Giros y cuaterniones

Alberto Elduque

Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones • Universidad de Zaragoza

UNED – Calatayud

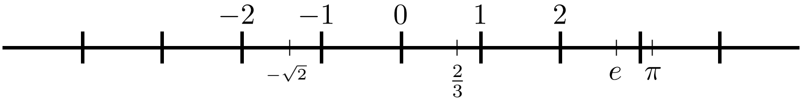
15 de enero de 2025

Índice

Números reales

$$\mathbb{R} = \{\text{números reales}\}$$

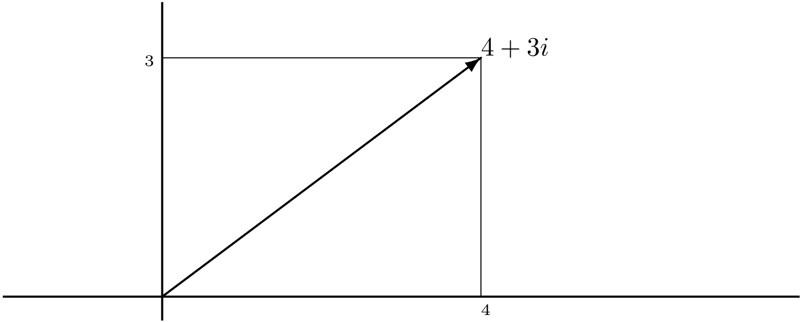
Usamos los números reales para medir.



¡Pero no podemos resolver ecuaciones tan sencillas como $X^2 + 1 = 0$!

Números complejos

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \, (\simeq \mathbb{R}^2)$$



$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Números complejos: propiedades

Ejercicio

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

($|.|$ denota la norma usual.)

Ejercicio

Giro de ángulo α en $\mathbb{R}^2 \leftrightarrow$ multiplicación por $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$.

$$SO(2) \simeq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \simeq S^1$$

Giros y cuaterniones

¿Un álgebra de dimensión tres?

Hamilton intentó encontrar una multiplicación, análoga a la multiplicación de números complejos, pero en dimensión 3, que respetara la "ley de las distancias": $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$:

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = ???$$

(suponiendo $i^2 = -1 = j^2$)

Problema: $ij, \quad ji$?

Después de años de esfuerzos, encontró la solución el 16 de octubre de 1843.

A spark flashed forth

Carta de Sir W. R. Hamilton a su hijo Rev. Archibald H. Hamilton, fechada el 5 de agosto de 1865:

MY DEAR ARCHIBALD -

(1) I had been wishing for an occasion of corresponding a little with you on QUATERNIONS: and such now presents itself, by your mentioning in your note of yesterday, received this morning, that you "have been reflecting on several points connected with them" (the quaternions), "particularly on the Multiplication of Vectors."

(2) No more important, or indeed fundamental question, in the whole Theory of Quaternions, can be proposed than that which thus inquires What is such MULTIPLICATION? What are its Rules, its Objects, its Results? What Analogies exist between it and other Operations, which have received the same general Name? And finally, what is (if any) its Utility?

A spark flashed forth

(3) If I may be allowed to speak of myself in connexion with the subject, I might do so in a way which would bring you in, by referring to an ante-quaternionic time, when you were a mere child, but had caught from me the conception of a Vector, as represented by a Triplet: and indeed I happen to be able to put the finger of memory upon the year and month - October, 1843 - when having recently returned from visits to Cork and Parsonstown, connected with a meeting of the British Association, the desire to discover the laws of the multiplication referred to regained with me a certain strength and earnestness, which had for years been dormant, but was then on the point of being gratified, and was occasionally talked of with you. Every morning in the early part of the above-cited month, on my coming down to breakfast, your (then) little brother William Edwin, and yourself, used to ask me, "Well, Papa, can you multiply triplets"? Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: "No, I can only add and subtract them."

A spark flashed forth

(4) But on the 16th day of the same month - which happened to be a Monday, and a Council day of the Royal Irish Academy - I was walking in to attend and preside, and your mother was walking with me, along the Royal Canal, to which she had perhaps driven; and although she talked with me now and then, yet an under-current of thought was going on in my mind, which gave at last a result, whereof it is not too much to say that I felt at once the importance. An electric circuit seemed to close; and a spark flashed forth, the herald (as I foresaw, immediately) of many long years to come of definitely directed thought and work, by myself if spared, and at all events on the part of others, if I should even be allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery.

A spark flashed forth

Nor could I resist the impulse -unphilosophical as it may have been- to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge[1], as we passed it, the fundamental formula with the symbols, i, j, k; namely,

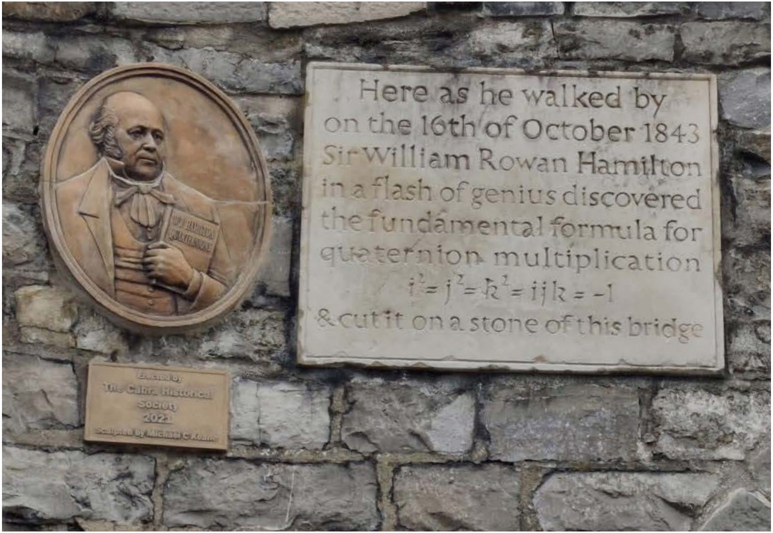
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

which contains the Solution of the Problem, but of course, as an inscription, has long since mouldered away. A more durable notice remains, however, on the Council Books of the Academy for that day (October 16th, 1843), which records the fact, that I then asked for and obtained leave to read a Paper on Quaternions, at the First General Meeting of the session: which reading took place accordingly, on Monday the 13th of the November following.
With this quaternion of paragraphs I close this letter I.; but I hope to follow it up very shortly with another.
Your affectionate father, WILLIAM ROWAN HAMILTON.

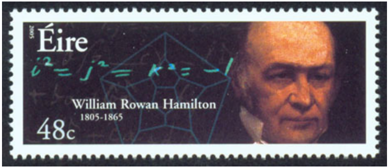
[1] El nombre actual del puente es Broom, no Brougham

Puente de Broom

Puente de Broom



$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k,$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$



Hamilton y sus cuaterniones

Algunas propiedades $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \; \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
- $\mathbb{H}$ es un álgebra asociativa de división (pero no es conmutativa).
  Se sigue que $S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ es un grupo (de Lie).
  (Esto implica la paralelizabilidad de S^3.)
- $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \simeq \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$, and $\forall u, v \in \mathbb{H}_0$:

$$uv = -u \cdot v + u \times v$$

  (donde $u \cdot v$ y $u \times v$ denotan los productos escalar y vectorial usuales).

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

- $\forall q = a1 + u \in \mathbb{H}$, $q^2 = (a^2 - u \cdot u) + 2au$, luego
$$q^2 - (2a)q + |q|^2 = 0 \qquad (\mathbb{H} \text{ es cuadrática.})$$

- La aplicación $q = a + u \mapsto \bar{q} = a - u$ es una involución, con $q + \bar{q} = 2a$ y $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$.

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ es un espacio vectorial de dimensión dos sobre $\mathbb{C}$. La multiplicación está dada por:

$$(p_1 + p_2 j)(q_1 + q_2 j) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2) + (q_2 p_1 + p_2 \bar{q}_1) j$$

Giros en el espacio de dimensión tres

$$q \in \mathbb{H},\ |q| = 1 \ \Rightarrow \exists \alpha \in [0, \pi],\, u \in \mathbb{H}_0,\ |u| = 1$$
$$\text{tal que } q = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$$

Tomamos $v \in \mathbb{H}_0$ de norma 1 y ortogonal a u, de modo que $\{u, v, u \times v\}$ es una base ortonormal orientada positivamente de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{H}_0$.

Consideremos la aplicación lineal:

$$\varphi_q : \mathbb{H}_0 \longrightarrow \mathbb{H}_0,$$
$$x \mapsto qxq^{-1} = qx\bar{q}.$$

Matriz coordenada de φ_q

$$\varphi_q(u) = quq^{-1} = u \qquad \text{(porque } uq = qu\text{)},$$

$$\begin{aligned}\varphi_q(v) &= ((\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u)v((\cos\alpha)1 - (\operatorname{sen}\alpha)u)\\ &= ((\cos\alpha)v + (\operatorname{sen}\alpha)u \times v)((\cos\alpha)1 - (\operatorname{sen}\alpha)u)\\ &= (\cos^2\alpha)v + 2(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)u \times v - (\operatorname{sen}^2\alpha)(u \times v) \times u\\ &= (\cos 2\alpha)v + (\operatorname{sen} 2\alpha)u \times v,\end{aligned}$$

$$\varphi_q(u \times v) = \ldots = -(\operatorname{sen} 2\alpha)v + (\cos 2\alpha)u \times v.$$

Matriz coordenada de φ_q

Por tanto, la matriz coordenada de φ_q en la base $\{u, v, u \times v\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\operatorname{sen} 2\alpha \\ 0 & \operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

φ_q es un giro sobre el eje $\mathbb{R}^+ u$ de ángulo 2α

$SO(3)$

The map

$$\begin{aligned} \varphi : S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} &\longrightarrow SO(3), \\ q \quad &\mapsto \quad \varphi_q \end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \varphi = \{\pm 1\}$:

$$S^3/_{\{\pm 1\}} \simeq SO(3)$$

(S^3 es la cubierta universal de $SO(3)$)

Giros en el espacio de dimensión tres

Giros en $\mathbb{R}^3 \quad \longleftrightarrow \quad$ conjugación en $\mathbb{H}_0$ por cuaterniones de norma 1
"modulo ± 1"

¡Es muy fácil componer giros en el espacio de dimensión tres!

¡Basta multiplicar cuaterniones de norma 1! $(\varphi_p \circ \varphi_q = \varphi_{pq})$

Ahora se pueden deducir fácilmente las fórmulas de Olinde Rodrigues (1840) para la composición de giros.

Cuaterniones duales y $SE(3)$

$SE(3)$ denota el grupo de isometrías propias en el espacio euclídeo afín de dimensión tres.

Consideremos el álgebra de números duales

$$\mathbb{R}[\epsilon] = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}\epsilon, \qquad \epsilon^2 = 0,$$

y el álgebra de cuaterniones duales

$$D(\mathbb{H}) = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[\epsilon].$$

En $D(\mathbb{H})$ tenemos una norma análoga a $|q|^2$ in $\mathbb{H}$, dada por

$$\begin{aligned} N(q_1 + q_2\epsilon) &= (q_1 + q_2\epsilon)(\bar{q}_1 + \bar{q}_2\epsilon) \\ &= q_1\bar{q}_1 + (q_1\bar{q}_2 + q_2\bar{q}_1)\epsilon \\ &= |q_1|^2 + \left(q_1\bar{q}_2 + \overline{q_1\bar{q}_2}\right)\epsilon \in \mathbb{R}[\epsilon]. \end{aligned}$$

Esfera unidad en los cuaterniones duales

Remark

$q_1 + q_2\epsilon$ es invertible si y sólo si $N(q_1 + q_2\epsilon)$ es invertible (en $\mathbb{R}[\epsilon]$), si y sólo si $q_1 \neq 0$.

Denotemos por $\mathbb{S}$ la 'esfera unidad' in $D(\mathbb{H})$:

$$\begin{aligned}\mathbb{S} &= \{Q \in D[\mathbb{H}] : N(Q) = 1\} \\ &= \{q_1 + q_2\epsilon : |q_1| = 1,\ q_1\bar{q}_2 \in \mathbb{H}_0\}.\end{aligned}$$

Isometrías propias

Para cada $q_1 + q_2\epsilon \in \mathbb{S}$ y $p \in \mathbb{H}_0$:

$$
\begin{aligned}
(q_1 - q_2\epsilon)(1 + p\epsilon)(\bar{q}_1 + \bar{q}_2\epsilon)& \\
&= 1 + (q_1\bar{q}_2 - q_2\bar{q}_1 + q_1 p\bar{q}_1)\epsilon \\
&= 1 + \big(2q_1\bar{q}_2 + q_1 p\bar{q}_1\big)\epsilon.
\end{aligned}
$$

¡¡p es girado por q_1, y luego trasladado por $2q_1\bar{q}_2$!!

Para cada $u \in \mathbb{H}_0$, $2q_1\bar{q}_2 = u$ si y sólo si $\bar{q}_2 = \frac{1}{2}\bar{q}_1 u$, si y sólo si $q_2 = -\frac{1}{2}uq_1$, luego variando q_1 y q_2, podemos conseguir cualquier rotación y giro.

Cuaterniones duales y $SE(3)$

Identificando el espacio euclídeo afín $\mathbb{R}^3$ con $1 + \mathbb{H}_0\epsilon$, la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{S} &\longrightarrow SE(3) \\ q_1 + q_2\epsilon &\mapsto \Big(1 + p\epsilon \mapsto (q_1 - q_2\epsilon)(1 + p\epsilon)(\bar{q}_1 + \bar{q}_2\epsilon)\Big) \end{aligned}$$

resulta ser un homomorfismo suprayectivo de grupos.

$$\begin{aligned} &\ker\Phi \\ &= \{q_1 + q_2\epsilon \in \mathbb{S} : (q_1 - q_2\epsilon)(1 + p\epsilon) = (1 + p\epsilon)(q_1 + q_2\epsilon)\ \forall p \in \mathbb{H}_0\} \\ &= \{q_1 + q_2\epsilon \in \mathbb{S} : q_1 p - q_2 = p q_1 + q_2\ \forall p \in \mathbb{H}_0\} \\ &= \{q_1 + q_2\epsilon \in \mathbb{S} : q_2 = 0,\ q_1 \in \mathbb{R}1\} = \{\pm 1\}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{S}/\{\pm 1\} \simeq SE(3).$$

Giros y cuaterniones

Giros en $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ con $|p| = 1$, la multiplicación a izquierda (resp. a derecha) L_p (resp. R_p) por p es una isometría, debido a la multiplicatividad de la norma.

- Para $p = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$, ($\alpha \in [0, \pi]$, $u \in \mathbb{H}_0$, $|u| = 1$), tenemos $p^2 - 2(\cos\alpha)p + 1 = 0$, luego el polinomio mínimo de la multiplicación por p es o bien $X \pm 1$ para $p = \mp 1$, o bien el polinomio irreducible $X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1$.

- Por tanto, el polinomio característico de la multiplicación por p es siempre

$$\left(X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1\right)^2$$

y, en particular, el determinante de la multiplicación por p es 1.

Multiplicación por cuaterniones de norma 1 nos da giros en $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$.

Giros en $\mathbb{R}^4$

- Si ψ es un giro en $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$, $a = \psi(1)$ es un cuaternión de norma 1, y

$$L_{\bar{a}} \circ \psi(1) = \bar{a}a = |a|^2 = 1,$$

  luego $L_{\bar{a}} \circ \psi$ es realmente un giro en $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}_0$.

- Por tanto, existe un cuaternión de norma 1 $q \in \mathbb{H}$ tal que

$$\bar{a}\psi(x) = qxq^{-1}$$

  para cada $x \in \mathbb{H}$. Esto es:

$$\psi(x) = (aq)xq^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{H}.$$

$SO(4)$

La aplicación

$$\begin{aligned}\Psi : S^3 \times S^3 &\longrightarrow SO(4), \\ (p,q) &\mapsto \psi_{p,q} \ (x \mapsto pxq^{-1})\end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \Psi = \{\pm(1,1)\}$.

$$S^3 \times S^3 /_{\{\pm(1,1)\}} \simeq SO(4)$$

(De aquí obtenemos $\quad SO(3) \times SO(3) \simeq PSO(4)$)

Giros en $\mathbb{R}^4$

¡Es muy fácil componer giros en el espacio de dimensión cuatro!

¡Basta multiplicar parejas de cuaterniones de norma 1!
$(\psi_{p_1,q_1} \circ \psi_{p_2,q_2} = \psi_{p_1 p_2, q_1 q_2})$

Ejercicio

¿Qué clase de giro es $\psi_{p,q}$ para $p + \bar{p} = 2\cos\alpha$ y $q + \bar{q} = 2\cos\beta$?

Solución: Un "doble giro" con ángulos $\alpha + \beta$ and $\alpha - \beta$.

Giros y cuaterniones

Octoniones (1843-1845)

There is still something in the system which gravels me. I have not yet any clear views as to the extent to which we are at liberty arbitrarily to create imaginaries, and to endow them with supernatural properties.

If with your alchemy you can make three pounds of gold, why should you stop there?

(Carta de John T. Graves a Hamilton, fechada el 26 de octubre de 1843)

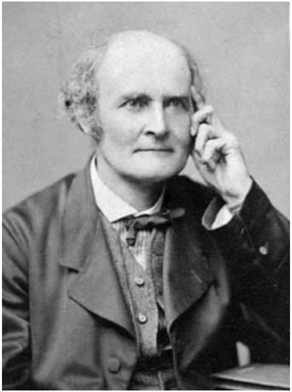
Octoniones (1843-1845)

El álgebra de cuaterniones se obtiene duplicando el cuerpo de los números complejos:

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j.$$

Duplicando de nuevo se obtienen los octoniones (Graves – Cayley):

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l.$$



Arthur Cayley

Octoniones

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$$

con multiplicación

$$(p_1 + p_2 l)(q_1 + q_2 l) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2) + (q_2 p_1 + p_2 \bar{q}_1) l$$

y norma:

$$|p_1 + p_2 l|^2 = |p_1|^2 + |p_2|^2$$

¡Éstas son las mismas fórmulas que nos permiten pasar de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$!

Algunas propiedades algebraicas

- $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{O}$.
- $\mathbb{O}$ es un álgebra de división, no es ni conmutativa ¡ni asociativa! Pero es *alternativa*: cada dos elementos generan una subálgebra asociativa.
  Teorema (Zorn 1933): Las únicas álgebras alternativas de división reales de dimensión finita son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ and $\mathbb{O}$.

  Las únicas asociativas son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ and $\mathbb{H}$ (Frobenius 1877).
- $S^7 \simeq \{x \in \mathbb{O} : |x| = 1\}$ no es un grupo (falla la asociatividad) pero casi: es un *lazo de Moufang*.
- $\mathbb{O}_0 = \mathbb{R}\langle i, j, k, l, il, jl, kl\rangle$. $\forall u, v \in \mathbb{O}_0$:
  $$uv = -u \cdot v + u \times v.$$
  (¡Producto vectorial en $\mathbb{R}^7$!: $(u \times v) \times v = (u \cdot v)v - (v \cdot v)u$.)
- La "alquimia" ya no funciona al duplicar los octoniones. La multiplicatividad de la norma es algo específico de las dimensiones 1, 2, 4 y 8.

A modo de resumen

- Los números complejos se construyen duplicando los números reales, y nos sirven para hacer geometría en el espacio de dimensión dos.
- Hamilton intentó, sin éxito, construir un álgebra de dimensión tres con propiedades análogas, hasta que, en un momento de inspiración, se dio cuenta de que tenía que pasar a dimensión cuatro, duplicando los números complejos. Descubrió así los cuaterniones.
- Los cuaterniones nos permiten hacer geometría en dimensión tres ¡y cuatro!
- Se pueden duplicar los cuaterniones, obteniendo los octoniones, pero no más.

Despedida

The saying that God is the mathematician, so that, even with meager experimental support, a mathematically beautiful theory will ultimately have a greater chance of being correct, has been attributed to Dirac. Octonion algebra may surely be called a beautiful mathematical entity.

It is possible that this and other non-associative algebras (other than Lie algebras) may play some essential future role in the ultimate theory, yet to be discovered.

Susumu Okubo

¡Muchas gracias!