas,...
- Ondas longitudinales, en las que dichas direcciones coinciden. Un ejemplo lo constituye el sonido.

## 10.2. Descripción matemática de una onda

Ante la gran variedad de fenómenos ondulatorios que observamos podemos preguntarnos si existe una forma general de describir una onda. Veamos con un ejemplo que sí que existe.

Imaginemos que el pulso azul de la figura 10.1 se describe mediante un función  $y = f(x)$ . Si representamos  $y = f(x - x_0)$ , nos encontramos con el mismo pulso desplazado  $x_0$  hacia la derecha, el pulso rojo, mientras que  $y = f(x + x_0)$  sería el verde.

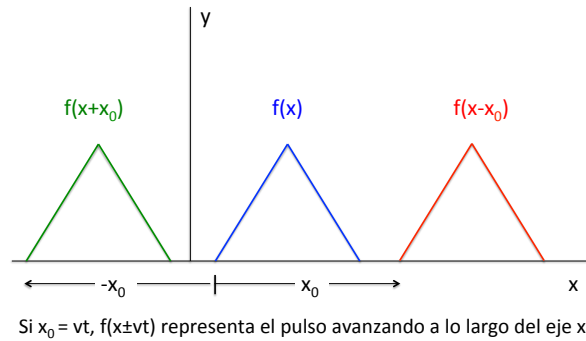


Figura 10.1: Representación gráfica de un pulso  $f(x)$  “triangular”, desplazado una distancia  $x_0$  tanto a la derecha,  $f(x - x_0)$  como a la izquierda  $f(x + x_0)$ .

Parece evidente que si en lugar de considerar una cantidad fija  $x_0$  pensamos en una distancia variable, expresada como  $vt$  (aumenta linealmente con el tiempo), obtendremos una función que representa una función que se propaga con una velocidad  $v$  característica, esto es, una **onda**. Por lo tanto, identificaremos  $y(x, t) = f(x \pm vt)$  como la forma general de las funciones que representan ondas que se propagan a lo largo del eje  $x$ , independientemente de la función concreta que sea.

Así, funciones tan distintas como  $y(x, t) = A e^{-(x-vt)^2}$ ,  $y(x, t) = A \operatorname{sen}k(x + vt)$  o  $y(x, t) = \frac{A}{B + (x - vt)^2}$  representan ondas que se propagan con velocidad  $v$  hacia la derecha (signo  $-$  delante de  $vt$ ) o hacia la izquierda (con signo  $+$ ).

### 10.2.1. Ecuación diferencial de ondas. Velocidad de onda

Podría decirse que la **ecuación diferencial de ondas** o ecuación diferencial del movimiento ondulatorio es la equivalente a la ecuación de movimiento de una partícula o de un sólido rígido que ya hemos visto. Al igual que si resolvemos la ecuación de movimiento de una partícula, su solución  $x = f(t)$  nos dice “dónde” está la partícula en cualquier instante de tiempo, la solución de la ecuación de ondas  $y = f(x, t)$  nos dice cuál es el valor de la perturbación en cualquier punto y en cualquier instante. Por ejemplo, si estamos estudiando la propagación de una onda

en una cuerda tensa, nuestro objetivo es saber cuánto se habrá apartado del equilibrio cualquier punto de la cuerda, en la posición genérica  $x$ , en cualquier instante de tiempo,  $t$ .

La ecuación de ondas es una ecuación en derivadas parciales, cuya forma general es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (10.1)$$

$y(x, t)$  es la función de ondas, que ya sabemos que tiene que ser de la forma  $f(x \pm vt)$ . Comprobemos que es solución de 10.1:

Llamando  $u \equiv x \pm vt$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{df}{du} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{d^2 f}{du^2} v^2 \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{d^2 f}{du^2} \end{aligned} \right\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Vemos que se llega a una identidad, es decir, que  $f(x \pm vt)$  satisface la ecuación general de ondas, como queríamos demostrar.

Para cada tipo de ondas (por ejemplo, transversales en una cuerda, longitudinales en un medio rígido o en el aire...) se llega a la correspondiente ecuación diferencial de ondas a partir de consideraciones dinámicas (básicamente  $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ ); para cada tipo de onda propagándose en un medio determinado se obtiene la correspondiente velocidad de propagación, válida, en general, bajo algunas restricciones. Veamos las expresiones de la velocidad para algunos tipos de ondas y medios concretos:

- **Ondas transversales en una cuerda tensa:**  $v = \sqrt{T/\mu}$  ( $\mu$  = densidad lineal de masa,  $T$  = tensión).
- **Ondas longitudinales en un medio rígido:**  $v = \sqrt{Y/\rho}$  ( $Y$  = módulo de Young,  $\rho$  = densidad volúmica de masa).
- **Ondas longitudinales en un gas:**  $v = \sqrt{B/\rho_0} = \alpha\sqrt{T}$  ( $B$  = módulo de compresibilidad,  $\rho_0$  = densidad de masa, en el equilibrio). La densidad  $\rho$  varía de forma muy apreciable en los gases, dependiendo de las condiciones ambientales, al contrario de lo que ocurre en los sólidos.

### 10.3. Ondas armónicas

Las ondas armónicas son las que se describen mediante una función seno (o coseno):

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} k(x - vt) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Para entender cómo se origina una onda de estas características, pensemos por ejemplo en un MAS, en un punto del medio. Ese movimiento genera una onda armónica que se desplaza por el medio con la velocidad  $v$ . La característica de las ondas armónicas es su doble periodicidad: espacial y temporal.

- Periodicidad espacial. Viene determinada por  $k = \text{número de onda}$ , de forma que la mínima distancia entre dos puntos en los que la perturbación es la misma, conocida como longitud de onda es:  $\lambda = \text{longitud de onda} = 2\pi/k$

$$y(x, t) = y\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right)$$

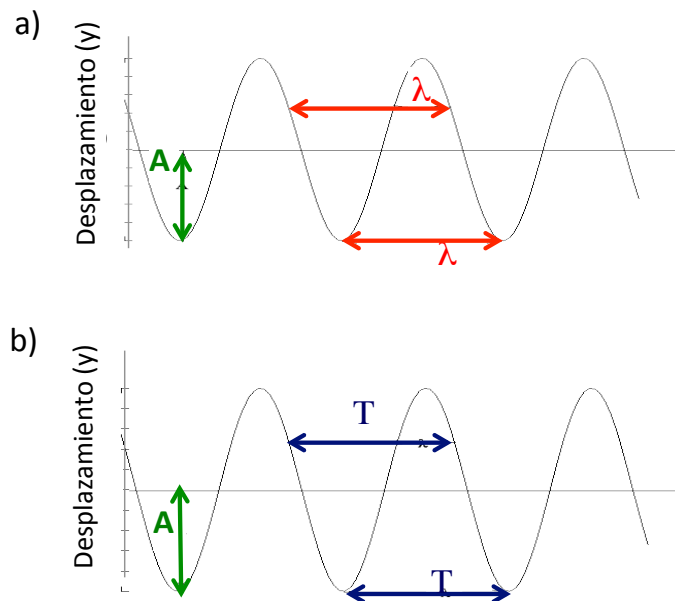


Figura 10.2: Representación de una onda armónica resaltando: a) Su periodicidad espacial,  $\lambda$ , en un gráfico  $y(x, t_0)$  y b) su periodicidad temporal,  $T$ , en un gráfico  $y(x_0, t)$ , en los que se muestran los parámetros que caracterizan la onda.

- Periodicidad temporal. De forma análoga, la periodicidad temporal viene dada por  $\omega = kv$  = frecuencia angular, que esta relacionada con el periodo  $\mathcal{T} = 2\pi/\omega$  = período,  $\nu = 1/\mathcal{T} = \omega/2\pi$  = período

$$y(x, t) = y\left(x, t + \frac{2\pi}{kv}\right)$$

En la forma general de una onda armónica no debemos olvidarnos la **fase inicial**  $\varphi_0$  <sup>2</sup> determinada por las condiciones iniciales. Teniendo además en cuenta las diferentes formas de expresar la ecuación de la onda, en función de los distintos parámetros característicos, podremos escribir:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi_0) = A \operatorname{sen}[k(x - vt) + \varphi_0] = A \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\mathcal{T}}\right) + \varphi_0\right]$$

#### 10.4. *Energía transmitida por las ondas armónicas*

Tras la descripción de las ondas armónicas vamos a pasar a hablar de la energía que transmiten. Tomaremos como sistema modelo una cuerda tensa, por la que se propagan ondas transversales.

Pensemos en que una onda armónica se puede generar moviendo uno de los extremos de la cuerda de forma armónica. Es fácil entender que el trabajo que realiza la fuerza externa para mover el extremo se “invierte” en aumentar la energía del sistema. Esa energía se transmite por el medio (la cuerda) con la velocidad característica de las ondas,  $v = \sqrt{T/\mu}$

Imaginemos una cuerda y seleccionemos idealmente un segmento  $\Delta x$  de la misma afectado por la perturbación, de forma que su desplazamiento respecto al equilibrio es  $y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$ .

<sup>2</sup>Se recomienda realizar el problema 1 del bloque de ondas de la colección de problemas.

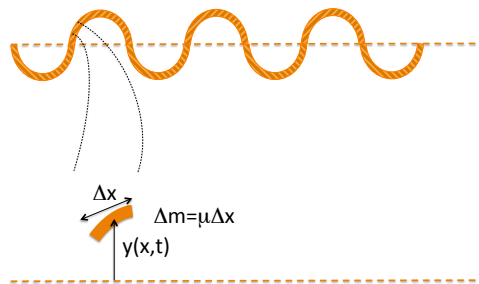


Figura 10.3: Fragmento  $\Delta x$ , de masa  $\Delta m = \mu \Delta x$ , separado una distancia  $y$  del equilibrio. Ese fragmento describe un MAS en la dirección de  $y$ .

Si nos fijamos en ese  $\Delta x$ , el movimiento que describe es un M.A.S., luego podemos, por semejanza, decir que su energía será de la forma <sup>3</sup>  $E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$ .

Si llamamos  $\Delta m$  a la masa del elemento en que nos fijamos:

$$\Delta E = \frac{1}{2} (\Delta m) \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} (\mu \Delta x) \omega^2 A^2 \quad (10.2)$$

Si estamos pensando en energía por unidad de longitud:

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2$$

No hay que olvidar que esta expresión es válida únicamente para ondas armónicas. (hemos tomado como referencia la energía de un MAS). De esta expresión es importante destacar la dependencia de la energía con el cuadrado de la amplitud de la onda  $A$ .

Ya hemos visto anteriormente la importancia que tiene la velocidad con la que un sistema absorbe energía a la hora de evaluar sus propiedades. En este caso analizaremos el ritmo con el que hay que proporcionar la energía al sistema lo que conducirá al concepto de **potencia transmitida por la onda**.

<sup>3</sup>Es importante no confundir la “ $k$ ” de la expresión de la energía que se refiere a la constante recuperadora “efectiva” que utilizamos para escribir la energía de un elemento de cuerda que describe un MAS, con el número de onda,  $k = 2\pi/\lambda$  introducido en el apartado anterior.

Para ello, vamos a fijarnos en el sistema modelo en dos instantes distintos (Fig. 10.4). La energía de la cuerda en el instante  $t + \Delta t$  es mayor que la del instante previo (hay más longitud de cuerda afectada por la perturbación).

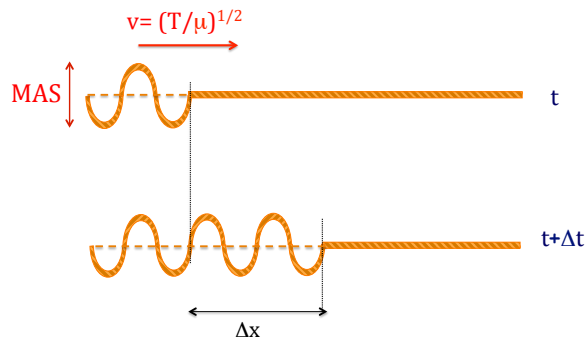


Figura 10.4: Avance de la perturbación a lo largo de la cuerda: en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  ha avanzado una distancia  $\Delta x$ .

Por tanto, la energía adicional que se habrá tenido que suministrar en el intervalo  $\Delta t$ , será  $\frac{1}{2} (\mu \Delta x) \omega^2 A^2$ , y la potencia suministrada:

$$P_m = \frac{\frac{1}{2} (\mu \Delta x) \omega^2 A^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 \quad (10.3)$$

donde  $v$  es la velocidad de la onda en el medio. Puede observarse que cuanto mayor es esa velocidad, a la que se propaga la energía, mayor es la potencia que necesitamos proporcionar al sistema para mantener la perturbación.

La tercera de las magnitudes involucradas en el estudio de la energía de las ondas es la intensidad, definida como la energía transmitida por unidad de tiempo y por unidad de superficie:

$$I = \frac{P_m}{S} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{S} v \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2 \quad (10.4)$$

donde  $S$  = área de la sección transversal del medio por el que se propaga la onda.



Pese a que en la deducción hayamos tomado como modelo una cuerda tensa por la que se propagan ondas transversales, esta expresión es válida para cualquier onda armónica propagándose en un medio material (ondas elásticas).

Para acabar este apartado, vamos a comentar brevemente que si en el medio no hay disipación, la potencia que se proporciona al medio es la que se transmite (la potencia transmitida es constante en el medio). En cuanto a la intensidad, si el área afectada por la perturbación es constante, también permanecerá constante en ausencia de disipación. No obstante, en muchos ejemplos las ondas se propagan en el espacio afectando a superficies cada vez mayores, (pensad por ejemplo en un foco puntual de luz) y aunque  $P_m$  permanezca constante, la intensidad decrece conforme aumenta la distancia al foco de las ondas. Vamos a tratar esto con más detalle en el siguiente apartado.

## 10.5. Ondas en dos y tres dimensiones

Hasta ahora hemos considerado perturbaciones que se propagan a lo largo del eje  $x$ , de la forma general  $y(x, t) = f(x \pm vt)$ . Si pensamos en una onda en una cuerda tensa, la magnitud que nos interesa es el desplazamiento transversal (unidimensional, distancia  $y$ ) de un punto de la cuerda respecto al equilibrio (como en la figura 10.5 a), pero en general no tiene por qué estar restringida a un punto del medio.

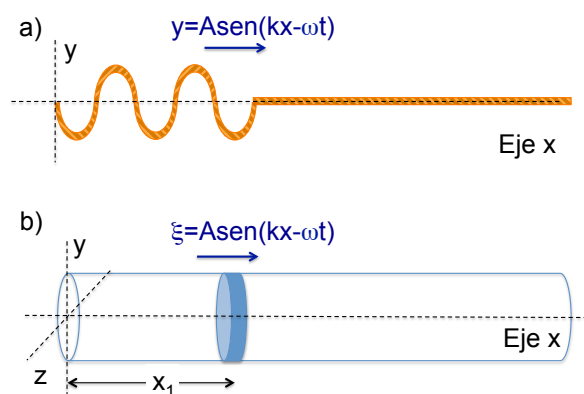


Figura 10.5: a) Propagación de una onda en un medio unidimensional. b) Onda en la que la perturbación, (desplazamiento longitudinal) afecta por igual a todos los puntos en una misma sección. Se ha señalado, a modo de ejemplo, una sección a distancia  $x_1$ .

En la figura 10.5 b, se muestra otro ejemplo, en el que la onda se propaga por un “tubo”, de forma que todos los puntos de una sección dada se verían afectados por la misma perturbación. Si se tiene una onda armónica, en un instante dado  $t_0$ , a todos los puntos de la sección indicada en la figura les correspondería un desplazamiento longitudinal:  $\xi = A \sin(kx_1 - \omega t_0)$ .

Pero las perturbaciones que queremos describir pueden extenderse a todo el espacio. Como una generalización de lo apuntado en el ejemplo de la figura 10.5b, pensemos en una función de la forma genérica  $\xi(x, t) = f(x \pm vt)$  que representa realmente una onda tal que que la perturbación toma el mismo valor en todos los puntos con igual  $x$ . Ahora bien, los puntos que corresponden a  $x = \text{constante}$  definen un plano perpendicular al eje  $x$ , luego  $\xi(x, t)$  representa una **onda plana** moviéndose a lo largo del eje  $x$ . La figura 10.6 puede ayudarnos a introducir dos conceptos fundamentales en la propagación de ondas: rayo y frente de ondas. Se llama **rayo** a la dirección en que se propaga la onda, y **frente de ondas** al lugar geométrico de los puntos en los que el valor de la perturbación es el mismo.

En la búsqueda de una forma más general, tendremos en cuenta que  $x$  puede expresarse como  $\vec{r} \cdot \hat{i}$ , luego  $\xi(x, t) = f(\vec{r} \cdot \hat{i} \pm vt)$  representa igualmente una onda plana propagándose a lo largo del eje  $X$ .

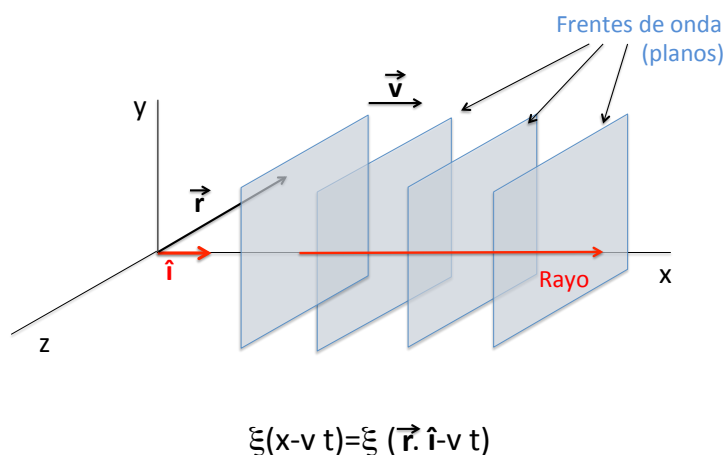


Figura 10.6: Propagación de una onda plana.

Si la onda plana, en lugar de propagarse a lo largo del eje X, lo hiciera en una dirección arbitraria dada por el vector unitario  $\hat{\mathbf{u}}$ , sería descrita por la expresión  $\xi = f(\vec{r} \cdot \hat{\mathbf{u}} \pm vt)$ . En esta caso los frentes de onda serían planos perpendiculares a la dirección dada por  $\hat{\mathbf{u}}$ .

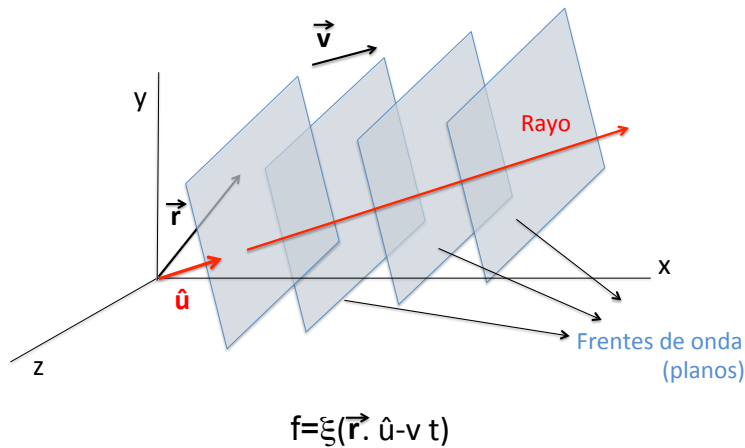


Figura 10.7: Propagación de una onda plana en una dirección arbitraria.

Si pensamos en una onda plana armónica, la función de onda correspondiente sería:  $\xi = A \sin[k(\vec{r} \cdot \hat{\mathbf{u}} \pm vt)]$ . Llamaremos **vector de propagación** o **vector número de onda** a aquel que tiene como módulo  $k = 2\pi/\lambda$  y dirección y sentido los de la propagación.  $\vec{k} = k \hat{\mathbf{u}}$ :

$$\xi = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$$

$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ , pero aunque aparezcan las coordenadas x, y, z, la onda es unidimensional en el sentido de que se propaga en una dirección. La separación entre los dos planos más próximos en los que la perturbación toma los mismos valores es igualmente la longitud de onda.

Sin embargo, existen muchos fenómenos en los que la perturbación se propaga en 2 o 3 dimensiones, como por ejemplo las ondas circulares en el agua (los frentes de onda son circunferencias), la propagación del sonido emitido por un foco puntual (frentes de onda esféricos), o los frentes cilíndricos que se tendrían para una fuente lineal de ondas. En la figura 10.8 se muestran algunos de estos ejemplos de forma esquemática.

Se han marcado varios rayos, perpendiculares a los frentes de onda, tanto en una geometría esférica (a) como cilíndrica (b).

Para que se originen frentes de onda esféricos, además de que la perturbación se origine en un punto (foco de la onda), la velocidad de propagación tiene que ser igual en todas las direcciones (medio **isótropo**).

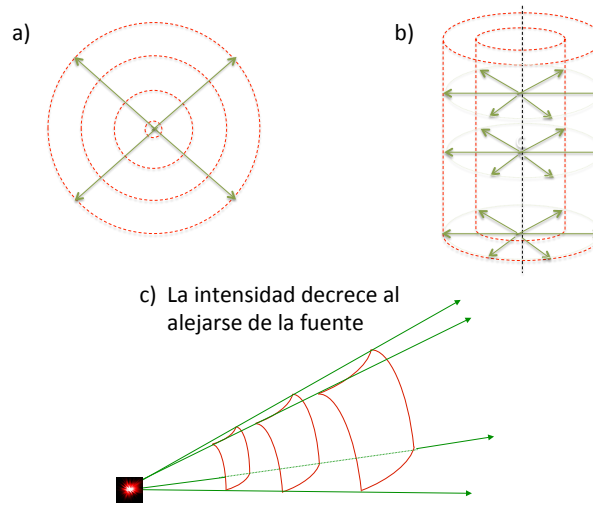


Figura 10.8: Ejemplos de propagación de ondas en dos y tres dimensiones. a) Ondas circulares. b) Ondas cilíndricas. c) Detalle mostrando cómo aumenta la superficie afectada por la perturbación al alejarse de una fuente puntual, en el caso de una onda esférica.

¿Qué ocurre con la energía, la potencia y la intensidad en las ondas planas? ¿Y en las esféricas? Ya hemos visto que, si no hay disipación, la potencia permanece constante:  $P_m = \text{constante}$ . Pero la potencia puede expresarse como  $I S$ , siendo  $I$  la intensidad y  $S$  la sección transversal del medio que se ve afectado por la perturbación. En una onda plana  $S = \text{constante}$ , luego  $I = \text{constante}$ .

Cuando los frentes de onda no son planos, la energía de la onda tiene que “atravesar” secciones más grandes conforme se aleja del foco, como se muestra de forma esquemática en la figura 10.8 c. En el caso de una onda esférica,  $S = 4 \pi r^2$ , luego  $I = \frac{P_m}{4 \pi r^2}$ . Vemos que la intensidad decae con el cuadrado de la distancia:  $I \propto 1/r^2$ . Si pensamos en frentes de onda cilíndricos:  $S = 2 \pi r L$  y la intensidad decaería con el inverso de la distancia,  $I \propto \frac{1}{r}$ . Este fenómeno no hay que confundirlo con la absorción, que puede darse si la perturbación se propaga por un medio

disipativo, absorbente (en el que hay “pérdidas” de energía). Trataremos este punto en concreto al hablar de ondas sonoras en el capítulo siguiente.

## 10.6. Fenómenos de superposición de ondas

Se produce **superposición de ondas** cuando, en un mismo instante, dos o más ondas se encuentran en un lugar.

Vamos a trabajar sólo con ondas armónicas, y de todos los posibles fenómenos de superposición nos vamos a centrar en tres situaciones:

- Superposición de dos ondas iguales que se propagan en sentidos opuestos.
- Superposición de ondas coherentes.
- Superposición de ondas de frecuencias ligeramente distintas.

### 10.6.1. Ondas estacionarias

Las ondas estacionarias pueden verse como el resultado de la superposición de dos ondas iguales que se propagan en sentidos opuestos. Vamos a estudiar este fenómeno en una dimensión. En general, una onda estacionaria se puede producir cuando limitamos el medio por el que se propaga una onda. <sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Hasta ahora considerábamos el medio "muy largo", sin plantearnos qué ocurre cuando el medio se acaba.

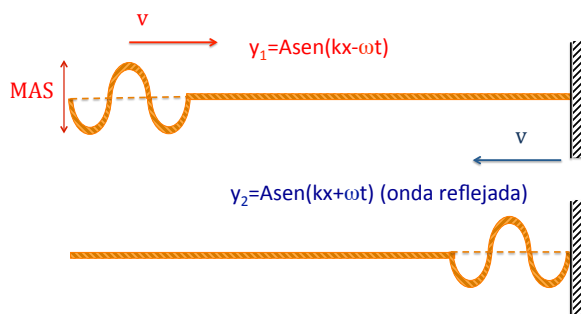


Figura 10.9: Propagación de onda armónica en un medio finito (una cuerda con un límite físico).

En la figura 10.9, la onda que se produce al oscilar el extremo, se propaga por la cuerda con  $v = \sqrt{T/\mu}$ . Al llegar a la pared se refleja y vuelve por el mismo camino, de forma que en el medio se superponen las dos ondas:  $y_1(x, t) = A_1 \sin(kx + \omega t)$  e  $y_2(x, t) = A_1 \sin(kx - \omega t)$ .<sup>5</sup>

La perturbación resultante de la superposición de la onda inicial y la reflejada será la suma de las dos:  $y = y_1 + y_2 = 2 A_1 \sin(kx) \cos(\omega t)$  (recuérdese que  $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ ).

La función que describe una onda estacionaria se caracteriza porque la dependencia de la perturbación con  $\underline{x}$  y  $\underline{t}$  aparece en factores distintos.

En la descripción de este fenómeno no nos podemos olvidar del desfase para poder ajustar las condiciones particulares de un problema, de manera que la forma general será:

$$y(x, t) = A \sin(kx + \alpha) \cos(\omega t + \varphi) \quad (10.5)$$

donde  $\alpha$  depende de las condiciones de contorno (espaciales) y  $\varphi$  de las condiciones iniciales temporales.

En cuanto a la **interpretación de la función de onda estacionaria**, es interesante darse cuenta de que no se tiene realmente una perturbación que se propaga. Representa una oscilación de un medio continuo, en el que todos los puntos describen un M.A.S. de la misma frecuencia  $\omega$

<sup>5</sup>Estrictamente hablando, cuando se da la reflexión se produce un cambio de fase de la onda, de forma que  $y_2(x, t) = A_1 \sin(kx - \omega t + \pi) = -A_1 \sin(kx - \omega t)$ , pero esto no introduce ningún cambio cualitativo en la descripción que se hace aquí y en la forma general de la onda estacionaria dada en la ecuación 10.5.

(la oscilación la da el factor  $\cos(\omega t + \varphi)$ ) y con una amplitud  $f(x)$  que depende de la posición:  $f(x) = A \sin(kx + \alpha)$ . A los puntos de amplitud nula se les llama **nodos** y a los de amplitud máxima **antinodos** o **vientres**. Las condiciones de contorno asociadas a los límites espaciales del medio (en el ejemplo de la cuerda  $x=0$ ,  $x=L$ ) imponen que no todos los valores de  $k$ , y por tanto no todas las frecuencias sean posibles.

Veamos a continuación dos ejemplos clásicos, variando las mencionadas condiciones de contorno.

### Cuerda con dos extremos fijos:

En el ejemplo bien conocido de una cuerda, de longitud  $L$ , con los dos extremos fijos, ¿cuánto vale  $\alpha$ ? ¿cuáles son los valores de  $k$  que pueden darse?

En este sistema, la amplitud  $f(x)$  en  $x = 0$  y en  $x = L$  vale cero. La primera condición se expresa como  $f(0) = 0 = A \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ; la segunda,  $f(L) = 0 = A \sin kL \Rightarrow kL = n\pi$ .

Es decir, de los infinitos valores de  $k = 2\pi/\lambda$ , solo son posibles los que cumplen  $k_n = n\pi/L$ . Comprobamos por tanto que imponer limitaciones espaciales selecciona y limita las posibles ondas estacionarias que pueden existir en el sistema. Como  $k_n = 2\pi/\lambda_n = n\pi/L \Rightarrow \lambda_n = 2L/n$ .

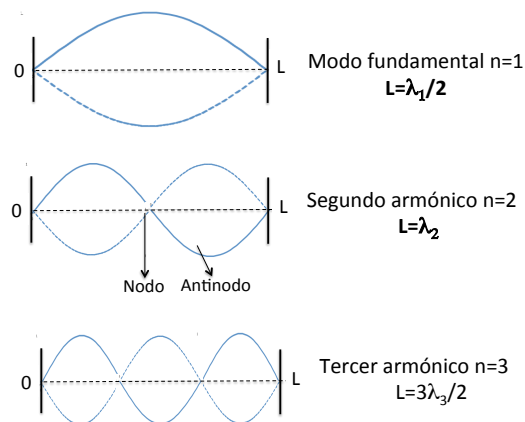


Figura 10.10: Ondas estacionarias en una cuerda tensa con los dos extremos fijos.

Sólo vamos a poder tener ondas estacionarias en las que la longitud del sistema sea un múltiplo de semi-longitudes de onda:  $L = n \lambda_n/2$ . Las

posibles soluciones, que podemos numerar, son identificadas por  $n$ , el índice de modo.

A cada longitud de onda le corresponde una frecuencia:

$$\nu_n \lambda_n = v \Rightarrow \nu_n = \frac{n v}{2 L} = \frac{n}{2 L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Así,  $n = 1$  corresponde a la frecuencia fundamental, y  $n = 2, 3, \dots$  se corresponden con los sucesivos armónicos.

En resumen, para un sistema de longitud  $L$  con los dos extremos fijos, la forma de la solución (función de onda) será:

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{n \pi v}{L} t + \varphi\right)$$

Hay infinitas soluciones, pero todas deben ajustarse a este esquema:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad \nu_n = \frac{n v}{2 L}$$

### Barra rígida con un extremo fijo y el otro libre:

Vamos a utilizar la función general para obtener la solución. En este caso supondremos que se tienen ondas longitudinales que se propagan con velocidad  $v = \sqrt{Y/\rho}$ , pero el fenómeno de superposición puede tratarse de forma análoga.

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx + \alpha) \cos(\omega_n t + \varphi_0)$$

En el extremo fijo habrá un nodo:

$$f(x) = 0 \text{ en } x = 0 \Rightarrow \xi_0 \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

En el extremo libre habrá un máximo:

$$f(x) = \xi_0 \text{ en } x = L \Rightarrow \xi_0 \sin kL = \pm \xi_0 \Rightarrow \sin kL = \pm 1 \Rightarrow kL = m \pi/2$$

con  $m$  impar  $\Rightarrow kL = (2n - 1) \pi/2$ . Es decir, que en este sistema los posibles valores de  $k$  serán los que cumplan  $k_n = (2n - 1) \pi/2L$ , y por tanto  $\lambda_n = 4 L/(2n - 1)$  (la longitud del sistema alberga un número impar de cuartos de onda).



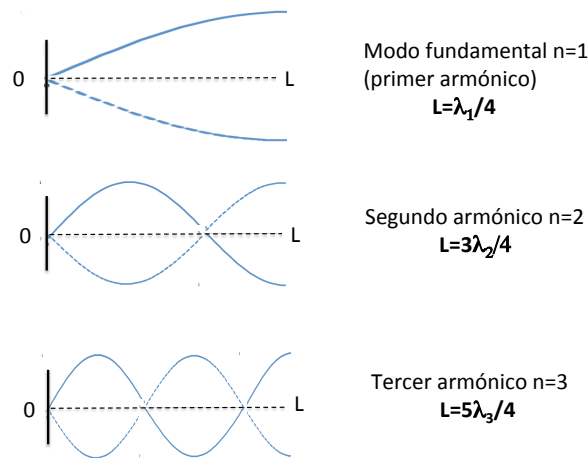


Figura 10.11: Amplitud del desplazamiento del modo fundamental y los sucesivos armónicos en una barra rígida con un extremo fijo y el otro libre.

En cuanto a las frecuencias del modo fundamental ( $n = 1$ ) y los sucesivos armónicos ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) serán:

$$\nu_n = \frac{(2n - 1) v}{4 L}$$

Por tanto, la función de onda se escribirá de la siguiente forma:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin\left(\frac{(2n - 1) \pi}{2L} x\right) \cos\left(\frac{(2n - 1) \pi v}{2L} t + \varphi\right)$$

En la figura 10.11 se muestra la amplitud del desplazamiento en cada punto para el modo fundamental y los primeros armónicos.

¿Dónde estarán localizados los nodos? En las posiciones  $x_{nodo}$  que cumplan la condición  $f(x) = 0$ :

$$\xi_0 \sin\left(\frac{(2n - 1) \pi}{2 L} x_{nodo}\right) = 0 \Rightarrow \frac{(2n - 1) \pi}{2 L} x_{nodo} = m \pi \Rightarrow x_{nodo} = \frac{2 L m}{2n - 1}$$

En el modo fundamental  $n = 1 \Rightarrow x_{nodo} = 0$ ; en el primer armónico  $n = 2 \Rightarrow x_{nodo} = 0, 2L/3$ ; en el segundo armónico  $n = 3 \Rightarrow x_{nodo} = 0, 2L/5, 4L/5$ , y así sucesivamente.

Es importante darse cuenta de que en el caso de las ondas estacionarias longitudinales, el esquema de la figura 10.11 representa la magnitud del desplazamiento máximo (no el perfil de la perturbación).

### 10.6.2. Superposición de ondas coherentes: interferencias

Hablamos propiamente de **interferencias** cuando coexisten en el espacio dos ondas armónicas **coherentes**, esto es, estrictamente de la misma frecuencia y con una diferencia de fase que no depende del tiempo. En el punto P de la figura 10.12 a, las dos perturbaciones que se reciben, y que supondremos que viajan por el mismo medio, serán:  $y_1 = A_1 \sin(kr_1 - \omega t)$ ,  $y_2 = A_2 \sin(kr_2 - \omega t)$ .

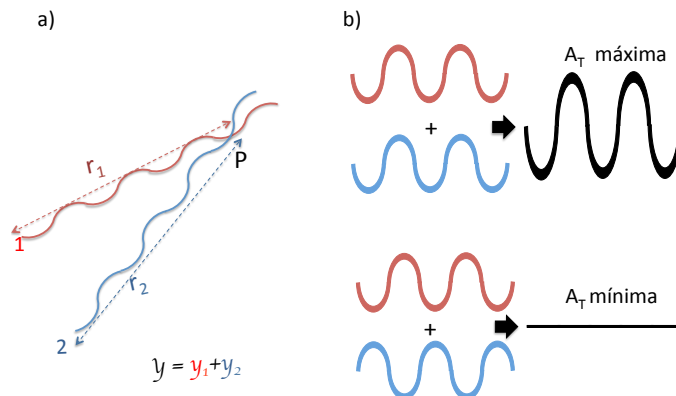


Figura 10.12: Esquema de una superposición de dos ondas que produce interferencias.

Supondremos que  $A_1 = A_2 \equiv A_0$  para simplificar los cálculos:

$$y = y_1 + y_2 = 2 A_0 \cos \left[ \frac{k (r_1 - r_2)}{2} \right] \sin \left[ \frac{k (r_1 + r_2)}{2} - \omega t \right] \quad (10.6)$$

En esta expresión,<sup>6</sup> el factor con la función seno (dependiente del tiempo) nos da la oscilación; por su parte, la amplitud  $A_T$  de la perturbación resultante, que depende de la posición del punto P, será:

$$A_T = 2 A_0 \cos \left[ \frac{k (r_1 - r_2)}{2} \right] = 2 A_0 \cos \frac{\delta}{2}$$

<sup>6</sup>Para obtenerla se ha tenido en cuenta la relación  $\sin A + \sin B = 2 \cos(A - B)/2 \sin(A + B)/2$

Nótese que esa amplitud no cambia con el tiempo. El parámetro fundamental de esta expresión es el **desfase**,  $\delta$ , diferencia de fase entre las dos ondas:  $\delta = k |r_1 - r_2|$ .

En el punto P la perturbación tendrá la máxima amplitud (habrá un **máximo** de interferencia, o interferencia constructiva) si se cumple:

$$\cos \frac{\delta}{2} = \pm 1 \Rightarrow \delta = 2 n \pi \Rightarrow k |r_1 - r_2| = 2 n \pi$$

Esa situación correspondería al esquema superior de la figura 10.12 b. Si lo expresamos en función de  $\lambda$ , la condición de máximo de interferencia será:

$$|r_1 - r_2| = n \lambda \quad (10.7)$$

Por tanto, habrá un máximo de interferencia en los puntos que cumplan que la diferencia de distancias a los focos de las ondas es igual a un número entero de longitudes de onda.

En el punto P habrá un **mínimo** de interferencia si se cumple:

$$\cos \frac{\delta}{2} = 0 \Rightarrow \delta = (2n - 1) \pi \Rightarrow k |r_1 - r_2| = (2n - 1) \pi$$

(Esquema inferior de la figura 10.12 b)

También podemos expresar la condición de mínimo para la diferencia de camino recorrido por las ondas, en función de  $\lambda$ :

$$|r_1 - r_2| = (2n - 1) \lambda/2 \quad (10.8)$$

Por tanto, habrá un mínimo de interferencia (interferencia destructiva) en los puntos que cumplan que la diferencia de distancias a los focos de las ondas es un número impar de semilongitudes de onda.

El lugar geométrico de los puntos en los que la diferencia de fase es constante (esto es, la amplitud es constante) corresponde a una **hipérbola**, de ecuación general  $|r_1 - r_2| = \text{constante}$ .

Llegados a este punto, es importante insistir en el concepto de **coherencia**: para tener un patrón estacionario de amplitud en la perturbación resultante (característico de las interferencias) la diferencia de fase no debe depender del tiempo. Eso en la práctica se consigue con una sola fuente y separando en dos el frente de ondas. De esa manera, las dos fases  $\varphi_1(t)$  y  $\varphi_2(t)$  que aparecerán en  $y_1$  y en  $y_2$  serán idénticas y se cancelarán.

**Método alternativo del cálculo de la amplitud de la perturbación: representación con fasores**

Dadas las ondas  $y_1 = A_1 \sin(kr_1 - \omega t)$ ,  $y_2 = A_2 \sin(kr_2 - \omega t)$ , representaremos cada una de ellas con un vector cuyo módulo es la amplitud de oscilación y que gira con velocidad angular igual a la frecuencia angular de oscilación. Así,  $y_1$  se representa con un vector de módulo  $A_1$  que gira con velocidad angular  $\omega$ . Análogamente,  $y_2$  tendrá módulo  $A_2$  y girará con la misma velocidad angular  $\omega$ . El ángulo entre ambos vectores vendrá dado por el desfase  $\delta$  entre las dos ondas. En esta representación, tal como se muestra en la figura 10.13, la amplitud de la perturbación resultante vendrá dada por el módulo del vector suma de los originales.

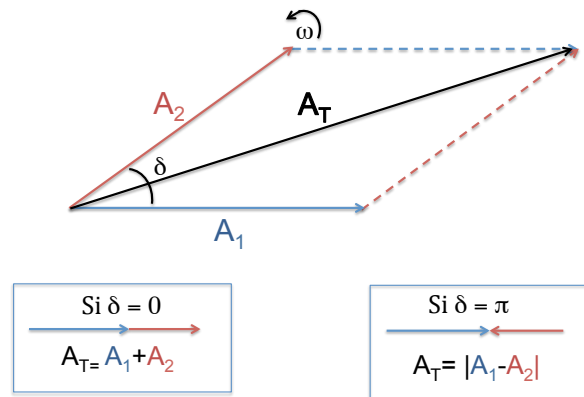


Figura 10.13: Cálculo de la amplitud de la perturbación resultante en la representación con fasores. En los recuadros se muestra el esquema de las dos situaciones extremas, correspondientes a dos ondas en fase y en oposición de fase, respectivamente.

Usando el teorema del coseno se tiene:

$$A_T^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \delta \quad (10.9)$$

Si  $A_1 = A_2 \equiv A_0$ :

$$A_T^2 = 2 A_0^2 (1 + \cos \delta) = 4 A_0^2 \cos^2(\delta/2) \Rightarrow A_T = 2 A_0 \cos(\delta/2)$$

Evidentemente, se llega al mismo resultado obtenido previamente de forma analítica. En los recuadros de la figura 10.13 se muestran de forma esquemática las dos situaciones extremas, correspondientes a las condiciones de interferencia constructiva y destructiva.

¿Qué ocurre con la intensidad cuando se produce una interferencia de ondas? Ya hemos adelantado que hay una redistribución de la energía de las ondas. Teniendo en cuenta la dependencia de  $\bar{I}$  con  $A^2$ , la ecuación 10.9 permite obtener la expresión para la intensidad en función del desfase:

$$I_T = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

que toma como valor máximo  $I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$  y como mínimo  $I_{min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ . En el caso de que las dos ondas sean iguales,  $I_{max} = 4I_0$  e  $I_{min} = 0$ , como muestra la figura 10.14.

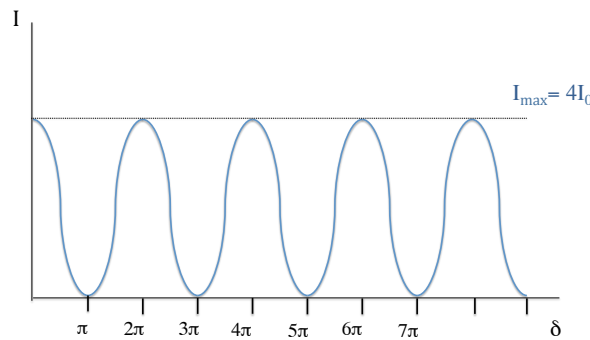


Figura 10.14: Variación de la intensidad de la perturbación total en función del desfase entre las ondas que interfieren.

En los temas siguientes estudiaremos diferentes ejemplos de interferencia de ondas sonoras ?? y de ondas luminosas refch-29-3.

### 10.6.3. Batidos: superposición de ondas de frecuencias ligeramente diferentes

La superposición de ondas armónicas de frecuencias algo distintas da lugar a un fenómeno que se conoce como pulsaciones o batidos. Comencemos por escribir las funciones de las dos ondas originales, suponiendo que su velocidad (a lo largo de la dirección  $x$ ) de propagación es la misma. Así, sus números de onda serán también ligeramente distintos, ya que  $(\omega / k) = v = \text{constante}$ :

$$y_1 = A_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t), \quad y_2 = A_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

Vamos a sumar esas dos ondas, en el instante  $t=0$ , para analizar de forma simple cuál es el perfil de la perturbación resultante (cuál es la "forma" de la onda resultante de la superposición). Por simplicidad, supondremos también que  $A_1 = A_2 = A_0$

$$y = y_1 + y_2 = 2 A_0 \cos \left[ \frac{(k_1 - k_2) x}{2} \right] \sin \left[ \frac{(k_1 + k_2) x}{2} \right] \quad (10.10)$$

La onda resultante, cuyo perfil constituido por pulsos ("paquetes de ondas") se muestra en la figura, se propagará en el medio, sin cambiar de forma, con la misma velocidad  $v$  que las originales. Esta función de onda se puede interpretar como la de una perturbación cuyo número de ondas es igual al promedio de los valores de las ondas originales  $(k_1 + k_2)/2$ , y con una amplitud modulada en el espacio. Así, la longitud de onda de la perturbación será:

$$\lambda = \frac{2\pi}{(k_1 + k_2)/2} \quad (10.11)$$

En cuanto a la longitud de onda "de modulación" (la de la función que modula la amplitud) sería:

$$\lambda_{mod} = \frac{2\pi}{|k_1 - k_2|/2} \quad (10.12)$$

Es inmediato ver que en la longitud anterior  $\lambda_{mod}$  caben dos pulsos, por lo que el tamaño de cada pulso, es decir, su anchura espacial es:

$$\Delta x = \frac{2\pi}{|k_1 - k_2|} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{|\lambda_1 - \lambda_2|} \quad (10.13)$$

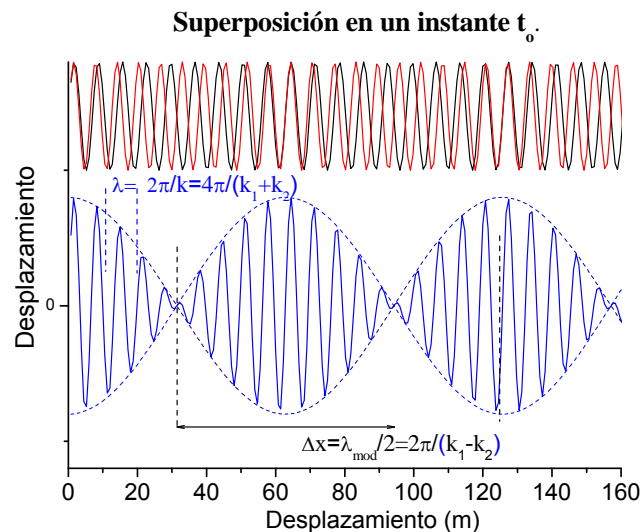


Figura 10.15: Batido: esquema del perfil resultante (analizado en un instante determinado) al superponer dos ondas de longitud de onda ligeramente distinta.

Si en lugar de analizar la dependencia espacial, nos fijamos en una posición determinada  $x$  y nos centramos en la dependencia temporal, se observan igualmente pulsaciones (una amplitud y por tanto una intensidad modulada) en el tiempo; la frecuencia de la onda es:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (10.14)$$

percibiéndose un máximo de intensidad a intervalos regulares de tiempo  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{1}{|\nu_1 - \nu_2|} \quad (10.15)$$





## Capítulo 11

# ONDAS SONORAS. INTENSIDAD DEL SONIDO. TONO Y TIMBRE.

Ya se adelantó en el capítulo anterior que el sonido es una onda; se trata de una perturbación longitudinal que se propaga con diferente velocidad según el medio. Por ejemplo, puede demostrarse que en un medio sólido se propaga con una velocidad:  $v_{\text{barra rigida}} = \sqrt{Y/\rho}$ , mientras que en un medio gaseoso:  $v_{\text{gas}} = \sqrt{B/\rho_0}$ .

La mayoría de los fenómenos relacionados con la propagación del sonido que nos van a interesar tienen lugar en un fluido (normalmente aire), así que vamos a centrarnos en su estudio.

### 11.1. *Naturaleza del sonido*

El **sonido** son ondas longitudinales elásticas de compresión y rarefacción en un medio material, sólido o fluido. La **compresión** implica una modificación de presión mientras que la **rarefacción** se refiere a una modificación de la densidad.

Como el sonido se relaciona habitualmente con el sentido del oído, tendemos a considerar sólo las ondas a las que nuestro oído es sensible (en un rango de frecuencias entre 20 Hz y 20 kHz). No obstante, desde un punto de vista físico, tan sonido son las ondas de estas frecuencia como los ultrasonidos de cientos de miles de Hz.

¿Qué magnitudes físicas se ven perturbadas cuando el sonido se propaga por un medio cualquiera? Por una parte, la **posición** de las moléculas o

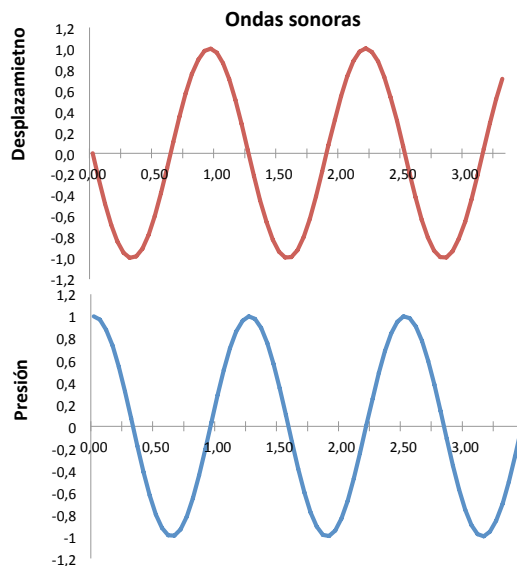


Figura 11.1: Representación gráfica del sonido como onda de desplazamiento (de las partículas del medio respecto a su posición de equilibrio) y de presión. Préstese atención al desfase de  $\pi/2$  entre ambas (están desplazadas  $\lambda/4$  una respecto a la otra).

átomos y, en consecuencia, la **presión** y la **densidad** (estas dos últimas son particularmente evidentes en los gases).

Teniendo eso en cuenta, un mismo fenómeno - la propagación del sonido - admite tres descripciones distintas:

- Onda de presión:  $p - p_0 = A \cos(kx - \omega t)$ , donde  $p$  es la presión,  $p_0$  la presión de equilibrio y  $A$  el máximo alejamiento de  $p$  respecto a la presión de equilibrio.
- Onda de densidad:  $\rho - \rho_0 = (\rho_0 A/B) \cos(kx - \omega t)$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\rho_0$  su valor de equilibrio y  $B$  el módulo de compresibilidad.

La onda de densidad va en fase con la de presión (lógicamente, cuanto mayor sea la densidad de moléculas, mayor será la presión que ejerzan).

- Onda de desplazamiento:  $\xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t + \pi/2)$ , con  $\xi_0 = \frac{A \lambda}{2 \pi B}$ .

En el esquema (ver Fig. 11.1) puede verse que la onda de desplazamiento va desfasada  $\pi/2$  respecto a la de presión (y a la de densidad).

A continuación, cuantifiquemos algunas de las magnitudes que intervienen en la descripción del sonido para obtener una expresión para la velocidad de propagación en función de magnitudes más fácilmente accesibles.

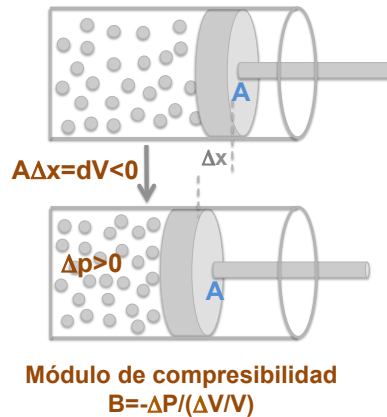


Figura 11.2: Compresión de un gas y relación entre la variación de presión y la de volumen.

Vamos a partir de la expresión  $v = \sqrt{B/\rho_0}$  y fijémonos en el módulo de compresibilidad, definido como  $B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$  (ver figura 11.2).  $B$  es una magnitud cuyo valor depende de las condiciones ambientales. Considerando que la propagación del sonido se realiza en condiciones adiabáticas (sin transferencia de calor), se tiene que  $p V^\gamma = \text{constante}$ , donde  $\gamma$  es la constante adiabática del gas ( $\gamma = 1.4$  para el aire, visto como una mezcla de gases ideales diatómicos).

En condiciones adiabáticas, es inmediato demostrar que  $B = \gamma P$ , con lo que la velocidad se expresa como  $v = \sqrt{\gamma P/\rho_0}$ . No obstante, es más útil transformar esa expresión para que aparezca de forma explícita la temperatura (absoluta) del gas, magnitud más fácil de determinar.

Partiendo de la ecuación de los gases ideales,  $p V = n R T$ , y sustituyendo  $V = m/\rho_0 = n M/\rho$ , siendo  $M$  = la masa molar, obtenemos:

$$P = \frac{\rho_0 R T}{M} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma \rho_0 R T}{M \rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

Vemos que la velocidad es proporcional a  $\sqrt{T}$ :  $v = \alpha \sqrt{T}$ , con  $\alpha = \sqrt{\gamma R T/M}$ . Para el aire  $\gamma = 1.4$ ,  $R = 8.31 \text{ J/K.mol}$ ,  $M = 28.6 \text{ g/mol}$ , luego  $\alpha \approx 20.055 \text{ ms}^{-1}\text{K}^{-1/2}$ .

## 11.2. Características del sonido: intensidad, tono y timbre

Ya se ha visto que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud del desplazamiento (de las moléculas del medio respecto a su posición de equilibrio).

Si expresamos la intensidad en función de la potencia media:

$$I = \frac{P_m}{\text{sección}} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2 \quad (11.1)$$

Si se define la densidad de energía (energía por unidad de volumen)  $\eta_m = \rho \omega^2 A^2 / 2$ , podemos expresar la intensidad como  $I = \eta_m v$ .

Sin embargo, la intensidad así definida (que se expresa en el sistema internacional en  $W/m^2$ ) no es representativa de como el oído humano percibe el sonido: un sonido de intensidad  $I = 2 \cdot 10^{-6} W/m^2$  no lo percibimos el doble de intenso que uno de  $1 \cdot 10^{-6} W/m^2$ . Nuestra forma de percepción se ajusta mejor con una escala logarítmica. Es más conveniente utilizar por tanto una escala de sensación sonora, utilizando la magnitud **nivel de intensidad**, representada por  $\beta$  y definida como:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (11.2)$$

donde  $I_0 = 10^{-12} W/m^2$  es un valor de referencia que corresponde al **umbral de audición**. El nivel de intensidad así definido se mide en decibelios (dB).

Un sonido de 20 dB es percibido aproximadamente como el doble de intenso que uno de 10 dB. Un sonido de  $1 W/m^2$ , esto es, 120 dB, corresponde a la sensación de dolor. Se muestran a continuación algunos valores de nivel de intensidad de fenómenos conocidos:

Conversación normal/baja	$10^{-9} W/m^2$	30 dB	poco ruidoso
Tráfico denso	$10^{-5} W/m^2$	70 dB	ruidoso
Catarata	$10^{-3} W/m^2$	90 dB	daño (si persiste)
Concierto (altavoces)	$1 W/m^2$	120 dB	dolor

En las cercanías de un martillo neumático trabajando o de un avión despegando, la intensidad del sonido es superior a estos niveles, por lo que es imprescindible usar protección.

Si pensamos en los dos valores extremos mencionados (umbral de audición:  $I = 10^{-12} W/m^2$ ; umbral de dolor:  $I = 1 W/m^2$ ), podemos calcular

qué amplitudes se corresponden con ellos. Supongamos una frecuencia de 2000 Hz. Supongamos que  $v = 340 \text{ m/s}$ . Teniendo en cuenta la expresión que relaciona la intensidad del sonido con el cuadrado de la amplitud de desplazamiento, puede escribirse:

$$\xi_0^2 = \frac{2 I_0}{\rho v \omega^2}$$

con  $\omega = 4000 \pi \text{ rad/s}$ ,  $\rho = 1.28 \text{ kg/m}^3$ .

Sustituyendo los valores numéricos, para el umbral de audición se tiene que:  $\xi_0 = 5.4 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 5.4 \text{ pm} \Rightarrow A \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ .

En el umbral de dolor:  $\xi_0 = 5.4 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 5.4 \text{ }\mu\text{m} \Rightarrow A \approx 30 \text{ Pa}$ .

También se usa en ocasiones una escala de sensación sonora definida a partir de la presión (de las ondas sonoras), en lugar de la intensidad como en la ecuación 11.2. En este caso el valor de referencia que se usa es  $P_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ .

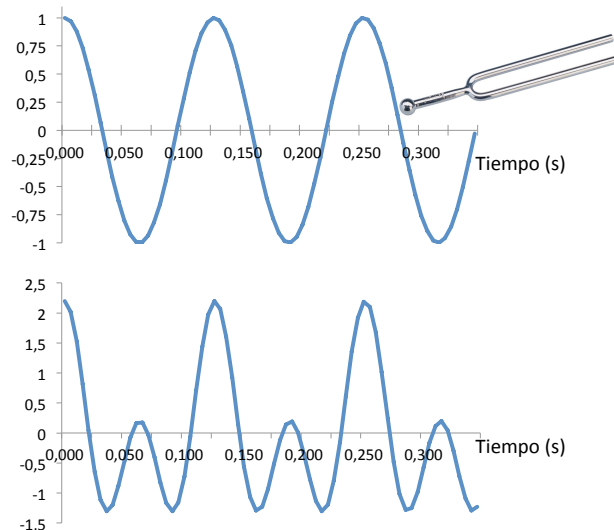


Figura 11.3: Ondas de igual tono y distinto timbre. La de arriba, puramente armónica, correspondería a un sonido de frecuencia  $\omega$  (como el producido por un diapasón). La de abajo corresponde a la superposición de una onda de frecuencia angular  $\omega$  y otra de frecuencia doble (segundo armónico,  $2\omega$ ).

La frecuencia de un sonido se corresponde con su **tono**. Cuanto mayor es la frecuencia de la onda sonora, más agudo es el sonido. (y cuanto menor, más grave).

Por otra parte, al caracterizar un sonido se habla de su **timbre**, que viene determinado por la presencia de armónicos ( $2\omega$ ,  $3\omega$ , ...) de la frecuencia fundamental, con diferentes amplitudes. Dos sonidos que tienen la misma frecuencia fundamental (es decir, mismo tono) suenan de distinta forma si su timbre es distinto (ver Fig. 11.3).

Es importante recordar que la sensibilidad del oído humano no es la misma para todas las frecuencias. Aunque, como ya se ha comentado, el rango en que oímos comprende de 20 Hz a 20 kHz, es más sensible alrededor de 4000 Hz. Para visualizar esto podemos usar lo que se conoce como **curvas isofónicas**, que se muestran en la figura 11.4, y que representan el conjunto de sonidos (puros) que producen la misma sensación sonora (la misma sonoridad), en función de la frecuencia. La unidad utilizada para describir el nivel de intensidad correspondiente a esas curvas isofónica es el Fonio o Fon: corresponde con el nivel de sonido expresado en dB SPL (escala referida al umbral de variación de presión) a 1000 Hz. Así, un tono puro de frecuencia de 1000 Hz emitido a 20 dB SPL será de 20 fonios, equivalente en sonoridad a un tono puro de una frecuencia de 100 Hz emitido a 43dB SPL. (las siglas SPL hacen referencia a la escala definida en términos de la presión)

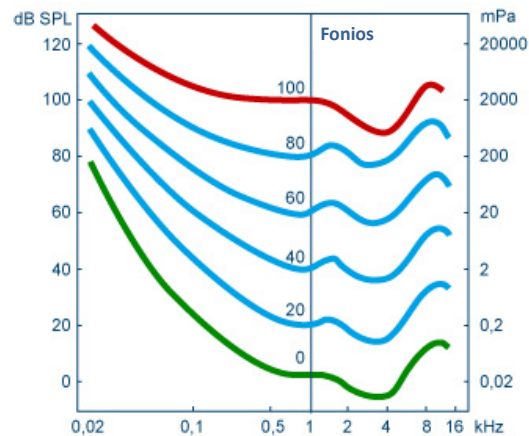


Figura 11.4: Curvas isofónicas medias, obtenidas en una cámara anecoica.

### 11.3. Interferencia de ondas sonoras. Ejemplo.

Acabamos de ver en el capítulo anterior que cuando dos o más ondas se solapan en el espacio podemos calcular la onda resultante aplicando el principio de superposición (ecuación 10.6), de forma que el desplazamiento resultante en cualquier punto y en cualquier instante se encuentra sumando los desplazamientos instantáneos que producirían en el punto las ondas individuales si cada una se presentara sola.

Vamos a aplicar las condiciones de interferencia constructiva (10.7 y destructiva 10.8, deducidas en el capítulo anterior, al ejemplo cuyo esquema se muestra en la figura 11.5. Supongamos que  $A_1$  y  $A_2$  son dos altavoces, separados una distancia  $D$  y alimentados en fase por el mismo amplificador. Ambos emiten ondas armónicas idénticas con la misma frecuencia (la existencia de una única fuente de alimentación garantiza la coherencia de las ondas emitidas por ambos). Es inmediato entender que en un punto equidistante de los altavoces las ondas llegan en fase, y por tanto habrá interferencia constructiva. Eso es lo que ocurrirá para todos los puntos como  $P$ , situados sobre la línea  $m$  ( $r_1 = r_2$ ). Si se piensa en un punto tal que las distancias hasta los altavoces difieren en media longitud de onda, las dos ondas llegarán desfasadas medio ciclo y habrá interferencia destructiva. La amplitud de la onda sonora sería mucho menor que cuando sólo está presente un altavoz. Si las amplitudes de los dos altavoces son iguales, las dos ondas se cancelarían por completo y la amplitud total ahí sería cero (es decir, no se percibiría ningún sonido).

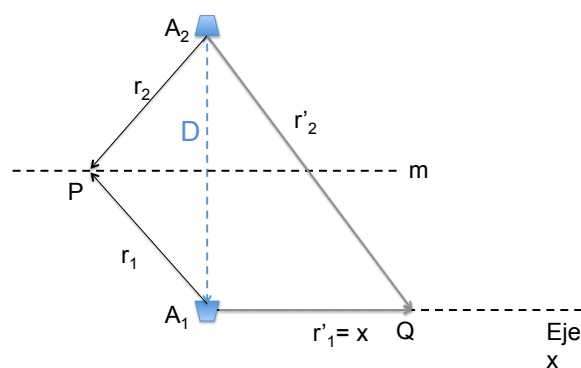


Figura 11.5: a) Las ondas coherentes procedentes de los dos altavoces interferirán en la región, dando lugar a máximos y mínimos de intensidad dependiendo de la distancia de cada uno de los altavoces al punto considerado.

Podemos plantear qué ocurriría a lo largo del eje  $x$  indicado en el esquema. Sobre esa línea habrá puntos (en posiciones  $x_{max}$ ) en los que se producirá interferencia constructiva, y otros en los que las dos ondas

interferirán destructivamente (posiciones  $x_{min}$ ). Obtengamos en primer lugar las posiciones  $x_{max}$ , que serán aquellas para las que se cumpla:

$$|r'_2 - r'_1| = n\lambda \Rightarrow (D^2 + x^2)^{1/2} - x = n\lambda \quad (11.3)$$

Y despejando x,

$$x_{max} = \frac{D^2 - n^2\lambda^2}{2n\lambda} \quad (11.4)$$

Dando valores a n (enteros) se obtendrían los valores  $x_{max}$ .

Para obtener  $x_{min}$  se procederá de forma análoga, pero imponiendo que la diferencia de camino  $|r'_2 - r'_1|$  sea igual a  $(2n - 1)\lambda/2$ .

#### 11.4. *Absorción y atenuación del sonido*

Al estudiar la propagación de ondas en dos y tres dimensiones, (sección 10.5) ya se habló del fenómeno de la atenuación de la intensidad de una onda. Cuando se tiene una onda esférica (o cilíndrica), la intensidad disminuye al aumentar la distancia al foco de la onda. En particular, si se tiene una onda esférica en un medio homogéneo e isótropo:

$$I = \frac{P_m}{4 \pi r^2} \Rightarrow A \propto \frac{1}{r}$$

Eso hace que percibamos una menor intensidad sonora (menor volumen) conforme nos alejamos de la fuente, aunque en el medio no se produzca disipación de la energía.

Ahora bien, la propagación del sonido rara vez tiene lugar en un medio de esas características. Las ondas se encuentran con obstáculos, los medios en los que produce la propagación (incluso el aire) absorben parte de la energía, lo que hace que sea imprescindible tener en cuenta otros factores (además de la atenuación ya mencionada) cuando se diseña, por ejemplo, un auditorio, un salón de actos...

En líneas generales, la calidad del sonido en un recinto depende de:

- La fuente sonora (emite unas frecuencias determinadas, hay que tener en cuenta la composición espectral, la potencia emitida,...)
- El medio de propagación, que será aire normalmente.
- Naturaleza de las superficies y de los obstáculos que encuentre el sonido al propagarse.



Para estudiarlo, hay que tener en cuenta los diversos fenómenos, característicos de las ondas, que pueden darse: reflexión, refracción, absorción, difracción..

Los procesos de reflexión en las superficies interiores de un recinto donde se genera un onda sonora tienen como consecuencia el fenómeno de **reverberación**. (el eco es un ejemplo de reflexión de ondas sonoras.) La duración de este proceso determina la calidad del sonido. Para entender esto, pensemos en que en cualquier punto se recibirá el sonido directo de la fuente y el procedente de las reflexiones que han tenido lugar. En este contexto se habla de **recintos anecoicos**, esto es, sin ecos; en estos recintos sólo se recibe el sonido directo (las paredes impiden que se refleje el sonido). La situación opuesta correspondería a las denominadas **cámaras reverberantes**, en la que las superficies son prácticamente perfectas reflectoras.

Veamos a continuación unas pautas para caracterizar la **absorción** de ondas sonoras, tanto por diversos obstáculos como por el aire.

- Absorción del sonido por parte de los obstáculos: En sentido estricto, la absorción se debe a la disipación de energía acústica (en forma de calor, por ejemplo). No obstante, en ocasiones, bajo el término absorción se engloba también la parte de energía que “atraviesa el material”; se identifica así la  $E_{absorbida} = E_{inc} - E_{ref}$ . (ver figura 11.6a).

De acuerdo con el esquema de la figura, se define el **coeficiente de absorción** acústica, parámetro adimensional, como:

$$\alpha = \frac{E_{inc} - E_{ref}}{E_{inc}}$$

entendiendo que la energía que no se refleja es la disipada en el obstáculo (paredes, personas, muebles)... y la que se transmite a través del mismo.

Es habitual hablar de **absorción, A**, calculada multiplicando  $\alpha$  por el área ( $S$ ) de la superficie que absorbe:  $A = \alpha S$ . Para evaluarla es habitual trabajar con valores tabulados de  $\alpha$  (que pueden consultarse en tablas estandarizadas). A modo de ejemplo, se aporta en la tabla siguiente una serie de valores de  $\alpha$  para diversos materiales y dos frecuencias distintas.

- Absorción del aire: Es relevante en recintos grandes, a frecuencias superiores a 2000 Hz. Como se muestra en la figura 11.6b, tras

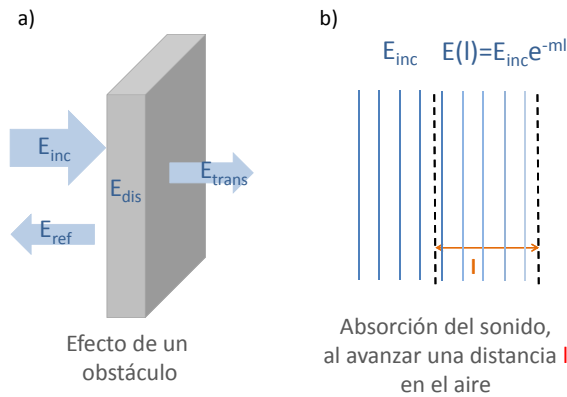


Figura 11.6: a) Efecto de un obstáculo, por ejemplo una pared, en la propagación del sonido.  $E$  se refiere genéricamente a la energía de las ondas. Parte de la energía que incide se refleja, parte se disipa en el obstáculo y parte lo atraviesa y pasa al otro lado. b) Esquema de la absorción de las ondas sonoras por el aire.

Material/Elemento	$\alpha$ (500 Hz)	$\alpha$ (2000 Hz)
Hormigón	0,02	0,023
Tarima de madera	0,08	0,10
Moqueta (según grosor)	0,13-0,20	0,46-0,64
Terciopelo	0,35	0,38
Porexpan (5 cm)	0,6	0,83

recorrer en el aire una distancia  $l$ , la energía del sonido habrá disminuido de acuerdo con la expresión:  $E(l) = E_{inc} e^{-ml}$ , siendo  $m$  = coeficiente de absorción acústica del aire por unidad de longitud. La absorción total del aire puede calcularse mediante la expresión  $A_{aire} = 4 m V$ , siendo  $V$  el volumen del recinto. Las unidades de  $m$  son neper/m (para recordar que en su definición interviene aparece un logaritmo neperiano):

$$\ln \frac{E_{inc}}{E(l)} = ml \Rightarrow m = \frac{1}{l} \ln \frac{E_{inc}}{E(l)}$$

A una temperatura de  $20^{\circ}\text{C}$  y en un rango de 50-70 % de humedad relativa, el valor del coeficiente es  $m(500 \text{ Hz}) = 1 \cdot 10^{-3} \text{ neper/m}$  mientras que  $m(4000 \text{ Hz}) = 4.1 \cdot 10^{-3} \text{ neper/m}$ .

### Tiempo de reverberación de Sabine

Hay diferentes parámetros que se usan para caracterizar la calidad acústica de un recinto. Una de las formas de enfocar el problema sería estudiar el tiempo que debe transcurrir desde que se emite un sonido en un recinto hasta que el nivel de intensidad ha disminuido lo suficiente como para considerar que es despreciable. Si el sonido “perdura mucho” (por ejemplo, porque hay mucho eco), se entiende que la calidad acústica del recinto no será buena. Uno de los parámetros más conocidos es el denominado tiempo de reverberación de Sabine o  $T_{60}$ , que se define como el tiempo transcurrido hasta que un sonido ha decaído en 60 dB una vez que la fuente ha dejado de emitir. Es equivalente a decir que la densidad de energía acústica  $\eta_m = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$  haya decaído a una millonésima parte de su valor inicial. A finales del siglo XIX, Sabine enunció que el tiempo de  $T_{60}$  sólo dependía del volumen, del área de las superficies interiores y de su absorción.

Si llamamos  $\underline{A}$  a la absorción total (debida al conjunto de elementos y al aire),  $V$  al volumen y  $v_S$  a la velocidad del sonido, se tiene que:

$$T_{60} = T_{Sabine} = \frac{55.2 V}{v_S A} = \frac{0.16 V}{A}$$

El tiempo de reverberación da una idea aproximada de la calidad acústica del recinto aunque no es representativo en determinadas condiciones, como por ejemplo cuando se está en una cámara reverberante (superficies perfectamente reflectantes:  $\alpha = 0 \Rightarrow T_{60} = \infty$ ). En el caso de superficies interiores totalmente absorbentes (recinto anecoico) tampoco tiene sentido hablar de reverberación.

Por ejemplo, para un espacio como un aula normal, los valores que se dan como aceptables son  $T_{60} < 0.7$  s para un volumen de  $350 \text{ m}^3$  (piénsese por ejemplo en unas dimensiones  $\approx 10 \times 12 \times 3 \text{ m}^3$ ).



# Conclusiones III

Conclusiones de la tercera parte ...



Parte V

NATURALEZA Y PROPAGACIÓN  
DE LA LUZ. ÓPTICA.





## INTRODUCCIÓN

La Óptica es la rama de la física que se ocupa del comportamiento de la luz y otras ondas electromagnéticas; el conocimiento de sus propiedades nos permite entender el color azul del cielo, diseñar dispositivos ópticos tales como telescopios, microscopios, o entender el funcionamiento del propio ojo humano. Los mismos principios básicos de la óptica están en la base de sistemas como la fibra óptica, los hologramas o las novedosas técnicas para obtener imágenes con fines médicos, por poner unos pocos ejemplos.

En este capítulo se analizarán las leyes de la reflexión y refracción y los conceptos de dispersión y polarización de la luz. De modo sencillo se compararán las distintas descripciones posibles de la luz en términos de partículas, rayos y ondas, y se presentará el principio de Huygens, un eslabón importante que relaciona los puntos de vista geométrico (basado en rayos) y ondulatorio.



## Capítulo 12

# NATURALEZA Y PROPAGACIÓN DE LA LUZ. ÓPTICA

### 12.1. *Naturaleza de la luz. Ondas electromagnéticas.*

Se conoce como luz a la parte visible del espectro electromagnético: ondas comprendidas entre 400 nm ( $7.5 \cdot 10^{14}$  Hz) y 700 nm ( $4.3 \cdot 10^{14}$  Hz) aproximadamente. La particularidad que tiene esta región del espectro electromagnético radica en que el ojo humano es sensible a ese rango de frecuencias.

En una onda electromagnética, ¿qué magnitud o perturbación se propaga? Los campos eléctrico y magnético, que oscilan en el tiempo en direcciones perpendiculares entre sí.

Pero, realmente, la descripción de la luz como un fenómeno puramente ondulatorio no es completa. De hecho se dice que tiene una **doble naturaleza, onda-corpúsculo**, y que según el fenómeno estudiado se pone de manifiesto una u otra. Para estudiar los fenómenos de propagación utilizaremos el **modelo ondulatorio**, pero para estudiar, por ejemplo, fenómenos relacionados con la absorción y emisión de radiación se utiliza el **modelo corpuscular**. En éste, la luz se considera constituida por cuantos de energía llamados  **fotones**.

En el siglo XIX se tenía ya bastante clara la naturaleza ondulatoria<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Durante mucho tiempo triunfó la teoría corpuscular, que pensaba que la luz eran chorros de partículas emitidos por los cuerpos luminosos.

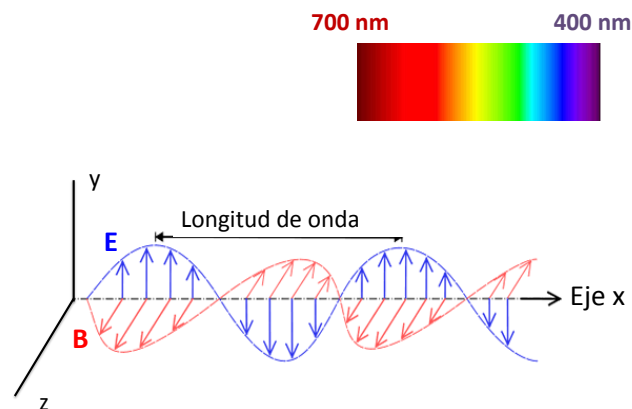


Figura 12.1: La luz es una onda electromagnética: los campos eléctrico y magnético oscilan con el tiempo.

de la luz: Maxwell calculó la velocidad de las ondas electromagnéticas  $c$  teóricamente, y Hertz produjo y detectó las ondas (en el rango de las microondas y radiofrecuencias). Pero por otra parte, Hertz descubrió el efecto fotoeléctrico, que se explica teóricamente si la luz se comporta como un conjunto de partículas (fotones). Einstein lo explicó en 1905, mérito por el que se le concedió el Nobel de Física en el año 1921.

En este curso nos vamos a limitar a una visión ondulatoria. Dentro de ésta, una primera aproximación que permitirá entender muchos conceptos de la vida cotidiana es la **Óptica Geométrica**.

## 12.2. Principio de Huygens.

Se trata de un principio fundamental para entender algunos aspectos de la propagación de ondas. Huygens lo estableció en el siglo XVII, doscientos años antes de que Maxwell formalizara el concepto de onda electromagnética.

Enunciado: Todo punto del frente de ondas de una perturbación que se propaga actúa como nuevo foco puntual emisor de ondas.

Recordemos que el frente de ondas puede verse como el lugar geométrico de los puntos del medio que son alcanzados en un mismo instante por una determinada onda que se propaga en ese medio. De acuerdo con el enunciado del principio de Huygens, puede entenderse que un frente de ondas “general” se construye como la envolvente de las ondas generadas en cada punto del frente de ondas anterior.

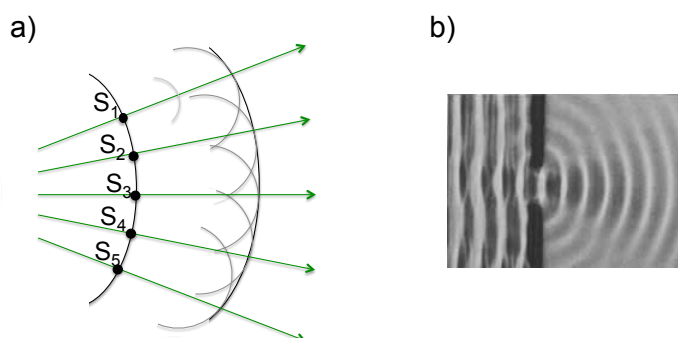


Figura 12.2: Principio de Huygens. a) Construcción del frente de ondas como envolvente de las ondas generadas en cada punto. b) Fotografía que muestra como a partir de un frente plano, seleccionando “un punto”, se generan frentes circulares.

En un planteamiento mecánico, el principio de Huygens se entiende fácilmente: las partículas del medio comienzan a oscilar cuando llega la perturbación, y su movimiento se transmite a las contiguas y así sucesivamente.

Es importante recordar que los frentes que se originan son circulares (o esféricos) por tratarse de fuentes ideales puntuales. Según como sea el frente original (y el medio en el que se propaga la onda) se van generando los sucesivos frentes que avanzan en el medio.

### 12.3. Óptica Geométrica. Reflexión y refracción.

En este apartado vamos a fijarnos solo en uno de los aspectos de la naturaleza ondulatoria de la luz, considerando únicamente su dirección de propagación representada por el concepto de **rayo** (perpendicular a los frentes de onda).

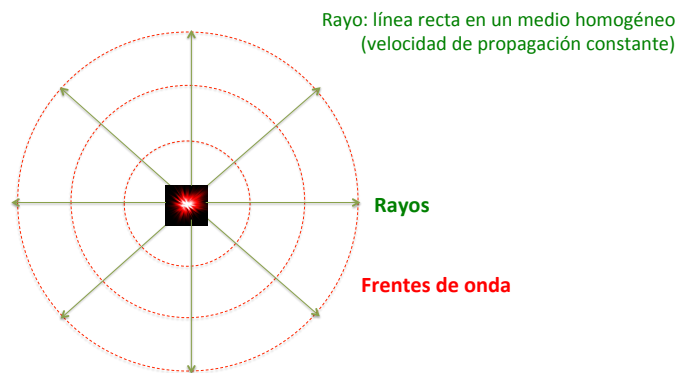


Figura 12.3: En óptica geométrica, de las diferentes características de las ondas electromagnéticas, nos quedamos con la dirección de propagación=rayo.

Pensemos por ejemplo en una fuente puntual (ver Fig. 12.3): los frentes de onda son esféricos y los rayos tienen dirección radial. Recordad que los frentes de onda son los lugares geométricos de los puntos en los que la fase de la vibración de la magnitud considerada es la misma. Si no hay vibración, simplemente es el conjunto de puntos en los que la perturbación toma el mismo valor.

Cuando decimos que la luz se propaga en línea recta, nos referimos a que los rayos son líneas rectas, que no cambian de dirección, mientras no haya alteraciones en el medio, esto es, el rayo no cambia de dirección cuando viaja por un medio homogéneo e isótropo.

Pero, ¿qué ocurre cuando una onda se encuentra con un medio distinto o cuando se modifica el medio por el que se propaga?

En general, al incidir cualquier onda en la superficie de separación entre dos medios aparecen dos ondas (que representaremos por dos rayos) que corresponden a la transmisión y a la reflexión. Estos fenómenos son fundamentales para entender mucho de lo que vemos en nuestra vida cotidiana y pueden manejarse fácilmente en el ámbito de la óptica geométrica (aunque no son, desde luego, exclusivos de la luz).

Las direcciones de los rayos incidente, reflejado y refractado (transmitido al segundo medio) se definen respecto a la normal  $\underline{N}$ , perpendicular a la superficie de separación en el punto de incidencia del rayo.

Si la superficie sobre la que incide un haz de luz no es lisa, lo que ocurre

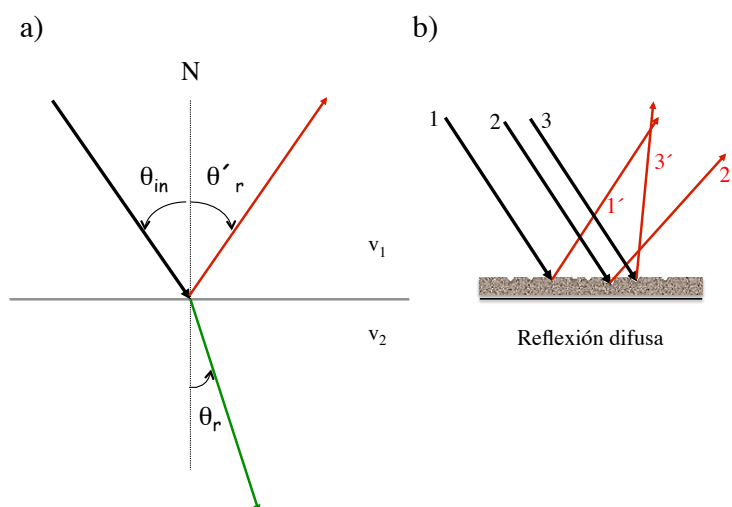


Figura 12.4: a) Reflexión y refracción en la superficie de separación entre dos medios. b) Reflexión difusa en una superficie irregular.

la mayoría de las veces, no se tiene una única dirección para todos los rayos reflejados y la luz se dispersa en muchas direcciones: **luz reflejada difusa**. Si varios rayos incidentes paralelos entre sí dan rayos reflejados también paralelos entre sí, hablaremos de **reflexión especular**.

Casi todos los objetos de nuestro entorno son visibles porque reflejan de forma difusa la luz. Sin embargo, nosotros vamos a centrarnos en los procesos que tienen lugar cuando las superficies son completamente lisas, como vidrio o metal muy pulidos, esto es, superficies en las que se produce reflexión especular.

El concepto de **índice de refracción** es fundamental en óptica geométrica, definiéndose como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la del medio:  $n = c/v$ . (Siempre es mayor que la unidad)

### 12.3.1. Leyes de reflexión y refracción

Fijémonos en la figura 12.4 a).

- Los rayos incidente, reflejado y refractado están en un mismo plano que llamaremos **plano de incidencia**.
- El ángulo de incidencia es igual al de reflexión:  $|\theta_i| \equiv |\theta_r|$  (el signo dependerá del convenio que se use).
- Ley de Snell de la refracción: en general, el cociente entre los senos de los ángulos de incidencia (primer medio) y refracción (segundo

medio) viene dado por el cociente de las correspondientes velocidades:  $\sin \theta_i / \sin \theta_r = v_1 / v_2$ . Teniendo en cuenta la relación entre la velocidad y el índice de refracción, la forma habitual de la ley de Snell en óptica es  $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$ .

La intensidad de las ondas reflejada y transmitida depende de la naturaleza de la separación de los medios y del ángulo de incidencia: por ejemplo, en la interfaz aire-vidrio, la luz reflejada apenas supone un 4 % de la total para incidencia normal ( $\theta_i = \theta_r = 0$ ), mientras que va aumentando hasta el 100 % para incidencia rasante ( $\theta \approx 90^\circ$ ).

### 12.3.2. Reflexión interna total

Cuando  $n_1 > n_2$  (la luz pasa de un medio de mayor índice a otro de menor) el rayo refractado se aleja de la normal. Existe un ángulo de incidencia  $\theta_i^c$ , conocido como **ángulo de incidencia límite o crítico**, para el que  $\theta_r = 90^\circ$ . Para ángulos de incidencia mayores que  $\theta_i^c$  no hay rayo refractado y toda la energía de la onda incidente se queda en el primer medio. Es lo que se conoce como **reflexión interna total**.

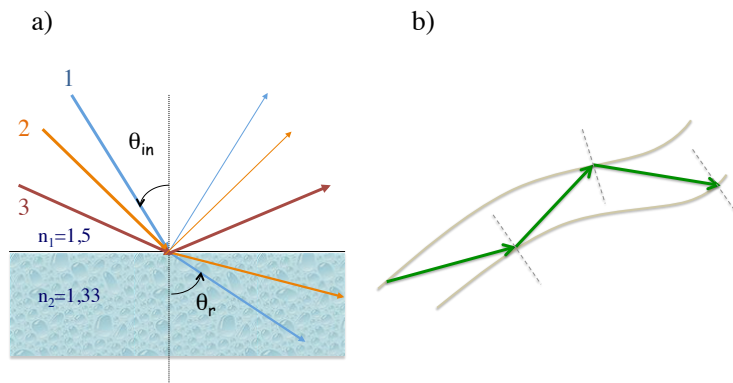


Figura 12.5: a) Se muestran los rayos reflejado y refractado para distintos ángulos de incidencia, así como la situación de reflexión total para incidencia con un ángulo mayor que el crítico (rayo 3). b) Esquema de propagación en una fibra óptica. La luz experimenta sucesivas reflexiones totales en el interior de la fibra.

Para calcular el valor ángulo crítico basta con aplicar la ley de la refracción, siendo  $90^\circ$  el ángulo de refracción:

$$n_1 \sin \theta_i^c = n_2 \sin \theta_r \equiv n_2 \Rightarrow \sin \theta_i^c = \frac{n_2}{n_1}$$

Un ejemplo importante de aplicación de la reflexión total es la propagación de la luz en una fibra óptica: la luz queda “atrapada” en el interior



del vidrio, de índice de refracción mayor que el del recubrimiento de la fibra. Con la reflexión total interna se evitan pérdidas de intensidad en la señal transmitida.

## 12.4. Índice de refracción y aspectos ondulatorios. *Dispersión.*

Hemos visto que el índice de refracción  $n$  de un medio - el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y en el medio- depende de la naturaleza de éste. ¿Qué le ocurre a la luz cuando pasa de un medio a otro? Sabemos que su dirección de propagación cambia pero, ¿cambia su frecuencia? La respuesta es que no; por tanto, el cambio de velocidad de la luz al pasar a otro medio tiene que traducirse en que  $\lambda$  se modifica al pasar a un medio de distinto índice de refracción:

$$v = \frac{c}{n} \Rightarrow \lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el vacío y  $\lambda_n$  sería la de la misma onda en el medio considerado. Vemos que la longitud de onda disminuye en un factor igual al índice de refracción del medio. Una cuestión que surge es: ¿el valor de  $n$  de un material es el mismo para cualquier longitud de onda? La respuesta vuelve a ser negativa.

En este contexto, vamos a introducir el concepto de **dispersión**, relacionándolo en primera instancia con la idea de separar algo que estaba junto (en este caso, las distintas componentes, de distinta longitud de onda, de la luz blanca).

El fenómeno de la dispersión aparece siempre que la velocidad de propagación de las ondas en un medio depende de la longitud de onda. Hasta ahora las velocidades que hemos analizado eran dependientes sólo del medio, y no de la forma o de la frecuencia de la onda. Para las ondas armónicas estudiadas (pensad por ejemplo en las transversales en una cuerda,  $v = (T/\mu)^{1/2}$ , o en el sonido,  $v = (Y/\rho)^{1/2}$ ) la velocidad es constante en todo el rango de frecuencias. Como se cumple que  $v = \lambda\nu = \text{constante}$ , esto implicaba que si  $\lambda$  disminuía en un factor 2,  $\nu$  aumentaba en ese mismo factor de forma que su producto permaneciese constante.

Sin embargo, en ocasiones esto deja de cumplirse. Para comenzar, pensemos por ejemplo en ondas elásticas de  $\lambda$  decreciente (ondas de longitud de onda cada vez más corta). Si la longitud de onda  $\lambda$  se hace muy pequeña, , tendiendo a cero, la frecuencia  $\nu$  no puede crecer en la misma

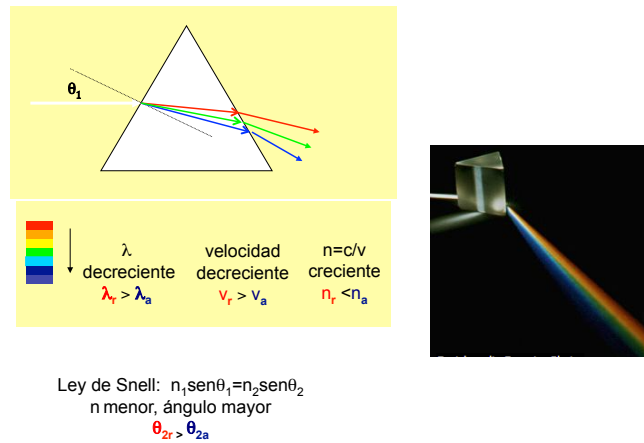


Figura 12.6: Dispersión de la luz en un prisma.

medida, ya que existen limitaciones físicas a la frecuencia máxima, que no puede tender a infinito. Se llega así a una situación en que el producto  $\lambda \nu \neq \text{constante}$  y  $\underline{\nu}$  disminuye cuando la longitud de onda disminuye.

Algo así ocurre con la luz. En determinados medios (en general todos excepto el vacío y el aire) la velocidad de propagación de la luz depende de la frecuencia, siendo mayor cuanto menor sea  $\nu$ .

Centrémonos por ejemplo en el espectro visible, en el rango entre la radiación azul-violeta de  $\lambda=400$  nm y la radiación roja de  $\lambda=700$  nm. Cuando un haz de luz blanca incide en un prisma de vidrio, cada longitud de onda “ve” un índice diferente, refractándose con un ángulo diferente:

$$\lambda_{\text{violeta}} < \lambda_{\text{rojo}} \Rightarrow v_{\text{violeta}} < v_{\text{rojo}} \Rightarrow n_{\text{violeta}} > n_{\text{rojo}}$$

$$n_{\text{violeta}} > n_{\text{rojo}} \Rightarrow (\text{Ley de Snell}) \theta_{\text{refrac.violeta}} < \theta_{\text{refrac.rojo}}$$

Como consecuencia de esto, la desviación que experimentan los rayos es distinta y se produce la descomposición de la luz en sus componentes espectrales. (figura 12.6), que se observa fácilmente a la salida del prisma.

## 12.5. Polarización de la luz.

La polarización es una característica de las ondas transversales -las ondas longitudinales no pueden polarizarse. Consideremos una cuerda que en el equilibrio está dispuesta a lo largo del eje X, y una perturbación que se propaga a lo largo de la cuerda. En general, los desplazamientos transversales de la cuerda tendrán lugar en el plano YZ. Ahora bien, cuando una onda tiene solo desplazamientos según Y (estando la cuerda por tanto en el plano XY) o según Z (cuerda en el plano XZ), se dice que está **linealmente polarizada** en la dirección Y o en la Z, respectivamente. Cuando los desplazamientos de la cuerda tienen lugar en cualquier dirección en el plano YZ, entonces se dice que la onda no está polarizada.

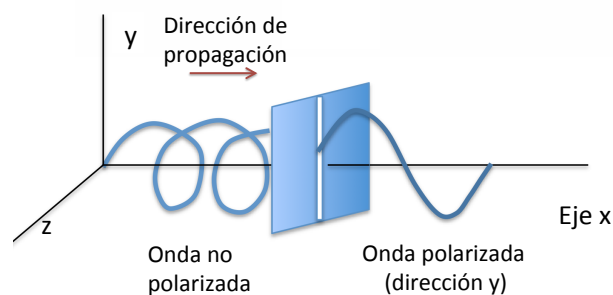


Figura 12.7: Polarización de una onda transversal en una cuerda.

Dependiendo de la naturaleza de las ondas, pueden fabricarse dispositivos que seleccionan una determinada dirección de la perturbación: son los **polarizadores**, que permiten el paso de la perturbación en una dirección exclusivamente.

Vamos a centrarnos en la polarización de las ondas electromagnéticas. La luz natural, así como la emitida por fuentes de luz convencionales (lámparas, fluorescentes,...) es despolarizada. La radiación generada por los láseres o, en otro rango de frecuencia, las ondas electromagnéticas utilizadas para la transmisión de señales de radio, televisión, telefonía, etc. suelen ser polarizadas.

Las características de los polarizadores dependen de la longitud de onda de la radiación que se desee polarizar. Por ejemplo, para microondas

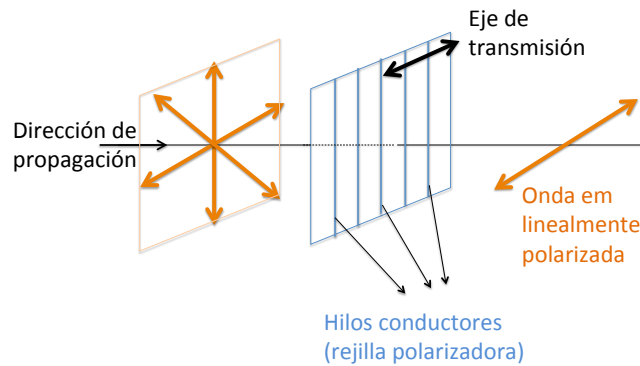


Figura 12.8: Polarizador para radiación de microondas: absorbe las componentes verticales de la radiación dejando pasar radiación que oscila perpendicularmente a la dirección de los hilos conductores.

( $\lambda \approx cm$ ), puede fabricarse un polarizador con hilos conductores (como si fuera una rejilla, ver Fig. 12.8). Los electrones en el metal pueden moverse libremente a lo largo de los hilos, con lo que la radiación a lo largo de esa dirección es absorbida y no atraviesa prácticamente la rejilla. En consecuencia, tras ella la polarización de las microondas sería fundamentalmente horizontal.

Con la luz puede lograrse un efecto análogo utilizando láminas polarizadoras en las que una de las direcciones del campo eléctrico de la luz es mucho más absorbida que las otras. Esa absorción selectiva es lo que se conoce como **dicroísmo**: absorción muy diferente para dos direcciones de polarización perpendiculares. Así, una lámina polaroide transmite una gran parte de la intensidad que le llega polarizada paralelamente a su eje, conocido como **eje de transmisión**, y prácticamente nada en la dirección perpendicular a él.

Calculemos en dos casos distintos la intensidad de la luz transmitida por un polarizador (figura 12.9):

- Luz blanca: Si no hay dirección preferente para la oscilación del campo eléctrico, puede entenderse como una suma de dos componentes perpendiculares, iguales en promedio. Al atravesar un polarizador, la luz saldrá polarizada en la dirección del eje de transmisión, y pasará la mitad de intensidad al otro lado:  $I = I_0/2$ .
- Luz polarizada linealmente: La luz que llega verticalmente pola-

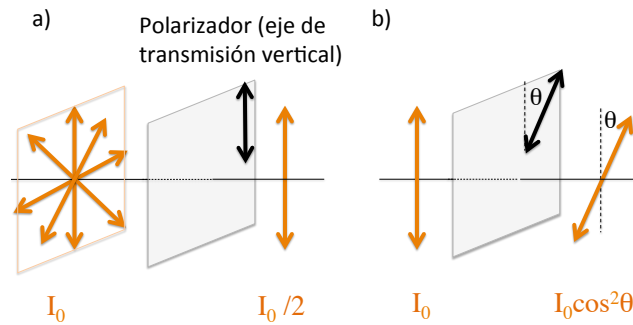


Figura 12.9: Efecto de un polarizador sobre a) Luz sin polarizar. b) Luz polarizada linealmente en una dirección que forma un ángulo  $\theta$  con el eje de transmisión.

rizada, se ve parcialmente impedida al atravesar otro polarizador girado un ángulo  $\theta$  respecto al primero. El campo eléctrico puede descomponerse en la dirección del nuevo polarizador y la dirección perpendicular a ella,  $\vec{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \cos \theta, \mathcal{E} \sin \theta)$ .

Sólo pasará la componente en la dirección del eje de transmisión del segundo polarizador ( $\mathcal{E} \cos \theta$ ), y por tanto,  $I = I_0 \cos^2 \theta$ , expresión conocida como **Ley de Malus**.

**Polarización por reflexión.** La luz puede polarizarse, además de por absorción, por reflexión: después de reflejarse en una superficie, la luz está fundamentalmente polarizada en la dirección perpendicular al plano de incidencia (el formado por los rayos incidente, reflejado/refractado y por la normal). De hecho, existe una situación para la que un haz reflejado está completamente polarizado en la dirección perpendicular al plano de incidencia. A principios del siglo XIX, Brewster observó que cuando las direcciones de los haces transmitido y reflejado formaban un ángulo de  $90^\circ$  (como se ve en la figura 12.10), el haz de luz reflejado resultaba polarizado linealmente.

El valor del ángulo de Brewster  $\theta_B$  se deduce de forma inmediata a partir de la ley de Snell. Aplicándola al haz que incide desde aire sobre el medio de índice  $n$ , (figura 12.10) se tiene:

$$\sin \theta_B = n \sin \theta_r \quad (12.1)$$

Dado que los rayos reflejado y refractado forman entre sí  $90^\circ$ ,  $\theta_r$  y  $\theta_r'$  son complementarios, por lo que  $\sin \theta_r = \cos \theta_r'$ . Como los ángulos de incidencia y reflexión son iguales:

$$\sin \theta_B = n \cos \theta_B \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_B = n \quad (12.2)$$

De acuerdo con esto, la polarización por reflexión es máxima cuando la tangente del ángulo de incidencia (que será el ángulo de Brewster) es igual al índice de refracción del medio. La polarización es nula para la incidencia normal.

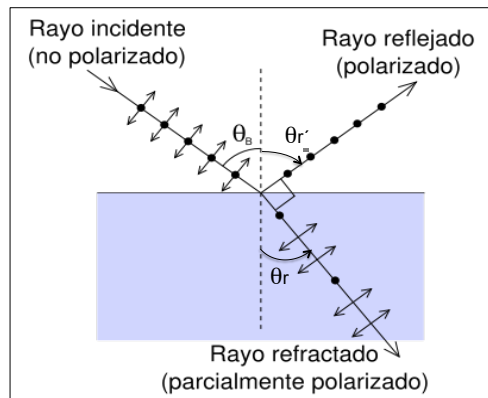


Figura 12.10: Polarización por reflexión. Se muestra un rayo (inicialmente no polarizado) incidiendo con un ángulo de incidencia igual al ángulo de Brewster; el reflejado está linealmente polarizado en la dirección perpendicular al plan de incidencia.

Como consecuencia de lo anterior, vemos que la luz se refleja con mayor intensidad si está polarizada perpendicularmente al plano de incidencia, mientras que si la polarización del haz incidente es paralela al plano de incidencia, no se produce reflexión y toda la luz se transmite al segundo medio. Este fenómeno se puede observar claramente en la luz que se refleja en la superficie del mar o de un lago grande. En la carretera ocurre algo parecido; también la luz que se refleja en su superficie está preferentemente polarizada horizontalmente, por lo que las gafas de sol polarizadas, tan útiles para un conductor, deben tener su dirección de absorción en esa dirección (y por tanto su eje de transmisión vertical).

## 12.6. Interferencia de ondas luminosas.

Como vimos en el capítulo 10, cuando dos o más ondas se solapan en el espacio, la onda total en cualquier punto y en cualquier instante está gobernada por el principio de superposición, que presentamos en la sección 10. Este principio, que también se aplica a las ondas electromagnéticas, establece lo siguiente: cuando dos o más ondas se solapan, el desplazamiento resultante en cualquier punto y en cualquier instante se encuentra sumando los desplazamientos instantáneos que producirían en el punto las ondas individuales si cada una se presentara sola.

El término “desplazamiento” se usa en un sentido general. Cuando se trata de ondas en una cuerda, nos referimos al desplazamiento real de un punto de la cuerda por arriba o por debajo de su posición de equilibrio. En el caso de las ondas electromagnéticas, por lo general, hacemos referencia a una componente específica del campo eléctrico o magnético.

Vamos a estudiar un caso particular relevante, el ejemplo conocido como **experimento (interferencia) de doble rendija de Young**. Lo particular de este ejemplo es la geometría del problema (ver Fig. 12.11). Se coloca frente a un foco de ondas luminosas monocromáticas (es decir, de una única longitud de onda bien definida,  $\lambda$ ) una lámina con dos rendijas muy estrechas y alargadas, separadas por una distancia  $d$ .

Se consiguen así dos frentes de onda cilíndricos, procedentes de una misma fuente tras separar el frente de ondas en dos. Esto garantiza la coherencia de las dos ondas, cuya interferencia observaremos en una pantalla situada a una distancia  $D \gg d$  de las rendijas.

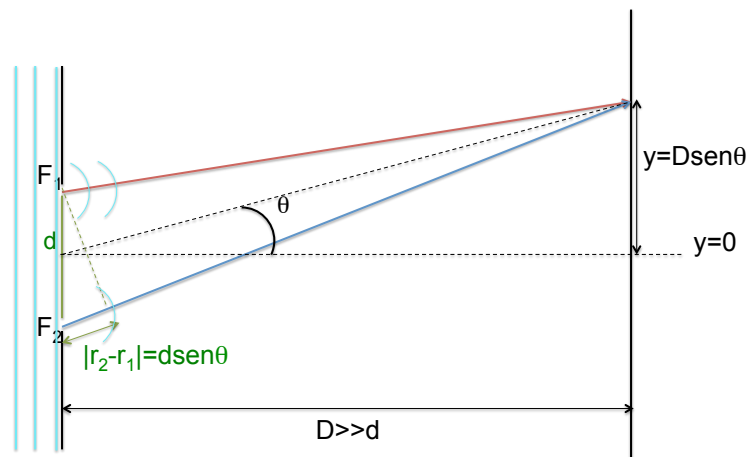


Figura 12.11: Interferencia de doble rendija de Young.

En la pantalla, la dos ondas interferirán y en función de  $k|r_2 - r_1|$  tendremos una interferencia constructiva (luz) o una destructiva (oscuridad). La posición en la pantalla podrá definirse por la coordenada  $y$  o por el ángulo  $\theta$ .

Por estar la pantalla muy alejada, los rayos que llegan a un punto concreto de la pantalla son casi paralelos (ver Fig. 12.11), de forma que la diferencia de camino entre las dos ondas será:

$$|r_2 - r_1| = d \sin \theta$$

Condición de máximo de interferencia:

$$|r_2 - r_1| = d \sin \theta = n \lambda \Rightarrow \sin \theta = n \lambda / d \Rightarrow y_{\text{maximo}} = n \lambda D / d.$$

Condición de mínimo de interferencia:

$$|r_2 - r_1| = d \sin \theta = (2n - 1) \lambda / 2 \Rightarrow \sin \theta = (2n - 1) \lambda / 2d \Rightarrow y_{\text{minimo}} = (2n - 1) \lambda D / 2d.$$

Por lo que respecta a la intensidad, será nula en los mínimos e igual a  $4I_0$  en los máximos (ver Fig. 12.12).

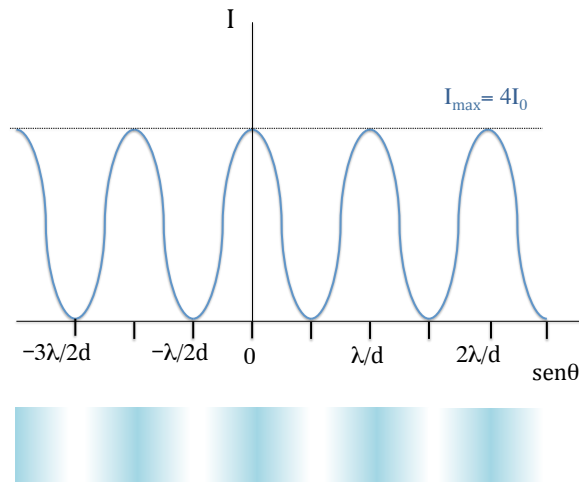


Figura 12.12: En la pantalla se observan franjas de luz (zona más coloreada en el dibujo inferior) en las posiciones de los máximos de interferencia.



Parte VI

ADDENDA



## GLOSARIO

Para facilitar la lectura de este libro, se facilita a continuación la lista de las abreviaturas y símbolos más usados en el texto.

### • ALFABETO GRIEGO

Mayúsculas	Minúsculas	Nombre	Letra latina
A	$\alpha$	Alfa	A
B	$\beta$	Beta	B
$\Gamma$	$\gamma$	Gamma	G (ga, gue,...)
$\Delta$	$\delta$	Delta	D
E	$\epsilon, \varepsilon$	Épsilon	E (breve)
Z	$\zeta$	Dseta	DS
H	$\eta$	Eta	E (larga)
$\Theta$	$\theta$	Zeta	Z (za, ce,...)
I	$\iota$	Iota	I
K	$\kappa$	Kappa	K (ka, que,...)
$\Lambda$	$\lambda$	Lambda	L
M	$\mu$	Mu	M
N	$\nu$	Nu	N
$\Xi$	$\xi$	Xi	X (ks)
O	$\omicron$	Ómicron	O (breve)
$\Pi$	$\pi$	Pi	P
P	$\rho$	Rho	R
$\Sigma$	$\sigma$	Sigma	S
T	$\tau$	Tau	T
Y	$\upsilon$	Ípsilon	U francesa
$\Phi$	$\phi, \varphi$	Fi	F
X	$\chi$	Ji	J
$\Psi$	$\psi$	Psi	PS
$\Omega$	$\omega$	Omega	O (larga)

Cuadro 12.1: Alfabeto griego.

### • A

$\vec{a}$ . Vector aceleración.

$\vec{A}$ . Aceleración del Centro de Masas.

A. Amperio, unidad de corriente eléctrica del Sistema Internacional.

A. Amplitud de oscilación.

• **B**

$\vec{B}$ . Vector campo magnético.

• **C**

$c$ . Velocidad de la luz en el vacío.

C. Capacidad.

CM. Centro de Masas.

CG. Centro de Gravedad.

• **D**

$\delta$ . Desfase que da la posición inicial en una oscilación.

$\Delta x$ . Incremento de la variable  $x$

• **E**

$\vec{\mathcal{E}}$ . Vector campo eléctrico.

E. Energía mecánica.

• **F**

$\vec{F}$ . Vector fuerza.

$\vec{F}_v$ . Vector fuerza de rozamiento viscoso.

$\vec{F}_a$ . Fuerza de amortiguamiento.

Fig(s). Figura(s)

• **G**

$\vec{g}$ . Aceleración de la gravedad.

G. Constante de gravitación universal.

• **H**

$\vec{H}$ . Vector campo magnético.

Hz. Unidad de frecuencia (ciclos / segundo).

• **I**

$\hat{i}$ . Vector unitario del eje X en un sistema de coordenadas cartesianas.

I. Momento de inercia.

$\vec{I}$ . Impulso lineal.

• **J**

$\hat{j}$ . Vector unitario del eje Y en un sistema de coordenadas cartesianas.

J. Julio, unidad de energía del Sistema Internacional.

$\vec{J}$ . Impulso angular.

• **K**

$\hat{k}$ . Vector unitario del eje Z en un sistema de coordenadas cartesianas.

$k$ . Constante elástica del muelle.

kg. Kilogramo, unidad de masa del Sistema Internacional.

• **L**

$\vec{l}$ . Momento angular.

$\vec{L}$ . Momento angular.

• **M**

$\mu_0$ . Permeabilidad del vacío.

$\mu$ . Coeficiente de rozamiento.

$\mu_d$ . Coeficiente de rozamiento dinámico.

$\mu_e$ . Coeficiente de rozamiento estático.

$\mu_r$ . Coeficiente de rozamiento de rodadura.

m. Metro, unidad de longitud del Sistema Internacional.

$m$ . Masa.

$m_i$ . Masa inercial.

$m_g$ . Masa gravitatoria.

MAS. Movimiento armónico simple.

• **N**

$\nu$ . Frecuencia de oscilación.

$N$ . Suele utilizarse como valor final de un índice en sumatorios, por ejemplo al calcular la media indica el número de medidas.

$\vec{N}$ . Normal, reacción del plano en que se apoya un cuerpo.

• **O**

$\omega$ . Frecuencia angular.

$\Omega$ . Ohmio, unidad de resistencia.

• **P**

Pág(s). Página(s).

$\vec{p}$ . Momento lineal.

$\vec{P}$ . Momento lineal.

$\vec{P}$ . Peso.

$\mathcal{P}$ . Potencia.

• **Q**

$q$ . Carga eléctrica.

• **R**

$\hat{\rho}$ . Vector unitario en un sistema de coordenadas polares.

$\vec{r}$ . Vector posición.

$R$ . Radio de circunferencia.

$\vec{\mathcal{R}}$ . Fuerza de ligadura o de reacción.

$\vec{R}$ . Vector posición del centro de masas.

• **S**

$\sigma_{n-1}$ . Desviación típica.

$\sigma_{\bar{x}}$ . Error cuadrático medio.

s. Segundo, unidad de tiempo del Sistema Internacional.

Sol. Solución.

• **T**

$t$ . Variable tiempo.

$T$ . Temperatura o energía cinética.

$\vec{T}$ . Tensión.

$\tau$ . Momento de una fuerza.

$\mathcal{T}$ . Período.

- U

$\hat{\mathbf{u}}_N$ . Vector unitario normal (coordenadas intrínsecas).

$\hat{\mathbf{u}}_T$ . Vector unitario tangencial (coordenadas intrínsecas).

$\mathcal{U}$ . Energía potencial.

- V

$\vec{v}$ . Vector velocidad.

$\vec{V}$ . Velocidad del Centro de Masas.

$v_m^{\vec{}}$ . Vector velocidad media.

$\eta$ . Viscosidad.

- W

$\vec{\omega}$ . Velocidad angular.

$\omega_o$ . Frecuencia angular de oscilación.

$W$ . Trabajo.

- X

$\bar{x}$ . Media aritmética de la variable  $x$ .

- Z

$\hat{\theta}$ . Vector unitario en un sistema de coordenadas polares.