Festividad de San Alberto Magno

Otros números

(15 de noviembre de 2004)

Alberto Elduque
Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.
elduque@unizar.es

Excmo. y Magnífico Sr. Rector, Ilustrísimo Sr. Decano, ilustrísimas autoridades, queridos colegas y alumnos, distinguido público:

Cuando hace unas semanas, el vicedecano Dr. Luis Rández me encargó la impartición de esta conferencia, junto a la natural gratitud por el honor que se me ofrecía, debo de confesar que mi primera reacción fue preguntar si iba a disponer de una pizarra porque ¿cómo hablar de matemáticas sin ella o, en su defecto, sin un proyector? Las matemáticas necesitan ser asimiladas lentamente, y una pizarra obliga a ese ritmo pausado tan necesario. Al saber que no disponía de tales medios, me inundó la preocupación. ¿De qué podía hablar yo más que de matemáticas?

Claro que, pasado el sofoco inicial, pensé que ésta podía ser una buena ocasión para intentar contestar a esa pregunta que nos resulta tan difícil a los matemáticos, al menos a los matemáticos puros y abstractos como yo: ¿Y tú, a qué te dedicas en tu investigación? Ante un público amplio no valen respuestas como: "estoy investigando una familia de superálgebras de Lie simples sobre cuerpos de característica prima que se obtienen a partir de sistemas triples de Freudenthal", que es lo que le dije hace poco a un colega, especialista en estos sistemas triples.

Así que me planteé como objetivo el tratar de explicar de otro modo qué hacemos algunos de los matemáticos de esta Facultad, que celebra hoy su patrón. Y lo que hacemos algunos de nosotros es estudiar esos "otros números" a los que se refiere el título de la charla. Hoy les mostraré algunos de estos números.

1. Reales y complejos

Todos en la audiencia están acostumbrados a los números de contar, o *números naturales*: 1, 2, 3, ... También a considerar el 0 y añadir los números negativos (que son los que aparecen en ocasiones en la cuenta bancaria). Con estos añadidos obtenemos los *números enteros*. Pero también estamos acostumbrados a medir, y para ello usamos los *números reales*, que incluyen, además de los enteros, las fracciones y también muchos más, como las raíces cuadradas de los números positivos (por ejemplo, $\sqrt{2}$ aparece al medir la diagonal de un cuadrado de lado unidad) o números tan interesantes como el número π, que aparece al medir la longitud de una circunferencia.

Allá por el siglo XVI (el Cinquecento), en la Italia renacentista se comenzaron a estudiar ecuaciones de grados 3 y 4 y, poco a poco, se fueron acostumbrando a la idea de que para obtener soluciones reales, en ocasiones había que pasar por cálculos que involucraban raíces cuadradas de números negativos. Más tarde, Descartes llamó a estas raíces "imaginarias" y todavía Leibnitz, en la segunda mitad del siglo XVII, decía que estos números estaban a medio camino entre la existencia y la no existencia.

Es al final del XVII y durante el XVIII cuando se aceptan plenamente estos nuevos números, dándose interpretaciones geométricas y notaciones adecuadas. Se tienen así los *números complejos*, que son números que se pueden escribir en la forma $a + bi$ (¡cuanto echo de menos una pizarra!), donde a y b son números reales y la "unidad imaginaria" i denota una raíz cuadrada de -1. Estos números tienen una parte real y una parte imaginaria; en términos modernos decimos que forman un álgebra real de dimensión dos.

Podemos sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos, y tenemos todas las propiedades usuales, en particular la propiedad conmutativa, que es ésa que dice que 'el orden de los factores no altera el valor del producto', y la asociativa, que nos dice que al multiplicar tres números, da igual hacer el producto de los dos primeros, y el resultado multiplicarlo por el tercero, que multiplicar el primero por el resultado de multiplicar el segundo y el tercero.

Además, todo número complejo puede ser representado por vectores del plano, con la propiedad importante de que la longitud del vector correspondiente al producto de dos números complejos coincide con el producto de las longitudes de los vectores correspondientes a cada uno de ellos. De este modo, los números complejos ayudan a estudiar cuestiones geométricas del plano. Así, por ejemplo, un giro en el plano no es más que la multiplicación por un número complejo de longitud unidad.

Los números complejos son viejos conocidos de muchos de ustedes, y buena parte de las matemáticas se desarrollan utilizando sólo números reales y complejos. Y al menos todos mis colegas y alumnos que están aquí están familiarizados con ellos. Pero hoy les quiero hablar de *otros números*, y para ello les presentaré a nuestro primer héroe: Sir Willian Hamilton.

2. Hamilton y los Cuaternios

Willian Hamilton nació el 4 de agosto de 1805 en Dublín y destacó desde pequeño. A los cinco años ya sabía Latín, Griego y Hebreo, enseñados por un tío suyo, un reverendo. Estudió en el Trinity College de Dublín y a los 19 años había enviado su primer trabajo de investigación a la Academia Real Irlandesa. Antes de acabar su licenciatura, ya había sido nombrado astrónomo real del Observatorio de Dunsink en las afueras de Dublín, y también profesor de Astronomía del propio Trinity College. Desgraciadamente para él, durante esta época, su gran amor, Catherine, prefirió casarse con un pastor anglicano, que le podía ofrecer una vida más desahogada. Y es que ya sabemos que un profesor no es un gran partido.

Hamilton había descubierto en 1835, a la edad de 30 años, cómo tratar los números complejos como pares de números reales y, fascinado por la relación entre los números complejos y la geometría en dimensión 2, intentó durante muchos años extender los números complejos a un nuevo sistema de números de dimensión 3, que pudieran jugar un papel geométrico en el espacio, análogo al que desempeñan los números complejos en el plano. En lenguaje moderno, Hamilton buscaba un álgebra normada de dimensión 3 y hoy sabemos que no existen tales álgebras.

Al igual que un número complejo presenta la forma $a+bi$, Hamilton consideraba expresiones de la forma $a+bi+cj$, donde a, b y c son números reales, e i y j son dos unidades imaginarias. El problema que se le planteaba era el de cómo multiplicar estos nuevos números, o estas ternas (a, b, c) de números reales.

Hamilton recordaba posteriormente así, en una carta a su hijo Archibald escrita pocos meses antes de su muerte, acaecida el 2 de septiembre de 1865, el destello de inspiración que le llevó, el 16 de octubre de 1843, a su gran descubrimiento, tras muchos años de intentos inútiles:

> . . . Cada mañana en la primera mitad de ese mes (octubre de 1843), cuando bajaba a desayunar, tu hermano y tú me solíais preguntar: “¿Bueno, Papá, ya sabes multiplicar ternas?” Y yo tenía que responder, con un

> movimiento triste de la cabeza: "No, sólo sé sumarlas y restarlas".
>
> Pero el día 16 de ese mes –que era lunes, y día de Consejo en la Real Academia Irlandesa– estaba paseando hacia allí para asistir y presidir la reunión, y tu madre caminaba conmigo, a lo largo del Canal Real; y aunque ella me decía cosas aquí y allá, una línea de pensamiento se iba formando en mi mente, que por fin dio resultado, del cual inmediatamente comprendí la importancia. Pareció como si un circuito eléctrico se cerrara y saltara una chispa . . .

y continúa la carta describiendo el más famoso acto de gamberrismo matemático:

> No pude reprimir el impulso y grabé con una navaja en el Brougham Bridge (puente de Brougham), la fórmula fundamental con los símbolos i, j y k, . . . que contiene la solución del problema.

Esa idea genial que tuvo Hamilton durante ese paseo consistía en que, si deseaba contar con dos unidades imaginarias i y j, también debía añadir una tercera k: el producto de i y j.

Al día siguiente de su descubrimiento, Hamilton escribió una carta a su amigo John Graves en la que le decía:

> Una línea de especulación matemática muy curiosa se me ocurrió ayer, y sin duda la encontrarás interesante. Sabes que llevo mucho tiempo intentando una 'Teoría de Ternas' análoga a la 'Teoría de Pares' o a la representación geométrica de Mr. Warren de las cantidades imaginarias. Ahora creo que descubrí ayer una 'Teoría de *Cuaternios*', que incluye la 'Teoría de Ternas' buscada.

Y pasa a describir sus intentos vanos durante años de multiplicar ternas de varias formas, hasta llegar a la idea de la adjunción de una nueva unidad imaginaria:

> Y aquí amaneció sobre mí la noción de que debemos admitir, de algún modo, una cuarta dimensión del espacio para poder computar con ternas o, trasladando la paradoja al álgebra, debemos admitir una tercera unidad imaginaria k, que no debe de ser confundida con i ni con j, sino que es igual al producto de la primera por la segunda, y así nos vemos guiados a introducir los cuaternios, tales como $a + bi + cj + dk$ o cuaternas (a, b, c, d).

Hamilton definió pues un nuevo conjunto de números, los *cuaternios*, que se expresan de la forma $a + bi + cj + dk$, y forman un álgebra de dimensión 4 sobre los reales.

Hamilton sintió que su descubrimiento revolucionaría la Física Matemática y pasó el resto de su vida obsesionado con los cuaternios y sus aplicaciones. Buena parte de estas aplicaciones se deben a que todo cuaternio de longitud unidad representa un giro en el espacio de dimensión 3 y con dos cuaternios de longitud unidad se pueden representar los giros en dimensión 4. Si Hamilton levantara la cabeza, seguro que se alegraría de saber que, gracias a esto, hoy sus cuaternios se emplean hasta para diseñar videojuegos, como el de "Tomb Raider".

[Si me permiten un inciso frívolo, hace unos días discutía con un colega sobre el 'sex appeal' de los cuaternios. Si son ustedes tan escépticos como mi colega, piensen en Lara Croft, la protagonista de este videojuego.]

En las décadas siguientes al descubrimiento de los cuaternios, éstos tuvieron una gran aceptación. Por ejemplo, Maxwell los utilizó en sus ecuaciones del electromagnetismo y toda una escuela de "cuaternionistas" se desarrolló tras la muerte de Hamilton en 1865, liderada por Tait en Edimburgo y Peirce en Harvard. Sin embargo en 1888 Gibbs, en Yale, inventó la notación que empleamos hoy para el producto escalar y vectorial de vectores en el espacio euclídeo tridimensional y reescribió el tratado de Maxwell sobre electricidad y magnetismo, sin usar los cuaternios de modo explícito. A partir de entonces, los cuaternios perdieron esa aureola que habían tenido hasta entonces, y se podría decir que no regresan plenamente a la Física Fundamental hasta la segunda mitad del siglo XX. Hoy, sin embargo, los cuaternios, y sus generalizaciones sobre cuerpos arbitrarios, forman parte del paisaje habitual en el Álgebra, la Geometría o la Física.

Es más, el 16 de octubre de todos los años se celebra su cumpleaños con un "paseo de los cuaternios de Hamilton" que recorre, a las afueras de Dublín, el camino que hizo Hamilton con su esposa desde el observatorio de Dunsink, a lo largo del canal, hasta el puente de Brougham (o Broome), donde una placa recuerda el acontecimiento. En el 2002, el premio nobel de física Murray Gell-Mann participó en este paseo, y en el 2003 fue Andrew Wiles, famoso por su demostración del "Último Teorema de Fermat".

En esta excursión por distintos conjuntos de números, hemos pasado de los números reales a los complejos y de éstos a los cuaternios. En la primera extensión se mantienen las propiedades aritméticas, aunque se pierde el orden que presentan los reales, en el paso de complejos a cuaternios perdemos algo más: en los cuaternios no vale aquello de "el orden de los factores no altera el valor del producto". Dicho de otro modo, el álgebra de los cuaternios no es conmutativa.

3. octoniones

Pero hay más. Como hemos dicho, al día siguiente de su descubrimiento, Hamilton envió una carta a su amigo Graves. Éste responde el día 26 de octubre felicitándole, pero añade que hay algo que le desconcierta y es hasta qué punto se tiene libertad para añadir nuevas unidades imaginarias, y le pregunta: "Si con tu alquimia puedes crear tres libras de oro, ¿por qué pararse aquí?". Graves se puso a trabajar con esta idea y el 26 de diciembre del mismo año (1843) vuelve a escribir a Hamilton describiéndole un álgebra real de dimensión 8, que extiende la de los cuaternios, y que llamó las *octavas*, con propiedades parecidas a los cuaternios, en particular con la propiedad fundamental de que la longitud de un producto es el producto de longitudes. La idea de Graves es muy natural, si Hamilton al añadir la unidad imaginaria j, debía de añadir también la unidad k, que es el producto de i y j, entonces si se añade una nueva unidad l (una quinta dimensión al juego), también debemos de añadir las nuevas unidades il, jl y kl, hasta completar dimensión 8. En enero de 1844, Graves envió otras tres cartas a Hamilton desarrollando su idea y planteando la posibilidad de continuar con un álgebra de dimensión 16, pero no consiguió que se mantuviera la propiedad relativa al producto de longitudes. Y es que hoy sabemos que esta propiedad es específica de las dimensiones 1, 2, 4 y 8.

Hamilton se dio cuenta de que en el paso de los cuaternios a las octavas (u octoniones) se perdía otra propiedad: la asociatividad del producto. También se ofreció a publicar los descubrimientos de Graves, pero lo fue dejando dado que estaba muy ocupado con sus cuaternios.

Mientras tanto, el joven Arthur Cayley había estado pensando sobre los cuaternios desde que Hamilton anunció su existencia. De hecho se desplazó de Cambridge a Dublín para escuchar las primeras conferencias de Hamilton sobre los cuaternios. En marzo de 1845 publicó un trabajo en el que describía los *octoniones*, de manera independiente de Graves, cuyos resultados no habían sido publicados todavía. Aunque Hamilton corroboró más tarde que Graves ya conocía los octoniones desde las Navidades de 1843, fue demasiado tarde, a los octoniones se les conoce también como los *números de Cayley*.

Cayley se había licenciado en el Trinity College de Cambridge, y trabajó como abogado durante 14 años, aunque siempre consideró esta profesión como un modo de hacer dinero para poder dedicarse a las matemáticas sin penurias económicas. En estos 14 años publicó 250 trabajos matemáticos. Sin embargo, en 1863, a sus 42 años, aceptó una cátedra en matemáticas, lo que le supuso una disminución drástica de sus ingresos, pero la posibilidad de dedicarse completamente a la investigación matemática. Durante su vida publicó casi 900 trabajos.

Los octoniones no parecieron ofrecer aplicaciones a la Geometría o la Física, por lo que fueron castigados a un rincón, hasta que Élie Cartan describió con ellos en 1925 el fenómeno de la *trialdad*, que es la simetría existente entre vectores y espinores en dimensión 8. Su importancia en Física fue vislumbrada en un trabajo de Jordan, von Neumann y Wigner (este último fue premio nobel) sobre los fundamentos de la Mecánica Cuántica, pero después no hubo resultados relevantes, hasta que en los ochenta los físicos se dieron cuenta de que los octoniones podrían explicar algunas particularidades en Teoría de Cuerdas, y en eso están algunos de ellos. Como dice el profesor (y amigo) Susumu Okubo en un libro reciente:

> El dicho de que Dios es un matemático, de modo que incluso con poca evidencia experimental, una teoría matemática bonita tiene una gran probabilidad de ser correcta, se ha atribuido a Dirac. El álgebra de octoniones es ciertamente una entidad matemática preciosa y es posible que otras álgebras no asociativas (además, por supuesto, de las álgebras de Lie) puedan jugar un papel esencial en la Teoría Última, todavía por descubrir.

Además de su posible papel en Física, los octoniones son importantes porque explican muchísimas situaciones excepcionales en Álgebra y Geometría, como las álgebras y superálgebras de Lie simples excepcionales, planos proyectivos no desarguesianos, propiedades de las esferas unitarias en espacios euclídeos, y muchas más.

4. Epílogo

Quizá ahora sí que me comprendan un poco más cuando les recuerde que a la pregunta de en qué consiste mi investigación, la respuesta es a estudiar "otros números", entre los que están estos cuaternios y octoniones.

Espero no haber aburrido demasiado a los colegas que ya conocían algunas de estas historias, y también confío en haber convencido a los demás de que en matemáticas hay cosas muy interesantes por descubrir y estudiar. En este trabajo, como en todo empeño humano, hay ideas que surgen, se olvidan, reaparecen, y a veces hasta son útiles en las situaciones más insospechadas. Para este empeño hace falta tozudez, y los problemas pueden llegar a obsesionar (hasta el punto de no atender a lo que nos dice nuestra pareja en un paseo) pero, muy de vez en cuando, hay un puente pequeñito de Brougham esperándonos, en el que surge esa idea que falta, en el que ese circuito se cierra y saltan esas chispas que hacen que esta aventura con otros números, o con otros problemas matemáticos, sea apasionante.

Muchas gracias por su atención.