Nombres exceptionnels

Alberto Elduque

Universidad de Zaragoza

Novembre 2008

1. Quaternions
2. Rotations dans l'éspace euclidien
3. Rotations dans $\mathbb{R}^4$
4. Octonions

1 Quaternions

2 Rotations dans l'éspace euclidien

3 Rotations dans $\mathbb{R}^4$

4 Octonions

Nombres complexes

Nombres complexes

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \, (\simeq \mathbb{R}^2)$$

Nombres complexes

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \, (\simeq \mathbb{R}^2)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

(où $|.|$ désigne la norme euclidienne)

Nombres complexes

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \, (\simeq \mathbb{R}^2)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

(où $|.|$ désigne la norme euclidienne)

Rotation d'angle α en $\mathbb{R}^2 \leftrightarrow$ multiplication par $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$.

Nombres complexes

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \, (\simeq \mathbb{R}^2)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

(où $|.|$ désigne la norme euclidienne)

Rotation d'angle α en $\mathbb{R}^2 \leftrightarrow$ multiplication par $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

$$SO(2) \simeq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \simeq S^1$$

Une algèbre à dimension 3 ?

Une algèbre à dimension 3 ?

Hamilton se pose la question de definir un produit similaire à celle des nombres complexes mais en dimension 3, qui respecte la “règle des modules” $(|z_1 z_2| = |z_1||z_2|)$:

Une algèbre à dimension 3 ?

Hamilton se pose la question de definir un produit similaire à celle des nombres complexes mais en dimension 3, qui respecte la “règle des modules” ($|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$) :

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = ???$$

$$(\text{en supposant } i^2 = -1 = j^2)$$

Une algèbre à dimension 3 ?

Hamilton se pose la question de definir un produit similaire à celle des nombres complexes mais en dimension 3, qui respecte la "règle des modules" ($|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$) :

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = ???$$

$$\text{(en supposant } i^2 = -1 = j^2\text{)}$$

Problème : ij ?, ji ?

Une algèbre à dimension 3 ?

Hamilton se pose la question de definir un produit similaire à celle des nombres complexes mais en dimension 3, qui respecte la "règle des modules" ($|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$) :

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = ???$$

$$(\text{en supposant } i^2 = -1 = j^2)$$

Problème : ij ?, ji ?

Après des années de tentatives, il a trouvé la solution le 16 Octobre 1843.

Lettre de Sir W. R. Hamilton à son fils Rev. Archibald H. Hamilton, datée le 5 août 1865 :

MY DEAR ARCHIBALD -
(1) I had been wishing for an occasion of corresponding a little with you on QUATERNIONS : and such now presents itself, by your mentioning in your note of yesterday, received this morning, that you "have been reflecting on several points connected with them" (the quaternions), "particularly on the Multiplication of Vectors."

(2) No more important, or indeed fundamental question, in the whole Theory of Quaternions, can be proposed than that which thus inquires What is such MULTIPLICATION ? What are its Rules, its Objects, its Results ? What Analogies exist between it and other Operations, which have received the same general Name ? And finally, what is (if any) its Utility ?

A spark flashed forth

(3) If I may be allowed to speak of myself in connexion with the subject, I might do so in a way which would bring you in, by referring to an ante-quaternionic time, when you were a mere child, but had caught from me the conception of a Vector, as represented by a Triplet : and indeed I happen to be able to put the finger of memory upon the year and month - October, 1843 - when having recently returned from visits to Cork and Parsonstown, connected with a meeting of the British Association, the desire to discover the laws of the multiplication referred to regained with me a certain strength and earnestness, which had for years been dormant, but was then on the point of being gratified, and was occasionally talked of with you. Every morning in the early part of the above-cited month, on my coming down to breakfast, your (then) little brother William Edwin, and yourself, used to ask me, "Well, Papa, can you multiply triplets" ? Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head : "No, I can only add and subtract them."

A spark flashed forth

(4) But on the 16th day of the same month - which happened to be a Monday, and a Council day of the Royal Irish Academy - I was walking in to attend and preside, and your mother was walking with me, along the Royal Canal, to which she had perhaps driven ; and although she talked with me now and then, yet an under-current of thought was going on in my mind, which gave at last a result, whereof it is not too much to say that I felt at once the importance. An electric circuit seemed to close ; and a spark flashed forth, the herald (as I foresaw, immediately) of many long years to come of definitely directed thought and work, by myself if spared, and at all events on the part of others, if I should even be allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery.

A spark flashed forth

Nor could I resist the impulse -unphilosophical as it may have been- to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge[1], as we passed it, the fundamental formula with the symbols, i, j, k ; namely,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

which contains the Solution of the Problem, but of course, as an inscription, has long since mouldered away. A more durable notice remains, however, on the Council Books of the Academy for that day (October 16th, 1843), which records the fact, that I then asked for and obtained leave to read a Paper on Quaternions, at the First General Meeting of the session : which reading took place accordingly, on Monday the 13th of the November following.

With this quaternion of paragraphs I close this letter I. ; but I hope to follow it up very shortly with another.

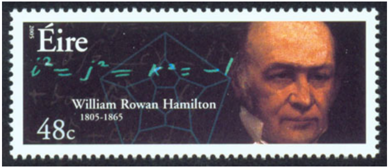
Your affectionate father, WILLIAM ROWAN HAMILTON.

[1] Le vrai nom du pont est Broome

$\mathbb{H}$

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k,$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k,$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$



Hamilton et ses quaternions

Quelques propiétés de $\mathbb{H}$

Quelques propiétés de $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

Quelques propiétés de $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
- $\mathbb{H}$ est une algèbre de division associative (mais pas commutative).
  Alors $S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ est un group (de Lie).
  (Ceci implie immediatement que S^3 est parallelisable.)

Quelques propiétés de $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
- $\mathbb{H}$ est une algèbre de division associative (mais pas commutative).
  Alors $S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ est un group (de Lie).
  (Ceci implie immediatement que S^3 est parallelisable.)
- $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \simeq \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$, et $\forall u, v \in \mathbb{H}_0$:

$$uv = -u \cdot v + u \times v$$

(où $u \cdot v$ et $u \times v$ désignent le produit scalair et vectoriel usuel)

Quelques propiétés de $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
- $\mathbb{H}$ est une algèbre de division associative (mais pas commutative).
  Alors $S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ est un group (de Lie).
  (Ceci implie immediatement que S^3 est parallelisable.)
- $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \simeq \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$, et $\forall u, v \in \mathbb{H}_0$:

  $$uv = -u \cdot v + u \times v$$

  (où $u \cdot v$ et $u \times v$ désignent le produit scalair et vectoriel usuel)
- $\forall q = a1 + u \in \mathbb{H}$, $q^2 = (a^2 - u \cdot u) + 2au$, alors

  $$\boxed{q^2 - (2a)q + |q|^2 = 0} \qquad (\mathbb{H} \text{ est quadratique})$$

Quelques propiétés de $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
- $\mathbb{H}$ est une algèbre de division associative (mais pas commutative).
  Alors $S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ est un group (de Lie).
  (Ceci implie immediatement que S^3 est parallelisable.)
- $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \simeq \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$, et $\forall u, v \in \mathbb{H}_0$:

  $$uv = -u \cdot v + u \times v$$

  (où $u \cdot v$ et $u \times v$ désignent le produit scalair et vectoriel usuel)
- $\forall q = a1 + u \in \mathbb{H}$, $q^2 = (a^2 - u \cdot u) + 2au$, alors

  $$\boxed{q^2 - (2a)q + |q|^2 = 0} \qquad (\mathbb{H} \text{ est quadratique})$$
- La aplication $q = a + u \mapsto \bar{q} = a - u$ est une involution, avec
  $q + \bar{q} = 2a$ et $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$.

1 Quaternions

2 Rotations dans l'éspace euclidien

3 Rotations dans $\mathbb{R}^4$

4 Octonions

Rotations dans l'éspace euclidien

Rotations dans l'éspace euclidien

$$q \in \mathbb{H},\ |q| = 1 \ \Rightarrow \exists \alpha \in [0, \pi],\ u \in \mathbb{H}_0,\ |u| = 1$$
$$\text{tels que } q = (\cos\alpha)1 + (\sin\alpha)u$$

Rotations dans l'éspace euclidien

$$q \in \mathbb{H},\ |q| = 1 \ \Rightarrow \exists \alpha \in [0,\pi],\ u \in \mathbb{H}_0,\ |u| = 1$$
$$\text{tels que } q = (\cos\alpha)1 + (\sin\alpha)u$$

Prénons $v \in \mathbb{H}_0$ de norme 1 et orthogonal à u, de façon que $\{u, v, u \times v\}$ est une base orthonormal orientée positivement de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{H}_0$.

Rotations dans l'éspace euclidien

$$q \in \mathbb{H},\ |q| = 1 \ \Rightarrow \exists \alpha \in [0, \pi],\ u \in \mathbb{H}_0,\ |u| = 1$$
$$\text{tels que } q = (\cos\alpha)1 + (\sin\alpha)u$$

Prénons $v \in \mathbb{H}_0$ de norme 1 et orthogonal à u, de façon que $\{u, v, u \times v\}$ est une base orthonormal orientée positivement de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{H}_0$.

Considerons l'aplication lineaire :

$$\varphi_q : \mathbb{H}_0 \longrightarrow \mathbb{H}_0,$$
$$x \mapsto qxq^{-1} = qx\bar{q}.$$

Matrice coordonnée de φ_q

Matrice coordonnée de φ_q

$$\varphi_q(u) = quq^{-1} = u \qquad \text{(porque } uq = qu\text{)},$$

Matrice coordonnée de φ_q

$$\varphi_q(u) = quq^{-1} = u \qquad \text{(porque } uq = qu\text{)},$$

$$\begin{aligned}
\varphi_q(v) &= \big((\cos\alpha)1 + (\sin\alpha)u\big)v\big((\cos\alpha)1 - (\sin\alpha)u\big) \\
&= \big((\cos\alpha)v + (\sin\alpha)u \times v\big)\big((\cos\alpha)1 - (\sin\alpha)u\big) \\
&= (\cos^2\alpha)v + 2(\cos\alpha\sin\alpha)u \times v - (\sin^2\alpha)(u \times v) \times u \\
&= (\cos 2\alpha)v + (\sin 2\alpha)u \times v,
\end{aligned}$$

Matrice coordonnée de φ_q

$$\varphi_q(u) = quq^{-1} = u \qquad \text{(porque } uq = qu\text{)},$$

$$\begin{aligned}
\varphi_q(v) &= \big((\cos\alpha)1 + (\sin\alpha)u\big)v\big((\cos\alpha)1 - (\sin\alpha)u\big) \\
&= \big((\cos\alpha)v + (\sin\alpha)u \times v\big)\big((\cos\alpha)1 - (\sin\alpha)u\big) \\
&= (\cos^2\alpha)v + 2(\cos\alpha\sin\alpha)u \times v - (\sin^2\alpha)(u \times v) \times u \\
&= (\cos 2\alpha)v + (\sin 2\alpha)u \times v,
\end{aligned}$$

$$\varphi_q(u \times v) = \ldots = -(\sin 2\alpha)v + (\cos 2\alpha)u \times v.$$

Matrice coordonnée de φ_q

Matrice coordonnée de φ_q

Alors la matrice coordonnée de φ_q dans la base $\{u, v, u \times v\}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix},$$

Matrice coordonnée de φ_q

Alors la matrice coordonnée de φ_q dans la base $\{u, v, u \times v\}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix},$$

φ_q est la rotation avec axis $\mathbb{R}^+ u$ et angle 2α

$SO(3)$

$SO(3)$

L'application

$$\begin{aligned} \varphi : S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} &\longrightarrow SO(3), \\ q &\mapsto \varphi_q \end{aligned}$$

est un homomorphisme surjective de groups (de Lie) avec $\ker \varphi = \{\pm 1\}$:

$SO(3)$

L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} & \longrightarrow & SO(3), \\ q & \mapsto & \varphi_q \end{array}$$

est un homomorphisme surjective de groups (de Lie) avec $\ker \varphi = \{\pm 1\}$:

$$S^3/_{\{\pm 1\}} \simeq SO(3)$$

$SO(3)$

L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} & \longrightarrow & SO(3), \\ q & \mapsto & \varphi_q \end{array}$$

est un homomorphisme surjective de groups (de Lie) avec $\ker \varphi = \{\pm 1\}$:

$$S^3/_{\{\pm 1\}} \simeq SO(3)$$

(S^3 est la recouvrement universel de $SO(3)$)

Rotations dans l'éspace euclidien

Rotations dans l'éspace euclidien

Rotations dans l'éspace euclidien $\longleftrightarrow$ Conjugation dans $\mathbb{H}_0$ par quaternions de norme 1 "modulo ± 1"

Rotations dans l'éspace euclidien

Rotations dans l'éspace euclidien $\longleftrightarrow$ Conjugation dans $\mathbb{H}_0$ par quaternions de norme 1 "modulo ± 1"

Il est très facile de composer rotations dans l'éspace euclidien !

Il suffit de multiplier quaternions de norme unité ! ($\varphi_p \circ \varphi_q = \varphi_{pq}$)

Rotations dans l'éspace euclidien $\longleftrightarrow$ Conjugation dans $\mathbb{H}_0$ par quaternions de norme 1 "modulo ± 1"

Il est très facile de composer rotations dans l'éspace euclidien !

Il suffit de multiplier quaternions de norme unité ! ($\varphi_p \circ \varphi_q = \varphi_{pq}$)

Maintenant on peut deduir aisément les formules d'Olinde Rodrigues (1840) pour la composition de rotations.

$SU(2)$

$SU(2)$

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ est $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

$SU(2)$

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ est $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.
- $\forall q \in \mathbb{H}$, la multiplication à droit par q est une application $\mathbb{C}$-lineaire. Si $q = z_1 + z_2 j$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$, la matrice coordonnée (par lignes) est

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$

$SU(2)$

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ est $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.
- $\forall q \in \mathbb{H}$, la multiplication à droit par q est une application $\mathbb{C}$-lineaire. Si $q = z_1 + z_2 j$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$), la matrice coordonnée (par lignes) est

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$

- On a un homomorphism injective d'álgèbres (réelles) $\mathbb{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, $q \mapsto R_q$, qu'induit un isomorphisme de groupes (de Lie)

$SU(2)$

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ est $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.
- $\forall q \in \mathbb{H}$, la multiplication à droit par q est une application $\mathbb{C}$-lineaire. Si $q = z_1 + z_2 j$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$, la matrice coordonnée (par lignes) est
$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$
- On a un homomorphism injective d'álgèbres (réelles) $\mathbb{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, $q \mapsto R_q$, qu'induit un isomorphisme de groupes (de Lie)

$SU(2)$

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ est $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.
- $\forall q \in \mathbb{H}$, la multiplication à droit par q est une application $\mathbb{C}$-lineaire. Si $q = z_1 + z_2 j$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$, la matrice coordonnée (par lignes) est
$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$
- On a un homomorphism injective d'álgèbres (réelles) $\mathbb{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, $q \mapsto R_q$, qu'induit un isomorphisme de groupes (de Lie)

$$S^3 \simeq SU(2)$$

$SU(2)$

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ est $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.
- $\forall q \in \mathbb{H}$, la multiplication à droit par q est une application $\mathbb{C}$-lineaire. Si $q = z_1 + z_2 j$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$, la matrice coordonnée (par lignes) est

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$

- On a un homomorphism injective d'álgèbres (réelles) $\mathbb{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, $q \mapsto R_q$, qu'induit un isomorphisme de groupes (de Lie)

$$S^3 \simeq SU(2)$$

(On en deduit aussi l'isomorphisme $SO(3) \simeq PSU(2)$.)

1 Quaternions

2 Rotations dans l'éspace euclidien

3 Rotations dans $\mathbb{R}^4$

4 Octonions

Rotations dans $\mathbb{R}^4$

Rotations dans $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ avec $|p| = 1$, la multiplication à gauche L_p (or à droit R_p) par p est une isométrie, grace à la propriété multiplicative de la norme.

Rotations dans $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ avec $|p| = 1$, la multiplication à gauche L_p (or à droit R_p) par p est une isométrie, grace à la propriété multiplicative de la norme.

- Si $p = (\cos\alpha)1 + (\sin\alpha)u$, ($\alpha \in [0, \pi]$, $u \in \mathbb{H}_0$, $|u| = 1$), on sait que $p^2 - 2(\cos\alpha)p + 1 = 0$, alors le polynôme minimal de la multiplication par p est $X \pm 1$ si $p = \mp 1$, or le polynòme irréductible $X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1$ autrement.

Rotations dans $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ avec $|p| = 1$, la multiplication à gauche L_p (or à droit R_p) par p est une isométrie, grace à la propriété multiplicative de la norme.

- Si $p = (\cos\alpha)1 + (\sin\alpha)u$, $(\alpha \in [0, \pi],\ u \in \mathbb{H}_0,\ |u| = 1)$, on sait que $p^2 - 2(\cos\alpha)p + 1 = 0$, alors le polynôme minimal de la multiplication par p est $X \pm 1$ si $p = \mp 1$, or le polynòme irréductible $X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1$ autrement.

- Alors le polynôme characteristique de la multiplication par p est toujours
$$\left(X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1\right)^2$$
et, en particulier, le determinant de la multiplication par p est 1.

Rotations dans $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ avec $|p| = 1$, la multiplication à gauche L_p (or à droit R_p) par p est une isométrie, grace à la propriété multiplicative de la norme.

- Si $p = (\cos\alpha)1 + (\sin\alpha)u$, $(\alpha \in [0, \pi]$, $u \in \mathbb{H}_0$, $|u| = 1)$, on sait que $p^2 - 2(\cos\alpha)p + 1 = 0$, alors le polynôme minimal de la multiplication par p est $X \pm 1$ si $p = \mp 1$, or le polynòme irréductible $X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1$ autrement.

- Alors le polynôme characteristique de la multiplication par p est toujours
$$\left(X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1\right)^2$$
et, en particulier, le determinant de la multiplication par p est 1.

Rotations dans $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ avec $|p| = 1$, la multiplication à gauche L_p (or à droit R_p) par p est une isométrie, grace à la propriété multiplicative de la norme.

- Si $p = (\cos\alpha)1 + (\sin\alpha)u$, ($\alpha \in [0, \pi]$, $u \in \mathbb{H}_0$, $|u| = 1$), on sait que $p^2 - 2(\cos\alpha)p + 1 = 0$, alors le polynôme minimal de la multiplication par p est $X \pm 1$ si $p = \mp 1$, or le polynòme irréductible $X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1$ autrement.

- Alors le polynôme characteristique de la multiplication par p est toujours
$$\left(X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1\right)^2$$
et, en particulier, le determinant de la multiplication par p est 1.

Les multiplications par quaternions de norme 1 sont des rotations de $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$.

Rotations dans $\mathbb{R}^4$

Rotations dans $\mathbb{R}^4$

- Si ψ est une rotation de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$, $a = \psi(1)$ est un élement de norme 1 de $\mathbb{H}$, alors
$$L_{\bar{a}} \circ \psi(1) = \bar{a}a = |a|^2 = 1,$$
et $L_{\bar{a}} \circ \psi$ est vraiement une rotation de $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}_0$.

Rotations dans $\mathbb{R}^4$

- Si ψ est une rotation de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$, $a = \psi(1)$ est un élement de norme 1 de $\mathbb{H}$, alors

  $$L_{\bar{a}} \circ \psi(1) = \bar{a}a = |a|^2 = 1,$$

  et $L_{\bar{a}} \circ \psi$ est vraiement une rotation de $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}_0$.

- Alors, il existe un élement $q \in \mathbb{H}$ de norme 1, tel que

  $$\bar{a}\psi(x) = qxq^{-1}$$

  pour tout $x \in \mathbb{H}$. C'est à dire :

  $$\psi(x) = (aq)xq^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{H}.$$

$SO(4)$

$SO(4)$

L'application

$$\Psi : S^3 \times S^3 \longrightarrow SO(4),$$
$$(p, q) \mapsto \psi_{p,q} \ (x \mapsto pxq^{-1})$$

est un homomorphisme surjective de groupes (de Lie) avec $\ker \Psi = \{\pm(1,1)\}$.

$SO(4)$

L'application

$$\Psi : S^3 \times S^3 \longrightarrow SO(4),$$
$$(p, q) \mapsto \psi_{p,q} \ (x \mapsto pxq^{-1})$$

est un homomorphisme surjective de groupes (de Lie) avec $\ker \Psi = \{\pm(1,1)\}$.

$$S^3 \times S^3 /_{\{\pm(1,1)\}} \simeq SO(4)$$

$SO(4)$

L'application

$$\Psi : S^3 \times S^3 \longrightarrow SO(4),$$
$$(p,q) \mapsto \psi_{p,q}\ (x \mapsto pxq^{-1})$$

est un homomorphisme surjective de groupes (de Lie) avec $\ker \Psi = \{\pm(1,1)\}$.

$$S^3 \times S^3 /_{\{\pm(1,1)\}} \simeq SO(4)$$

(On en déduit l'isomorphisme $\quad SO(3) \times SO(3) \simeq PSO(4)$)

Rotations dans $\mathbb{R}^4$

Rotations dans $\mathbb{R}^4$

Il est très facile de composer rotations dans l'éspace euclidien de dimension 4 !

Il suffit de multiplier pairs de quaternions de norme unité !
$(\psi_{p_1,q_1} \circ \psi_{p_2,q_2} = \psi_{p_1 p_2, q_1 q_2})$

Rotations dans $\mathbb{R}^4$

Il est très facile de composer rotations dans l'éspace euclidien de dimension 4 !

Il suffit de multiplier pairs de quaternions de norme unité ! $(\psi_{p_1,q_1} \circ \psi_{p_2,q_2} = \psi_{p_1 p_2, q_1 q_2})$

Exercise

Quelle type de rotation est $\psi_{p,q}$ si $p + \bar{p} = 2\cos\alpha$ et $q + \bar{q} = 2\cos\beta$?

Rotations dans $\mathbb{R}^4$

Il est très facile de composer rotations dans l'éspace euclidien de dimension 4 !

Il suffit de multiplier pairs de quaternions de norme unité !
$(\psi_{p_1,q_1} \circ \psi_{p_2,q_2} = \psi_{p_1 p_2, q_1 q_2})$

Exercise

Quelle type de rotation est $\psi_{p,q}$ si $p + \bar{p} = 2\cos\alpha$ et $q + \bar{q} = 2\cos\beta$?

Solution : Est une "double rotation" avec angles $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$.

1 Quaternions

2 Rotations dans l'éspace euclidien

3 Rotations dans $\mathbb{R}^4$

4 Octonions

Octonions (1843-1845)

Octonions (1843-1845)

Les quaternions sont obtenus par duplication des nombres complexes :

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j.$$

Octonions (1843-1845)

Les quaternions sont obtenus par duplication des nombres complexes :

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j.$$

Si on fait une autre duplication on obtient les octonions (Graves – Cayley) :

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l.$$

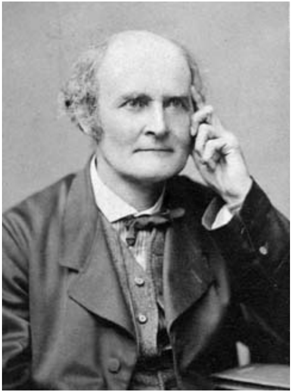
Octonions (1843-1845)

Les quaternions sont obtenus par duplication des nombres complexes :

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j.$$

Si on fait une autre duplication on obtient les octonions (Graves – Cayley) :

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l.$$



Arthur Cayley

Octonions

Octonions

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$$

Octonions

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$$

avec le produit

$$(p_1 + p_2 l)(q_1 + q_2 l) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2) + (q_2 p_1 + p_2 \bar{q}_1) l$$

Octonions

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$$

avec le produit

$$(p_1 + p_2 l)(q_1 + q_2 l) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2) + (q_2 p_1 + p_2 \bar{q}_1) l$$

et norme :

$$|p_1 + p_2 l|^2 = |p_1|^2 + |p_2|^2$$

Octonions

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$$

avec le produit

$$(p_1 + p_2 l)(q_1 + q_2 l) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2) + (q_2 p_1 + p_2 \bar{q}_1) l$$

et norme :

$$|p_1 + p_2 l|^2 = |p_1|^2 + |p_2|^2$$

Ce sont les mêmes formules qui permettent de passer de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{H}$!

Propiétés algébriques

Propiétés algébriques

- $|xy| = |x||y|, \forall x, y \in \mathbb{O}.$

Propiétés algébriques

- $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{O}$.
- $\mathbb{O}$ est une algèbre de division non commutative et non associative !. Mais elle est *alternative* : chaque deux élements générent une sousalgèbre associative.
  Theorem (Zorn 1933) : Les seules algèbres de division réelles alternatives de dimension finie sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$.

  Les seules algèbres de division réelles associatives sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ (Frobenius 1877).

Propiétés algébriques

- $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{O}$.
- $\mathbb{O}$ est une algèbre de division non commutative et non associative !. Mais elle est *alternative* : chaque deux élements générent une sousalgèbre associative.
  Theorem (Zorn 1933) : Les seules algèbres de division réelles alternatives de dimension finie sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$.

  Les seules algèbres de division réelles associatives sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ (Frobenius 1877).
- $S^7 \simeq \{x \in \mathbb{O} : |x| = 1\}$ n'est pas un groupe (le produit n'est pas associative), mais c'est l'example plus important de *boucle de Moufang*.

Propiétés algébriques

- $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{O}$.
- $\mathbb{O}$ est une algèbre de division non commutative et non associative !. Mais elle est *alternative* : chaque deux élements générent une sousalgèbre associative.
  Theorem (Zorn 1933) : Les seules algèbres de division réelles alternatives de dimension finie sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$.

  Les seules algèbres de division réelles associatives sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ (Frobenius 1877).
- $S^7 \simeq \{x \in \mathbb{O} : |x| = 1\}$ n'est pas un groupe (le produit n'est pas associative), mais c'est l'example plus important de *boucle de Moufang*.
- $\mathbb{O}_0 = \mathbb{R}\langle i, j, k, l, il, jl, kl\rangle$. $\forall u, v \in \mathbb{O}_0$:

$$uv = -u \cdot v + u \times v.$$

  (Produit vectoriel en $\mathbb{R}^7$! : $(u \times v) \times v = (u \cdot v)v - (v \cdot v)u$.)

Propiétés algébriques

- $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{O}$.
- $\mathbb{O}$ est une algèbre de division non commutative et non associative !. Mais elle est *alternative* : chaque deux élements générent une sousalgèbre associative.
  Theorem (Zorn 1933) : Les seules algèbres de division réelles alternatives de dimension finie sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$.

  Les seules algèbres de division réelles associatives sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ (Frobenius 1877).
- $S^7 \simeq \{x \in \mathbb{O} : |x| = 1\}$ n'est pas un groupe (le produit n'est pas associative), mais c'est l'example plus important de *boucle de Moufang*.
- $\mathbb{O}_0 = \mathbb{R}\langle i, j, k, l, il, jl, kl\rangle$. $\forall u, v \in \mathbb{O}_0$:

$$uv = -u \cdot v + u \times v.$$

  (Produit vectoriel en $\mathbb{R}^7$! : $(u \times v) \times v = (u \cdot v)v - (v \cdot v)u$.)
- $\mathbb{O}$ est *quadratique* : $\forall x = a1 + u \in \mathbb{O}$, $x^2 - 2ax + |x|^2 = 0$.

Propiétés geométriques

Propiétés geométriques

- Les groupes $Spin_7$ et $Spin_8$ (recouvrements universels de $SO(7)$ et $SO(8)$) peuvent être décrites facilement en terms de produits d'octonions.

Propiétés geométriques

- Les groupes $Spin_7$ et $Spin_8$ (recouvrements universels de $SO(7)$ et $SO(8)$) peuvent être décrites facilement en terms de produits d'octonions.
- $\mathbb{O}$ de division $\Rightarrow S^7$ est parallelisable.
  S^1, S^3 et S^7 sont les seules sphères qui sont parallelisables (Milnor et Kervaire).

Propiétés geométriques

- Les groupes $Spin_7$ et $Spin_8$ (recouvrements universels de $SO(7)$ et $SO(8)$) peuvent être décrites facilement en terms de produits d'octonions.
- $\mathbb{O}$ de division $\Rightarrow S^7$ est parallelisable.
  S^1, S^3 et S^7 sont les seules sphères qui sont parallelisables (Milnor et Kervaire).
- $S^6 \simeq \{x \in \mathbb{O}_0 : |x| = 1\}$ a une *structure presque complexe* qui est fourni par la multiplication d'octonions.
  S^2 et S^6 sont les seules sphères avec cette structure (Adams).

Propiétés geométriques

- Les groupes $Spin_7$ et $Spin_8$ (recouvrements universels de $SO(7)$ et $SO(8)$) peuvent être décrites facilement en terms de produits d'octonions.
- $\mathbb{O}$ de division $\Rightarrow S^7$ est parallelisable.
  S^1, S^3 et S^7 sont les seules sphères qui sont parallelisables (Milnor et Kervaire).
- $S^6 \simeq \{x \in \mathbb{O}_0 : |x| = 1\}$ a une *structure presque complexe* qui est fourni par la multiplication d'octonions.
  S^2 et S^6 sont les seules sphères avec cette structure (Adams).
- *Plan projectif non desarguesien* $\mathbb{OP}^2$.

Propiétés geométriques

- Les groupes $Spin_7$ et $Spin_8$ (recouvrements universels de $SO(7)$ et $SO(8)$) peuvent être décrites facilement en terms de produits d'octonions.
- $\mathbb{O}$ de division $\Rightarrow S^7$ est parallelisable.
  S^1, S^3 et S^7 sont les seules sphères qui sont parallelisables (Milnor et Kervaire).
- $S^6 \simeq \{x \in \mathbb{O}_0 : |x| = 1\}$ a une *structure presque complexe* qui est fourni par la multiplication d'octonions.
  S^2 et S^6 sont les seules sphères avec cette structure (Adams).
- *Plan projectif non desarguesien* $\mathbb{OP}^2$.
- Les seules sphères qui apparaient comme spaces homogènes de groupes non classiques sont $S^6 = \operatorname{Aut}\mathbb{O}/SU(3)$, $S^7 = Spin_7/\operatorname{Aut}\mathbb{O}$ et $S^{15} = Spin_9/Spin_7$.

Classification de Killing-Cartan (1887-1894)

Classification de Killing-Cartan (1887-1894)

Algèbres de Lie simples de dimension finie sur $\mathbb{C}$

Classification de Killing-Cartan (1887-1894)

Algèbres de Lie simples de dimension finie sur $\mathbb{C}$

- Quatre familles infinies : A_n, B_n, C_n, D_n,

Classification de Killing-Cartan (1887-1894)

Algèbres de Lie simples de dimension finie sur $\mathbb{C}$

- Quatre familles infinies : A_n, B_n, C_n, D_n,
- Cinq exceptions : $\begin{array}{ccccc} E_6, & E_7, & E_8, & F_4, & G_2. \\ 78, & 133, & 248, & 52, & 14. \end{array}$

Classification de Killing-Cartan (1887-1894)

Algèbres de Lie simples de dimension finie sur $\mathbb{C}$

- Quatre familles infinies : A_n, B_n, C_n, D_n,
- Cinq exceptions : $\begin{array}{ccccc} E_6, & E_7, & E_8, & F_4, & G_2. \\ 78, & 133, & 248, & 52, & 14. \end{array}$

Classification de Killing-Cartan (1887-1894)

Algèbres de Lie simples de dimension finie sur $\mathbb{C}$

- Quatre familles infinies : A_n, B_n, C_n, D_n,
- Cinq exceptions : E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

E_6,	E_7,	E_8,	F_4,	G_2.
78,	133,	248,	52,	14.

Chaqu'une de cettes algèbres de Lie complexes a une *forme compacte* réelle.

G_2 et F_4

Cartan (1914)

$$\mathfrak{der}(\mathbb{O}) = \{d \in \mathrm{End}(\mathbb{O}) : d(xy) = d(x)y + xd(y),\ \forall x, y \in \mathbb{O}\}$$

est l'algèbre simple compacte de type G_2.

Cartan (1914)

$$\mathfrak{Der}(\mathbb{O}) = \{d \in \mathrm{End}(\mathbb{O}) : d(xy) = d(x)y + xd(y),\ \forall x, y \in \mathbb{O}\}$$

est l'algèbre simple compacte de type G_2.

Chevalley-Schafer (1950)

$\mathfrak{Der}\big(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})\big)$ est l'algèbre simple compacte de type F_4.

Le carré magique de Freudenthal

Le carré magique de Freudenthal

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$
$\mathbb{R}$	A_1	A_2	C_3	F_4
$\mathbb{C}$	A_2	$A_2 \oplus A_2$	A_5	E_6
$\mathbb{H}$	C_3	A_5	D_6	E_7
$\mathbb{O}$	F_4	E_6	E_7	E_8

Le carré magique de Freudenthal

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$
$\mathbb{R}$	A_1	A_2	C_3	F_4
$\mathbb{C}$	A_2	$A_2 \oplus A_2$	A_5	E_6
$\mathbb{H}$	C_3	A_5	D_6	E_7
$\mathbb{O}$	F_4	E_6	E_7	E_8

H. Freudenthal

$\mathbb{O}$ est exceptionnelle !

$\mathbb{O}$ est exceptionnelle !

"The saying that God is the mathematician, so that, even with meager experimental support, a mathematically beautiful theory will ultimately have a greater chance of being correct, has been attributed to Dirac. Octonion algebra may surely be called a beautiful mathematical entity. Nevertheless, it has never been systematically utilized in physics in any fundamental fashion, although some attempts have been made toward this goal. However, it is still possible that non-associative algebras (other than Lie algebras) may play some essential future role in the ultimate theory, yet to be discovered." *(S. Okubo 1995)*

$\mathbb{O}$ est exceptionnelle !

"The saying that God is the mathematician, so that, even with meager experimental support, a mathematically beautiful theory will ultimately have a greater chance of being correct, has been attributed to Dirac. Octonion algebra may surely be called a beautiful mathematical entity. Nevertheless, it has never been systematically utilized in physics in any fundamental fashion, although some attempts have been made toward this goal. However, it is still possible that non-associative algebras (other than Lie algebras) may play some essential future role in the ultimate theory, yet to be discovered." *(S. Okubo 1995)*

$\mathbb{O}$ est exceptionnelle !

"The saying that God is the mathematician, so that, even with meager experimental support, a mathematically beautiful theory will ultimately have a greater chance of being correct, has been attributed to Dirac. Octonion algebra may surely be called a beautiful mathematical entity. Nevertheless, it has never been systematically utilized in physics in any fundamental fashion, although some attempts have been made toward this goal. However, it is still possible that non-associative algebras (other than Lie algebras) may play some essential future role in the ultimate theory, yet to be discovered." (S. Okubo 1995)

Merci