Números excepcionales

Alberto Elduque

Universidad de Zaragoza

Seminario Vidal Abascal

Números complejos

Números complejos

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \, (\simeq \mathbb{R}^2)$$

Números complejos

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \, (\simeq \mathbb{R}^2)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

(donde $|.|$ denota la norma euclídea)

Números complejos

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \, (\simeq \mathbb{R}^2)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

(donde $|.|$ denota la norma euclídea)

Giro de ángulo α en $\mathbb{R}^2 \leftrightarrow$ multiplicación por $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$.

Números complejos

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \, (\simeq \mathbb{R}^2)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

(donde $|.|$ denota la norma euclídea)

Giro de ángulo α en $\mathbb{R}^2$ $\leftrightarrow$ multiplicación por $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$.

$$SO(2) \simeq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \simeq S^1$$

¿Un álgebra 3-dimensional?

¿Un álgebra 3-dimensional?

Hamilton se planteó un producto análogo al de los números complejos en dimensión 3, que respetara la "ley de los módulos" $\bigl(|z_1z_2| = |z_1||z_2|\bigr)$:

¿Un álgebra 3-dimensional?

Hamilton se planteó un producto análogo al de los números complejos en dimensión 3, que respetara la "ley de los módulos" $(|z_1z_2| = |z_1||z_2|)$:

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = ???$$

$$\text{(asumiendo } i^2 = -1 = j^2\text{)}$$

¿Un álgebra 3-dimensional?

Hamilton se planteó un producto análogo al de los números complejos en dimensión 3, que respetara la "ley de los módulos" $(|z_1 z_2| = |z_1||z_2|)$:

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = ???$$

$$(\text{asumiendo } i^2 = -1 = j^2)$$

Problema: ¿ij, ji?

¿Un álgebra 3-dimensional?

Hamilton se planteó un producto análogo al de los números complejos en dimensión 3, que respetara la "ley de los módulos" $(|z_1 z_2| = |z_1||z_2|)$:

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = ???$$

$$(\text{asumiendo } i^2 = -1 = j^2)$$

Problema: ¿ij, ji?

Tras años de intentos, encontró la solución el 16 de octubre de 1843.

A spark flashed forth

Carta de Sir W. R. Hamilton a su hijo Rev. Archibald H. Hamilton, fechada el 5 de agosto de 1865:

MY DEAR ARCHIBALD -
(1) I had been wishing for an occasion of corresponding a little with you on QUATERNIONS: and such now presents itself, by your mentioning in your note of yesterday, received this morning, that you "have been reflecting on several points connected with them" (the quaternions), "particularly on the Multiplication of Vectors."

(2) No more important, or indeed fundamental question, in the whole Theory of Quaternions, can be proposed than that which thus inquires What is such MULTIPLICATION? What are its Rules, its Objects, its Results? What Analogies exist between it and other Operations, which have received the same general Name? And finally, what is (if any) its Utility?

A spark flashed forth

(3) If I may be allowed to speak of myself in connexion with the subject, I might do so in a way which would bring you in, by referring to an ante-quaternionic time, when you were a mere child, but had caught from me the conception of a Vector, as represented by a Triplet: and indeed I happen to be able to put the finger of memory upon the year and month - October, 1843 - when having recently returned from visits to Cork and Parsonstown, connected with a meeting of the British Association, the desire to discover the laws of the multiplication referred to regained with me a certain strength and earnestness, which had for years been dormant, but was then on the point of being gratified, and was occasionally talked of with you. Every morning in the early part of the above-cited month, on my coming down to breakfast, your (then) little brother William Edwin, and yourself, used to ask me, "Well, Papa, can you multiply triplets"? Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: "No, I can only add and subtract them."

A spark flashed forth

(4) But on the 16th day of the same month - which happened to be a Monday, and a Council day of the Royal Irish Academy - I was walking in to attend and preside, and your mother was walking with me, along the Royal Canal, to which she had perhaps driven; and although she talked with me now and then, yet an under-current of thought was going on in my mind, which gave at last a result, whereof it is not too much to say that I felt at once the importance. An electric circuit seemed to close; and a spark flashed forth, the herald (as I foresaw, immediately) of many long years to come of definitely directed thought and work, by myself if spared, and at all events on the part of others, if I should even be allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery.

A spark flashed forth

Nor could I resist the impulse -unphilosophical as it may have been- to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge[1], as we passed it, the fundamental formula with the symbols, i, j, k; namely,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

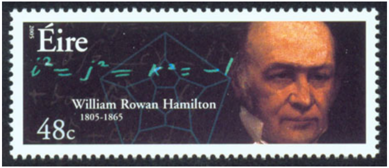
which contains the Solution of the Problem, but of course, as an inscription, has long since mouldered away. A more durable notice remains, however, on the Council Books of the Academy for that day (October 16th, 1843), which records the fact, that I then asked for and obtained leave to read a Paper on Quaternions, at the First General Meeting of the session: which reading took place accordingly, on Monday the 13th of the November following.
With this quaternion of paragraphs I close this letter I.; but I hope to follow it up very shortly with another.
Your affectionate father, WILLIAM ROWAN HAMILTON.

[1] El nombre correcto del puente es Broome

$\mathbb{H}$

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k,$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k,$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$



Hamilton y sus cuaterniones

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
- $\mathbb{H}$ es álgebra de división asociativa (pero no conmutativa).
  Por tanto $S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ es un grupo (de Lie).
  (Esto implica inmediatamente que S^3 es paralelizable.)

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
- $\mathbb{H}$ es álgebra de división asociativa (pero no conmutativa).
  Por tanto $S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ es un grupo (de Lie).
  (Esto implica inmediatamente que S^3 es paralelizable.)
- $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \simeq \mathbb{R}^3$, $\quad \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$, y $\forall u, v \in \mathbb{H}_0$:

  $$uv = -u \cdot v + u \times v$$

  (donde $u \cdot v$ y $u \times v$ denotan el producto escalar y vectorial usuales)

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
- $\mathbb{H}$ es álgebra de división asociativa (pero no conmutativa).
  Por tanto $S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ es un grupo (de Lie).
  (Esto implica inmediatamente que S^3 es paralelizable.)
- $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \simeq \mathbb{R}^3$, $\quad \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$, y $\forall u, v \in \mathbb{H}_0$:

$$uv = -u \cdot v + u \times v$$

  (donde $u \cdot v$ y $u \times v$ denotan el producto escalar y vectorial usuales)
- $\forall q = a1 + u \in \mathbb{H}$, $q^2 = (a^2 - u \cdot u) + 2au$, luego

$$\boxed{q^2 - (2a)q + |q|^2 = 0} \qquad (\mathbb{H} \text{ es cuadrática})$$

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
- $\mathbb{H}$ es álgebra de división asociativa (pero no conmutativa).
  Por tanto $S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ es un grupo (de Lie).
  (Esto implica inmediatamente que S^3 es paralelizable.)
- $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \simeq \mathbb{R}^3$, $\quad \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$, y $\forall u, v \in \mathbb{H}_0$:

  $$uv = -u \cdot v + u \times v$$

  (donde $u \cdot v$ y $u \times v$ denotan el producto escalar y vectorial usuales)
- $\forall q = a1 + u \in \mathbb{H}$, $q^2 = (a^2 - u \cdot u) + 2au$, luego

  $$\boxed{q^2 - (2a)q + |q|^2 = 0} \qquad (\mathbb{H} \text{ es cuadrática})$$

- La aplicación $q = a + u \mapsto \bar{q} = a - u$ es una involución, con
  $q + \bar{q} = 2a$ y $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$.

Giros en el espacio euclídeo

Giros en el espacio euclídeo

$$q \in \mathbb{H},\ |q| = 1 \ \Rightarrow \exists \alpha \in [0, \pi],\ u \in \mathbb{H}_0,\ |u| = 1$$
$$\text{tales que } q = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$$

Giros en el espacio euclídeo

$$q \in \mathbb{H},\ |q| = 1 \ \Rightarrow \exists \alpha \in [0,\pi],\ u \in \mathbb{H}_0,\ |u| = 1$$
$$\text{tales que } q = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$$

Tomamos $v \in \mathbb{H}_0$ de norma 1 y ortogonal a u, de modo que $\{u, v, u \times v\}$ es una base ortonormal orientada positivamente de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{H}_0$.

Giros en el espacio euclídeo

$$q \in \mathbb{H},\ |q| = 1 \ \Rightarrow \exists \alpha \in [0,\pi],\ u \in \mathbb{H}_0,\ |u| = 1$$
$$\text{tales que } q = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$$

Tomamos $v \in \mathbb{H}_0$ de norma 1 y ortogonal a u, de modo que $\{u, v, u \times v\}$ es una base ortonormal orientada positivamente de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{H}_0$.

Consideramos la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} \varphi_q : \mathbb{H}_0 &\longrightarrow \mathbb{H}_0, \\ x &\mapsto qxq^{-1} = qx\bar{q}. \end{aligned}$$

Matriz coordenada de φ_q

Matriz coordenada de φ_q

$$\varphi_q(u) = quq^{-1} = u \qquad \text{(porque } uq = qu\text{)},$$

Matriz coordenada de φ_q

$$\varphi_q(u) = quq^{-1} = u \qquad \text{(porque } uq = qu\text{)},$$

$$\begin{aligned}
\varphi_q(v) &= \big((\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u\big)v\big((\cos\alpha)1 - (\operatorname{sen}\alpha)u\big) \\
&= \big((\cos\alpha)v + (\operatorname{sen}\alpha)u \times v\big)\big((\cos\alpha)1 - (\operatorname{sen}\alpha)u\big) \\
&= (\cos^2\alpha)v + 2(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)u \times v - (\operatorname{sen}^2\alpha)(u \times v) \times u \\
&= (\cos 2\alpha)v + (\operatorname{sen} 2\alpha)u \times v,
\end{aligned}$$

Matriz coordenada de φ_q

$$\varphi_q(u) = quq^{-1} = u \qquad (\text{porque } uq = qu),$$

$$\begin{aligned}\varphi_q(v) &= \big((\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u\big)v((\cos\alpha)1 - (\operatorname{sen}\alpha)u)\\ &= \big((\cos\alpha)v + (\operatorname{sen}\alpha)u \times v\big)((\cos\alpha)1 - (\operatorname{sen}\alpha)u)\\ &= (\cos^2\alpha)v + 2(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)u \times v - (\operatorname{sen}^2\alpha)(u \times v) \times u\\ &= (\cos 2\alpha)v + (\operatorname{sen} 2\alpha)u \times v,\end{aligned}$$

$$\varphi_q(u \times v) = \ldots = -(\operatorname{sen} 2\alpha)v + (\cos 2\alpha)u \times v.$$

Matriz coordenada de φ_q

Matriz coordenada de φ_q

Luego la matriz coordenada de φ_q en la base $\{u, v, u \times v\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\operatorname{sen} 2\alpha \\ 0 & \operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix},$$

Matriz coordenada de φ_q

Luego la matriz coordenada de φ_q en la base $\{u, v, u \times v\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\operatorname{sen} 2\alpha \\ 0 & \operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix},$$

φ_q es el giro de eje $\mathbb{R}^+ u$ y ángulo 2α

$SO(3)$

$SO(3)$

La aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} &\longrightarrow SO(3), \\ q \quad &\mapsto \quad \varphi_q \end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \varphi = \{\pm 1\}$:

$SO(3)$

La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} & \longrightarrow & SO(3), \\ q & \mapsto & \varphi_q \end{array}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \varphi = \{\pm 1\}$:

$$S^3/_{\{\pm 1\}} \simeq SO(3)$$

$SO(3)$

La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} & \longrightarrow & SO(3), \\ q & \mapsto & \varphi_q \end{array}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \varphi = \{\pm 1\}$:

$$S^3/_{\{\pm 1\}} \simeq SO(3)$$

(S^3 es la cubierta universal de $SO(3)$)

Giros en el espacio euclídeo

Giros en el espacio euclídeo

Giros en el espacio euclídeo $\longleftrightarrow$ Conjugación en $\mathbb{H}_0$ por cuaterniones de norma 1 "módulo ± 1"

Giros en el espacio euclídeo $\longleftrightarrow$ Conjugación en $\mathbb{H}_0$ por cuaterniones de norma 1 "módulo ± 1"

¡Es muy fácil componer giros en el espacio euclídeo!

¡Basta multiplicar cuaterniones de norma unidad! ($\varphi_p \circ \varphi_q = \varphi_{pq}$)

Giros en el espacio euclídeo

Giros en el espacio euclídeo $\longleftrightarrow$ Conjugación en $\mathbb{H}_0$ por cuaterniones de norma 1 "módulo ± 1"

¡Es muy fácil componer giros en el espacio euclídeo!

¡Basta multiplicar cuaterniones de norma unidad! ($\varphi_p \circ \varphi_q = \varphi_{pq}$)

Ahora se pueden deducir fácilmente las fórmulas de Olinde Rodrigues (1840) para la composición de giros.

$SU(2)$

$SU(2)$

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ es $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 2.

$SU(2)$

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ es $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 2.
- $\forall q \in \mathbb{H}$, la multiplicación a derecha por q es aplicación $\mathbb{C}$-lineal. Si $q = z_1 + z_2 j$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$, la matriz coordenada (por filas) es

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ es $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 2.
- $\forall q \in \mathbb{H}$, la multiplicación a derecha por q es aplicación $\mathbb{C}$-lineal. Si $q = z_1 + z_2 j$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$, la matriz coordenada (por filas) es
$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$
- Se tiene así un homomorfismo inyectivo de álgebras (reales) $\mathbb{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, $q \mapsto R_q$, que se restringe a un isomorfismo de grupos (de Lie):

$SU(2)$

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ es $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 2.
- $\forall q \in \mathbb{H}$, la multiplicación a derecha por q es aplicación $\mathbb{C}$-lineal. Si $q = z_1 + z_2 j$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$), la matriz coordenada (por filas) es

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$

- Se tiene así un homomorfismo inyectivo de álgebras (reales) $\mathbb{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, $q \mapsto R_q$, que se restringe a un isomorfismo de grupos (de Lie):

$SU(2)$

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ es $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 2.
- $\forall q \in \mathbb{H}$, la multiplicación a derecha por q es aplicación $\mathbb{C}$-lineal. Si $q = z_1 + z_2 j$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$), la matriz coordenada (por filas) es
$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$
- Se tiene así un homomorfismo inyectivo de álgebras (reales) $\mathbb{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, $q \mapsto R_q$, que se restringe a un isomorfismo de grupos (de Lie):

$$S^3 \simeq SU(2)$$

$SU(2)$

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ es $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 2.
- $\forall q \in \mathbb{H}$, la multiplicación a derecha por q es aplicación $\mathbb{C}$-lineal. Si $q = z_1 + z_2 j$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$), la matriz coordenada (por filas) es

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$

- Se tiene así un homomorfismo inyectivo de álgebras (reales) $\mathbb{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, $q \mapsto R_q$, que se restringe a un isomorfismo de grupos (de Lie):

$$S^3 \simeq SU(2)$$

(De donde se deduce también el isomorfismo $SO(3) \simeq PSU(2)$.)

Giros en $\mathbb{R}^4$

Giros en $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ con $|p| = 1$, la multiplicación a izquierda L_p (o derecha R_p) por p es una isometría, debido a la propiedad multiplicativa de la norma.

Giros en $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ con $|p| = 1$, la multiplicación a izquierda L_p (o derecha R_p) por p es una isometría, debido a la propiedad multiplicativa de la norma.

- Si $p = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$, ($\alpha \in [0, \pi]$, $u \in \mathbb{H}_0$, $|u| = 1$), sabemos que $p^2 - 2(\cos\alpha)p + 1 = 0$, luego el polinomio mínimo de la multiplicación por p es $X \pm 1$ is $p = \mp 1$, o el polinomio irreducible $X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1$ en otro caso.

Giros en $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ con $|p| = 1$, la multiplicación a izquierda L_p (o derecha R_p) por p es una isometría, debido a la propiedad multiplicativa de la norma.

- Si $p = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$, ($\alpha \in [0, \pi]$, $u \in \mathbb{H}_0$, $|u| = 1$), sabemos que $p^2 - 2(\cos\alpha)p + 1 = 0$, luego el polinomio mínimo de la multiplicación por p es $X \pm 1$ is $p = \mp 1$, o el polinomio irreducible $X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1$ en otro caso.

- Por tanto el polinomio característico de la multiplicación por p es siempre
$$\left(X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1\right)^2$$
y, en particular, el determinante de la multiplicación por p es 1.

Giros en $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ con $|p| = 1$, la multiplicación a izquierda L_p (o derecha R_p) por p es una isometría, debido a la propiedad multiplicativa de la norma.

- Si $p = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$, ($\alpha \in [0, \pi]$, $u \in \mathbb{H}_0$, $|u| = 1$), sabemos que $p^2 - 2(\cos\alpha)p + 1 = 0$, luego el polinomio mínimo de la multiplicación por p es $X \pm 1$ is $p = \mp 1$, o el polinomio irreducible $X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1$ en otro caso.

- Por tanto el polinomio característico de la multiplicación por p es siempre
$$\left(X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1\right)^2$$
y, en particular, el determinante de la multiplicación por p es 1.

Giros en $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ con $|p| = 1$, la multiplicación a izquierda L_p (o derecha R_p) por p es una isometría, debido a la propiedad multiplicativa de la norma.
- Si $p = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$, ($\alpha \in [0, \pi]$, $u \in \mathbb{H}_0$, $|u| = 1$), sabemos que $p^2 - 2(\cos\alpha)p + 1 = 0$, luego el polinomio mínimo de la multiplicación por p es $X \pm 1$ is $p = \mp 1$, o el polinomio irreducible $X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1$ en otro caso.
- Por tanto el polinomio característico de la multiplicación por p es siempre
$$\left(X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1\right)^2$$
y, en particular, el determinante de la multiplicación por p es 1.

Las multiplicaciones por cuaterniones de norma 1 son rotaciones de $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$.

Giros en $\mathbb{R}^4$

Giros en $\mathbb{R}^4$

- Si ψ es un giro de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$, $a = \psi(1)$ es un elemento de norma 1 de $\mathbb{H}$, y
$$L_{\bar{a}} \circ \psi(1) = \bar{a}a = |a|^2 = 1,$$
luego $L_{\bar{a}} \circ \psi$ es en realidad un giro de $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}_0$.

Giros en $\mathbb{R}^4$

- Si ψ es un giro de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$, $a = \psi(1)$ es un elemento de norma 1 de $\mathbb{H}$, y
$$L_{\bar{a}} \circ \psi(1) = \bar{a}a = |a|^2 = 1,$$
luego $L_{\bar{a}} \circ \psi$ es en realidad un giro de $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}_0$.

- Por tanto, existe un $q \in \mathbb{H}$ de norma 1, tal que
$$\bar{a}\psi(x) = qxq^{-1}$$
para todo $x \in \mathbb{H}$. Esto es:
$$\psi(x) = (aq)xq^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{H}.$$

$SO(4)$

La aplicación

$$\begin{aligned}\Psi : S^3 \times S^3 &\longrightarrow SO(4),\\ (p,q) &\mapsto \psi_{p,q}\ (x \mapsto pxq^{-1})\end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \Psi = \{\pm(1,1)\}$.

$SO(4)$

La aplicación

$$\begin{aligned}\Psi : S^3 \times S^3 &\longrightarrow SO(4),\\ (p,q) &\mapsto \psi_{p,q}\ (x \mapsto pxq^{-1})\end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \Psi = \{\pm(1,1)\}$.

$$S^3 \times S^3 /_{\{\pm(1,1)\}} \simeq SO(4)$$

$SO(4)$

La aplicación

$$\begin{aligned}\Psi : S^3 \times S^3 &\longrightarrow SO(4), \\ (p,q) &\mapsto \psi_{p,q}\ (x \mapsto pxq^{-1})\end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \Psi = \{\pm(1,1)\}$.

$$S^3 \times S^3 /_{\{\pm(1,1)\}} \simeq SO(4)$$

(De donde se deduce $\quad SO(3) \times SO(3) \simeq PSO(4)$)

Giros en $\mathbb{R}^4$

Giros en $\mathbb{R}^4$

¡Es muy fácil componer giros en el espacio euclídeo de dimensión 4!

¡Basta multiplicar pares de cuaterniones de norma unidad!
$(\psi_{p_1,q_1} \circ \psi_{p_2,q_2} = \psi_{p_1 p_2, q_1 q_2})$

Giros en $\mathbb{R}^4$

¡Es muy fácil componer giros en el espacio euclídeo de dimensión 4!

¡Basta multiplicar pares de cuaterniones de norma unidad!
$(\psi_{p_1,q_1} \circ \psi_{p_2,q_2} = \psi_{p_1 p_2, q_1 q_2})$

Ejercicio

¿Qué tipo de rotación es $\psi_{p,q}$ si $p + \bar{p} = 2\cos\alpha$ y $q + \bar{q} = 2\cos\beta$?

¡Es muy fácil componer giros en el espacio euclídeo de dimensión 4!

¡Basta multiplicar pares de cuaterniones de norma unidad!
$(\psi_{p_1,q_1} \circ \psi_{p_2,q_2} = \psi_{p_1 p_2, q_1 q_2})$

Ejercicio

¿Qué tipo de rotación es $\psi_{p,q}$ si $p + \bar{p} = 2\cos\alpha$ y $q + \bar{q} = 2\cos\beta$?

Solución: Es un "doble giro" de ángulos $\alpha + \beta$ y $\alpha - \beta$.

1. Cuaterniones

2. Giros en el espacio euclídeo

3. Giros en $\mathbb{R}^4$

4. Octoniones

Octoniones (1843-1845)

Octoniones (1843-1845)

Los cuaterniones se obtienen duplicando adecuadamente los complejos:

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j.$$

Los cuaterniones se obtienen duplicando adecuadamente los complejos:

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j.$$

Duplicando de nuevo se obtienen los octoniones (Graves – Cayley):

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l.$$

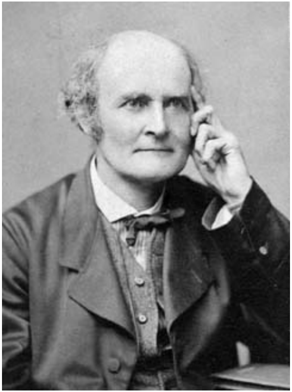
Octoniones (1843-1845)

Los cuaterniones se obtienen duplicando adecuadamente los complejos:

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j.$$

Duplicando de nuevo se obtienen los octoniones (Graves – Cayley):

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l.$$



Arthur Cayley

Octoniones

Octoniones

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$$

Octoniones

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$$

con producto

$$(p_1 + p_2 l)(q_1 + q_2 l) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2) + (q_2 p_1 + p_2 \bar{q}_1) l$$

Octoniones

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$$

con producto

$$(p_1 + p_2 l)(q_1 + q_2 l) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2) + (q_2 p_1 + p_2 \bar{q}_1) l$$

y norma:

$$|p_1 + p_2 l|^2 = |p_1|^2 + |p_2|^2$$

Octoniones

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$$

con producto

$$(p_1 + p_2 l)(q_1 + q_2 l) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2) + (q_2 p_1 + p_2 \bar{q}_1) l$$

y norma:

$$|p_1 + p_2 l|^2 = |p_1|^2 + |p_2|^2$$

¡Son las mismas fórmulas que permiten pasar de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$!

Propiedades algebraicas

Propiedades algebraicas

- $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{O}$.

- $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{O}$.
- $\mathbb{O}$ es álgebra de división no conmutativa y ¡no asociativa!.
  Pero es *alternativa*: cada dos elementos generan una subálgebra asociativa.
  Theorem (Zorn 1933): Las únicas álgebras de división reales alternativas de dimensión finita son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

  Las únicas asociativas son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ (Frobenius 1877).

Propiedades algebraicas

- $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{O}$.
- $\mathbb{O}$ es álgebra de división no conmutativa y ¡no asociativa!.
  Pero es *alternativa*: cada dos elementos generan una subálgebra asociativa.
  Theorem (Zorn 1933): Las únicas álgebras de división reales alternativas de dimensión finita son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

  Las únicas asociativas son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ (Frobenius 1877).
- $S^7 \simeq \{x \in \mathbb{O} : |x| = 1\}$ no es grupo (falla la asociatividad), pero es el ejemplo más importante de *lazo de Moufang*.

Propiedades algebraicas

- $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{O}$.
- $\mathbb{O}$ es álgebra de división no conmutativa y ¡no asociativa!.
  Pero es *alternativa*: cada dos elementos generan una subálgebra asociativa.
  Theorem (Zorn 1933): Las únicas álgebras de división reales alternativas de dimensión finita son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

  Las únicas asociativas son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ (Frobenius 1877).
- $S^7 \simeq \{x \in \mathbb{O} : |x| = 1\}$ no es grupo (falla la asociatividad), pero es el ejemplo más importante de *lazo de Moufang*.
- $\mathbb{O}_0 = \mathbb{R}\langle i, j, k, l, il, jl, kl\rangle$. $\forall u, v \in \mathbb{O}_0$:

$$uv = -u \cdot v + u \times v.$$

(¡Producto vectorial en $\mathbb{R}^7$!: $(u \times v) \times v = (u \cdot v)v - (v \cdot v)u$.)

Propiedades algebraicas

- $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{O}$.
- $\mathbb{O}$ es álgebra de división no conmutativa y ¡no asociativa!.
  Pero es *alternativa*: cada dos elementos generan una subálgebra asociativa.
  Theorem (Zorn 1933): Las únicas álgebras de división reales alternativas de dimensión finita son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

  Las únicas asociativas son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ (Frobenius 1877).
- $S^7 \simeq \{x \in \mathbb{O} : |x| = 1\}$ no es grupo (falla la asociatividad), pero es el ejemplo más importante de *lazo de Moufang*.
- $\mathbb{O}_0 = \mathbb{R}\langle i, j, k, l, il, jl, kl\rangle$. $\forall u, v \in \mathbb{O}_0$:

  $$uv = -u \cdot v + u \times v.$$

  (¡Producto vectorial en $\mathbb{R}^7$!: $(u \times v) \times v = (u \cdot v)v - (v \cdot v)u$.)
- $\mathbb{O}$ es *cuadrática*: $\forall x = a1 + u \in \mathbb{O}$, $x^2 - 2ax + |x|^2 = 0$.

Propiedades geométricas

Propiedades geométricas

- Los grupos $Spin_7$ y $Spin_8$ (cubiertas universales de $SO(7)$ y $SO(8)$) pueden ser descritos fácilmente en términos de productos de octoniones.

Propiedades geométricas

- Los grupos $Spin_7$ y $Spin_8$ (cubiertas universales de $SO(7)$ y $SO(8)$) pueden ser descritos fácilmente en términos de productos de octoniones.
- $\mathbb{O}$ de división $\Rightarrow S^7$ es paralelizable.
  S^1, S^3 y S^7 son las únicas esferas paralelizables (Milnor y Kervaire).

Propiedades geométricas

- Los grupos $Spin_7$ y $Spin_8$ (cubiertas universales de $SO(7)$ y $SO(8)$) pueden ser descritos fácilmente en términos de productos de octoniones.
- $\mathbb{O}$ de división $\Rightarrow S^7$ es paralelizable.
  S^1, S^3 y S^7 son las únicas esferas paralelizables (Milnor y Kervaire).
- $S^6 \simeq \{x \in \mathbb{O}_0 : |x| = 1\}$ tiene una *estructura casi compleja* heredada de la multiplicación de octoniones.
  S^2 y S^6 son las únicas esferas con tal estructura (Adams).

Propiedades geométricas

- Los grupos $Spin_7$ y $Spin_8$ (cubiertas universales de $SO(7)$ y $SO(8)$) pueden ser descritos fácilmente en términos de productos de octoniones.
- $\mathbb{O}$ de división $\Rightarrow S^7$ es paralelizable.
  S^1, S^3 y S^7 son las únicas esferas paralelizables (Milnor y Kervaire).
- $S^6 \simeq \{x \in \mathbb{O}_0 : |x| = 1\}$ tiene una *estructura casi compleja* heredada de la multiplicación de octoniones.
  S^2 y S^6 son las únicas esferas con tal estructura (Adams).
- *Plano proyectivo no desarguesiano* $\mathbb{OP}^2$.

Propiedades geométricas

- Los grupos $Spin_7$ y $Spin_8$ (cubiertas universales de $SO(7)$ y $SO(8)$) pueden ser descritos fácilmente en términos de productos de octoniones.
- $\mathbb{O}$ de división $\Rightarrow S^7$ es paralelizable.
  S^1, S^3 y S^7 son las únicas esferas paralelizables (Milnor y Kervaire).
- $S^6 \simeq \{x \in \mathbb{O}_0 : |x| = 1\}$ tiene una *estructura casi compleja* heredada de la multiplicación de octoniones.
  S^2 y S^6 son las únicas esferas con tal estructura (Adams).
- *Plano proyectivo no desarguesiano* $\mathbb{OP}^2$.
- Las únicas esferas que aparecen como espacios homogéneos de grupos no clásicos son $S^6 = \operatorname{Aut}\mathbb{O}/SU(3)$, $S^7 = Spin_7/\operatorname{Aut}\mathbb{O}$ y $S^{15} = Spin_9/Spin_7$.

Clasificación de Killing-Cartan (1887-1894)

Clasificación de Killing-Cartan (1887-1894)

Álgebras de Lie simples finito dimensionales sobre $\mathbb{C}$

Clasificación de Killing-Cartan (1887-1894)

Álgebras de Lie simples finito dimensionales sobre $\mathbb{C}$

- Cuatro familias infinitas: A_n, B_n, C_n, D_n,

Clasificación de Killing-Cartan (1887-1894)

Álgebras de Lie simples finito dimensionales sobre $\mathbb{C}$

- Cuatro familias infinitas: A_n, B_n, C_n, D_n,
- Cinco excepciones:

E_6,	E_7,	E_8,	F_4,	G_2.
78,	133,	248,	52,	14.

Clasificación de Killing-Cartan (1887-1894)

Álgebras de Lie simples finito dimensionales sobre $\mathbb{C}$

- Cuatro familias infinitas: A_n, B_n, C_n, D_n,
- Cinco excepciones:

E_6,	E_7,	E_8,	F_4,	G_2.
78,	133,	248,	52,	14.

Clasificación de Killing-Cartan (1887-1894)

Álgebras de Lie simples finito dimensionales sobre $\mathbb{C}$

- Cuatro familias infinitas: A_n, B_n, C_n, D_n,
- Cinco excepciones: E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

  78, 133, 248, 52, 14.

Cada una de estas álgebras de Lie complejas tiene una *forma compacta* real.

G_2 y F_4

Cartan (1914)

$$\mathfrak{der}(\mathbb{O}) = \{d \in \mathrm{End}(\mathbb{O}) : d(xy) = d(x)y + xd(y),\ \forall x, y \in \mathbb{O}\}$$

es el álgebra simple compacta de tipo G_2.

G_2 y F_4

Cartan (1914)

$$\mathfrak{Der}(\mathbb{O}) = \{d \in \mathrm{End}(\mathbb{O}) : d(xy) = d(x)y + xd(y),\ \forall x, y \in \mathbb{O}\}$$

es el álgebra simple compacta de tipo G_2.

Chevalley-Schafer (1950)

$\mathfrak{Der}\big(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})\big)$ es el álgebra simple compacta de tipo F_4.

El Cuadrado Mágico de Freudenthal

El Cuadrado Mágico de Freudenthal

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$
$\mathbb{R}$	A_1	A_2	C_3	F_4
$\mathbb{C}$	A_2	$A_2 \oplus A_2$	A_5	E_6
$\mathbb{H}$	C_3	A_5	D_6	E_7
$\mathbb{O}$	F_4	E_6	E_7	E_8

El Cuadrado Mágico de Freudenthal

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$
$\mathbb{R}$	A_1	A_2	C_3	F_4
$\mathbb{C}$	A_2	$A_2 \oplus A_2$	A_5	E_6
$\mathbb{H}$	C_3	A_5	D_6	E_7
$\mathbb{O}$	F_4	E_6	E_7	E_8

H. Freudenthal

¡$\mathbb{O}$ es excepcional!

¡$\mathbb{O}$ es excepcional!

"El dicho de que Dios es un matemático, de modo que incluso con poca evidencia experimental, una teoría matemática bonita tiene una gran probabilidad de ser correcta, se ha atribuido a Dirac. El álgebra de octoniones es ciertamente una entidad matemática preciosa y es posible que otras álgebras no asociativas (además, por supuesto, de las álgebras de Lie) puedan jugar un papel esencial en la Teoría Última, todavía por descubrir." *(S. Okubo)*

¡$\mathbb{O}$ es excepcional!

"El dicho de que Dios es un matemático, de modo que incluso con poca evidencia experimental, una teoría matemática bonita tiene una gran probabilidad de ser correcta, se ha atribuido a Dirac. El álgebra de octoniones es ciertamente una entidad matemática preciosa y es posible que otras álgebras no asociativas (además, por supuesto, de las álgebras de Lie) puedan jugar un papel esencial en la Teoría Última, todavía por descubrir." *(S. Okubo)*

¡$\mathbb{O}$ es excepcional!

"El dicho de que Dios es un matemático, de modo que incluso con poca evidencia experimental, una teoría matemática bonita tiene una gran probabilidad de ser correcta, se ha atribuido a Dirac. El álgebra de octoniones es ciertamente una entidad matemática preciosa y es posible que otras álgebras no asociativas (además, por supuesto, de las álgebras de Lie) puedan jugar un papel esencial en la Teoría Última, todavía por descubrir." *(S. Okubo)*

Gracias