Otros números

Alberto Elduque

(olímpico de la XIV OME)

Universidad de Zaragoza

Cincuentenario de la Olimpiada Matemática Española

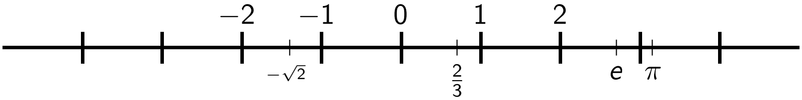
21 de noviembre de 2014

Números reales

Números reales

$$\mathbb{R} = \{\text{números reales}\}$$

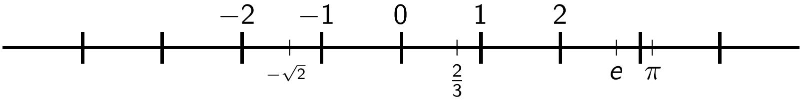
Los números reales son los que usamos para medir.



Números reales

$$\mathbb{R} = \{\text{números reales}\}$$

Los números reales son los que usamos para medir.



¡No podemos resolver ecuaciones tan sencillas como $X^2 + 1 = 0$!

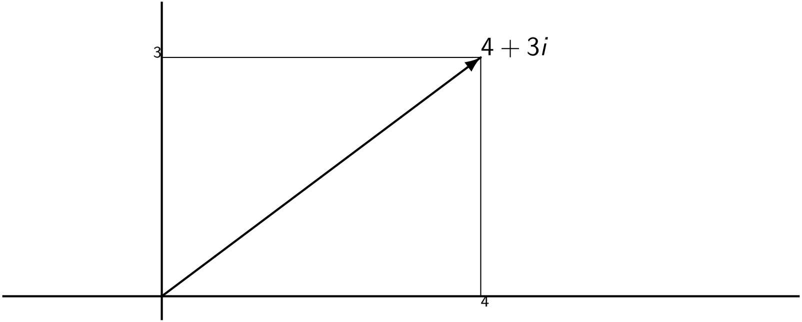
Números complejos

Números complejos

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \; (\simeq \mathbb{R}^2)$$

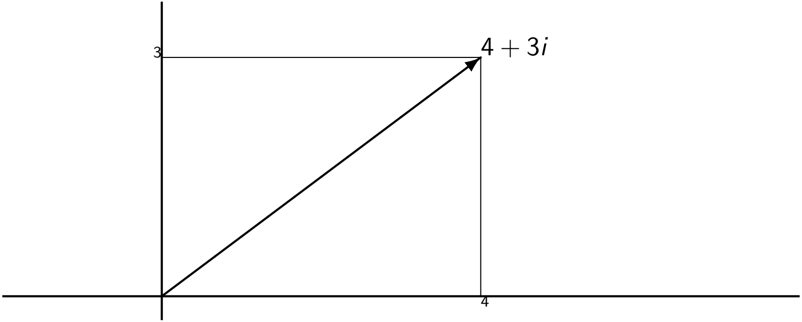
Números complejos

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \, (\simeq \mathbb{R}^2)$$



Números complejos

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}\,(\simeq \mathbb{R}^2)$$



$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Números complejos: propiedades

Ejercicio

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

($|.|$ denota la longitud usual.)

Números complejos: propiedades

Ejercicio

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

($|.|$ denota la longitud usual.)

Ejercicio

Giro de ángulo α en $\mathbb{R}^2 \leftrightarrow$ multiplicación por $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$.

Números complejos: propiedades

Ejercicio

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

($|.|$ denota la longitud usual.)

Ejercicio

Giro de ángulo α en $\mathbb{R}^2 \leftrightarrow$ multiplicación por $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$.

$$SO(2) \simeq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \simeq S^1$$

¿Un álgebra 3-dimensional?

¿Un álgebra 3-dimensional?

Hamilton se planteó un producto análogo al de los números complejos en dimensión 3, que respetara la "ley de los módulos" ($|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$):

¿Un álgebra 3-dimensional?

Hamilton se planteó un producto análogo al de los números complejos en dimensión 3, que respetara la "ley de los módulos" ($|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$):

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = ???$$

$$(\text{asumiendo } i^2 = -1 = j^2)$$

¿Un álgebra 3-dimensional?

Hamilton se planteó un producto análogo al de los números complejos en dimensión 3, que respetara la "ley de los módulos" ($|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$):

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = ???$$

$$(\text{asumiendo } i^2 = -1 = j^2)$$

Problema: $\quad$ ¿ij, $\quad ji$?

¿Un álgebra 3-dimensional?

Hamilton se planteó un producto análogo al de los números complejos en dimensión 3, que respetara la "ley de los módulos" ($|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$):

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = ???$$

$$(\text{asumiendo } i^2 = -1 = j^2)$$

Problema: ¿ij, ji?

Tras años de intentos, encontró la solución el 16 de octubre de 1843.

A spark flashed forth

Carta de Sir W. R. Hamilton a su hijo Rev. Archibald H. Hamilton, fechada el 5 de agosto de 1865:

MY DEAR ARCHIBALD -
(1) I had been wishing for an occasion of corresponding a little with you on QUATERNIONS: and such now presents itself, by your mentioning in your note of yesterday, received this morning, that you "have been reflecting on several points connected with them" (the quaternions), "particularly on the Multiplication of Vectors."

(2) No more important, or indeed fundamental question, in the whole Theory of Quaternions, can be proposed than that which thus inquires What is such MULTIPLICATION? What are its Rules, its Objects, its Results? What Analogies exist between it and other Operations, which have received the same general Name? And finally, what is (if any) its Utility?

A spark flashed forth

(3) If I may be allowed to speak of myself in connexion with the subject, I might do so in a way which would bring you in, by referring to an ante-quaternionic time, when you were a mere child, but had caught from me the conception of a Vector, as represented by a Triplet: and indeed I happen to be able to put the finger of memory upon the year and month - October, 1843 - when having recently returned from visits to Cork and Parsonstown, connected with a meeting of the British Association, the desire to discover the laws of the multiplication referred to regained with me a certain strength and earnestness, which had for years been dormant, but was then on the point of being gratified, and was occasionally talked of with you. Every morning in the early part of the above-cited month, on my coming down to breakfast, your (then) little brother William Edwin, and yourself, used to ask me, "Well, Papa, can you multiply triplets"? Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: "No, I can only add and subtract them."

A spark flashed forth

(4) But on the 16th day of the same month - which happened to be a Monday, and a Council day of the Royal Irish Academy - I was walking in to attend and preside, and your mother was walking with me, along the Royal Canal, to which she had perhaps driven; and although she talked with me now and then, yet an under-current of thought was going on in my mind, which gave at last a result, whereof it is not too much to say that I felt at once the importance. An electric circuit seemed to close; and a spark flashed forth, the herald (as I foresaw, immediately) of many long years to come of definitely directed thought and work, by myself if spared, and at all events on the part of others, if I should even be allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery.

A spark flashed forth

Nor could I resist the impulse -unphilosophical as it may have been- to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge[1], as we passed it, the fundamental formula with the symbols, i, j, k; namely,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

which contains the Solution of the Problem, but of course, as an inscription, has long since mouldered away. A more durable notice remains, however, on the Council Books of the Academy for that day (October 16th, 1843), which records the fact, that I then asked for and obtained leave to read a Paper on Quaternions, at the First General Meeting of the session: which reading took place accordingly, on Monday the 13th of the November following.
With this quaternion of paragraphs I close this letter I.; but I hope to follow it up very shortly with another.
Your affectionate father, WILLIAM ROWAN HAMILTON.

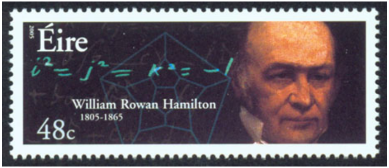
[1] El nombre correcto del puente es Broome

$\mathbb{H}$

$\mathbb{H}$

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k,$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k,$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$



Hamilton y sus cuaterniones

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
- $\mathbb{H}$ es álgebra de división asociativa (pero no conmutativa).
  Por tanto $S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ es un grupo (de Lie).
  (Esto implica inmediatamente que S^3 es paralelizable.)

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

- $|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$
  $(|a + bi + cj + dk|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

- $\mathbb{H}$ es álgebra de división asociativa (pero no conmutativa). Por tanto $S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ es un grupo (de Lie). (Esto implica inmediatamente que S^3 es paralelizable.)

- $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \simeq \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$, y $\forall u, v \in \mathbb{H}_0$:

$$uv = -u \cdot v + u \times v$$

  (donde $u \cdot v$ y $u \times v$ denotan el producto escalar y vectorial usuales).

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

- $\forall q = a1 + u \in \mathbb{H}$, $q^2 = (a^2 - u \cdot u) + 2au$, luego

$$q^2 - (2a)q + |q|^2 = 0 \qquad (\mathbb{H} \text{ es cuadrática})$$

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

- $\forall q = a1 + u \in \mathbb{H}$, $q^2 = (a^2 - u \cdot u) + 2au$, luego
$$q^2 - (2a)q + |q|^2 = 0 \qquad (\mathbb{H} \text{ es cuadrática})$$
- La aplicación $q = a + u \mapsto \bar{q} = a - u$ es una involución, con $q + \bar{q} = 2a$ y $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$.

Algunas propiedades de $\mathbb{H}$

- $\forall q = a1 + u \in \mathbb{H}$, $q^2 = (a^2 - u \cdot u) + 2au$, luego
$$q^2 - (2a)q + |q|^2 = 0 \qquad (\mathbb{H} \text{ es cuadrática})$$

- La aplicación $q = a + u \mapsto \bar{q} = a - u$ es una involución, con $q + \bar{q} = 2a$ y $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$.

- $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ es $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 2. La multiplicación viene dada por:
$$(p_1 + p_2 j)(q_1 + q_2 j) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2) + (q_2 p_1 + p_2 \bar{q}_1)j$$

Giros en el espacio

Giros en el espacio

$$q \in \mathbb{H},\ |q| = 1 \ \Rightarrow \exists \alpha \in [0, \pi],\ u \in \mathbb{H}_0,\ |u| = 1$$
$$\text{tales que } q = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$$

$$q \in \mathbb{H},\ |q| = 1 \ \Rightarrow \exists \alpha \in [0, \pi],\ u \in \mathbb{H}_0,\ |u| = 1$$
$$\text{tales que } q = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$$

Tomamos $v \in \mathbb{H}_0$ de norma 1 y ortogonal a u, de modo que $\{u, v, u \times v\}$ es una base ortonormal orientada positivamente de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{H}_0$.

$$q \in \mathbb{H},\ |q| = 1 \ \Rightarrow \exists \alpha \in [0, \pi],\ u \in \mathbb{H}_0,\ |u| = 1$$
$$\text{tales que } q = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$$

Tomamos $v \in \mathbb{H}_0$ de norma 1 y ortogonal a u, de modo que $\{u, v, u \times v\}$ es una base ortonormal orientada positivamente de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{H}_0$.

Consideramos la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} \varphi_q : \mathbb{H}_0 &\longrightarrow \mathbb{H}_0, \\ x &\mapsto qxq^{-1} = qx\bar{q}. \end{aligned}$$

Matriz coordenada de φ_q

Matriz coordenada de φ_q

$$\varphi_q(u) = quq^{-1} = u \qquad \text{(porque } uq = qu\text{)},$$

$$\varphi_q(u) = quq^{-1} = u \qquad (\text{porque } uq = qu),$$

$$\begin{aligned}
\varphi_q(v) &= \big((\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u\big)v((\cos\alpha)1 - (\operatorname{sen}\alpha)u) \\
&= \big((\cos\alpha)v + (\operatorname{sen}\alpha)u \times v\big)((\cos\alpha)1 - (\operatorname{sen}\alpha)u) \\
&= (\cos^2\alpha)v + 2(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)u \times v - (\operatorname{sen}^2\alpha)(u \times v) \times u \\
&= (\cos 2\alpha)v + (\operatorname{sen} 2\alpha)u \times v,
\end{aligned}$$

Matriz coordenada de φ_q

$$\varphi_q(u) = quq^{-1} = u \qquad \text{(porque } uq = qu\text{)},$$

$$\begin{aligned}
\varphi_q(v) &= \big((\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u\big)v((\cos\alpha)1 - (\operatorname{sen}\alpha)u) \\
&= \big((\cos\alpha)v + (\operatorname{sen}\alpha)u \times v\big)((\cos\alpha)1 - (\operatorname{sen}\alpha)u) \\
&= (\cos^2\alpha)v + 2(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)u \times v - (\operatorname{sen}^2\alpha)(u \times v) \times u \\
&= (\cos 2\alpha)v + (\operatorname{sen} 2\alpha)u \times v,
\end{aligned}$$

$$\varphi_q(u \times v) = \ldots = -(\operatorname{sen} 2\alpha)v + (\cos 2\alpha)u \times v.$$

Matriz coordenada de φ_q

Matriz coordenada de φ_q

Luego la matriz coordenada de φ_q en la base $\{u, v, u \times v\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\operatorname{sen} 2\alpha \\ 0 & \operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix},$$

Matriz coordenada de φ_q

Luego la matriz coordenada de φ_q en la base $\{u, v, u \times v\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\operatorname{sen} 2\alpha \\ 0 & \operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix},$$

φ_q es el giro de eje $\mathbb{R}^+ u$ y ángulo 2α

$SO(3)$

$SO(3)$

La aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} &\longrightarrow SO(3), \\ q \quad &\mapsto \quad \varphi_q \end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \varphi = \{\pm 1\}$:

$SO(3)$

La aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} &\longrightarrow SO(3), \\ q \quad &\mapsto \quad \varphi_q \end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \varphi = \{\pm 1\}$:

$$S^3/_{\{\pm 1\}} \simeq SO(3)$$

$SO(3)$

La aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : S^3 \simeq \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} &\longrightarrow SO(3), \\ q \quad &\mapsto \quad \varphi_q \end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \varphi = \{\pm 1\}$:

$$S^3/_{\{\pm 1\}} \simeq SO(3)$$

(S^3 es la cubierta universal de $SO(3)$)

Giros en el espacio

Giros en el espacio

Giros en el espacio $\longleftrightarrow$ Conjugación en $\mathbb{H}_0$ por cuaterniones de norma 1 "módulo ± 1"

Giros en el espacio

Giros en el espacio $\longleftrightarrow$ Conjugación en $\mathbb{H}_0$ por cuaterniones de norma 1 "módulo ± 1"

¡Es muy fácil componer giros en el espacio!

¡Basta multiplicar cuaterniones de norma unidad! ($\varphi_p \circ \varphi_q = \varphi_{pq}$)

Giros en el espacio

Giros en el espacio $\longleftrightarrow$ Conjugación en $\mathbb{H}_0$ por cuaterniones de norma 1 "módulo ± 1"

¡Es muy fácil componer giros en el espacio!

¡Basta multiplicar cuaterniones de norma unidad! ($\varphi_p \circ \varphi_q = \varphi_{pq}$)

Ahora se pueden deducir fácilmente las fórmulas de Olinde Rodrigues (1840) para la composición de giros.

Giros en $\mathbb{R}^4$

Giros en $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ con $|p| = 1$, la multiplicación a izquierda L_p (o derecha R_p) por p es una isometría, debido a la propiedad multiplicativa de la norma.

Giros en $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ con $|p| = 1$, la multiplicación a izquierda L_p (o derecha R_p) por p es una isometría, debido a la propiedad multiplicativa de la norma.
- Si $p = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$, $(\alpha \in [0, \pi]$, $u \in \mathbb{H}_0$, $|u| = 1)$, sabemos que $p^2 - 2(\cos\alpha)p + 1 = 0$, luego el polinomio mínimo de la multiplicación por p es $X \pm 1$ is $p = \mp 1$, o el polinomio irreducible $X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1$ en otro caso.

Giros en $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ con $|p| = 1$, la multiplicación a izquierda L_p (o derecha R_p) por p es una isometría, debido a la propiedad multiplicativa de la norma.
- Si $p = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$, ($\alpha \in [0, \pi]$, $u \in \mathbb{H}_0$, $|u| = 1$), sabemos que $p^2 - 2(\cos\alpha)p + 1 = 0$, luego el polinomio mínimo de la multiplicación por p es $X \pm 1$ is $p = \mp 1$, o el polinomio irreducible $X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1$ en otro caso.
- Por tanto el polinomio característico de la multiplicación por p es siempre
$$\left(X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1\right)^2$$
y, en particular, el determinante de la multiplicación por p es 1.

Giros en $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ con $|p| = 1$, la multiplicación a izquierda L_p (o derecha R_p) por p es una isometría, debido a la propiedad multiplicativa de la norma.
- Si $p = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$, ($\alpha \in [0, \pi]$, $u \in \mathbb{H}_0$, $|u| = 1$), sabemos que $p^2 - 2(\cos\alpha)p + 1 = 0$, luego el polinomio mínimo de la multiplicación por p es $X \pm 1$ is $p = \mp 1$, o el polinomio irreducible $X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1$ en otro caso.
- Por tanto el polinomio característico de la multiplicación por p es siempre
$$\left(X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1\right)^2$$
y, en particular, el determinante de la multiplicación por p es 1.

Giros en $\mathbb{R}^4$

- $\forall p \in \mathbb{H}$ con $|p| = 1$, la multiplicación a izquierda L_p (o derecha R_p) por p es una isometría, debido a la propiedad multiplicativa de la norma.
- Si $p = (\cos\alpha)1 + (\operatorname{sen}\alpha)u$, ($\alpha \in [0, \pi]$, $u \in \mathbb{H}_0$, $|u| = 1$), sabemos que $p^2 - 2(\cos\alpha)p + 1 = 0$, luego el polinomio mínimo de la multiplicación por p es $X \pm 1$ is $p = \mp 1$, o el polinomio irreducible $X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1$ en otro caso.
- Por tanto el polinomio característico de la multiplicación por p es siempre
$$\left(X^2 - 2(\cos\alpha)X + 1\right)^2$$
y, en particular, el determinante de la multiplicación por p es 1.

Las multiplicaciones por cuaterniones de norma 1 son rotaciones de $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$.

Giros en $\mathbb{R}^4$

Giros en $\mathbb{R}^4$

- Si ψ es un giro de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$, $a = \psi(1)$ es un elemento de norma 1 de $\mathbb{H}$, y

$$L_{\bar{a}} \circ \psi(1) = \bar{a}a = |a|^2 = 1,$$

luego $L_{\bar{a}} \circ \psi$ es en realidad un giro de $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}_0$.

Giros en $\mathbb{R}^4$

- Si ψ es un giro de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$, $a = \psi(1)$ es un elemento de norma 1 de $\mathbb{H}$, y

  $$L_{\bar{a}} \circ \psi(1) = \bar{a}a = |a|^2 = 1,$$

  luego $L_{\bar{a}} \circ \psi$ es en realidad un giro de $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}_0$.

- Por tanto, existe un $q \in \mathbb{H}$ de norma 1, tal que

  $$\bar{a}\psi(x) = qxq^{-1}$$

  para todo $x \in \mathbb{H}$. Esto es:

  $$\psi(x) = (aq)xq^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{H}.$$

$SO(4)$

$SO(4)$

La aplicación

$$\begin{aligned}\Psi : S^3 \times S^3 &\longrightarrow SO(4), \\ (p, q) &\mapsto \psi_{p,q} \ (x \mapsto pxq^{-1})\end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \Psi = \{\pm(1, 1)\}$.

La aplicación

$$\begin{aligned}\Psi : S^3 \times S^3 &\longrightarrow SO(4), \\ (p, q) &\mapsto \psi_{p,q}\ (x \mapsto pxq^{-1})\end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \Psi = \{\pm(1, 1)\}$.

$$S^3 \times S^3 /_{\{\pm(1,1)\}} \simeq SO(4)$$

$SO(4)$

La aplicación

$$\begin{aligned}\Psi : S^3 \times S^3 &\longrightarrow SO(4),\\ (p,q) &\mapsto \psi_{p,q}\ (x \mapsto pxq^{-1})\end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo de grupos (de Lie) con $\ker \Psi = \{\pm(1,1)\}$.

$$S^3 \times S^3/_{\{\pm(1,1)\}} \simeq SO(4)$$

(De donde se deduce $\quad SO(3) \times SO(3) \simeq PSO(4)$)

Giros en $\mathbb{R}^4$

Giros en $\mathbb{R}^4$

¡Es muy fácil componer giros en el espacio de dimensión 4!

¡Basta multiplicar pares de cuaterniones de norma unidad!
$(\psi_{p_1,q_1} \circ \psi_{p_2,q_2} = \psi_{p_1 p_2, q_1 q_2})$

Giros en $\mathbb{R}^4$

¡Es muy fácil componer giros en el espacio de dimensión 4!

¡Basta multiplicar pares de cuaterniones de norma unidad!
$(\psi_{p_1,q_1} \circ \psi_{p_2,q_2} = \psi_{p_1 p_2, q_1 q_2})$

Ejercicio

¿Qué tipo de rotación es $\psi_{p,q}$ si $p + \bar{p} = 2\cos\alpha$ y $q + \bar{q} = 2\cos\beta$?

Giros en $\mathbb{R}^4$

¡Es muy fácil componer giros en el espacio de dimensión 4!

¡Basta multiplicar pares de cuaterniones de norma unidad! $(\psi_{p_1,q_1} \circ \psi_{p_2,q_2} = \psi_{p_1 p_2, q_1 q_2})$

Ejercicio

¿Qué tipo de rotación es $\psi_{p,q}$ si $p + \bar{p} = 2\cos\alpha$ y $q + \bar{q} = 2\cos\beta$?

Solución: Es un "doble giro" de ángulos $\alpha + \beta$ y $\alpha - \beta$.

Octoniones (1843-1845)

> *There is still something in the system which gravels me. I have not yet any clear views as to the extent to which we are at liberty arbitrarily to create imaginaries, and to endow them with supernatural properties.*
>
> *If with your alchemy you can make three pounds of gold, why should you stop there?*

(Carta de John T. Graves a Hamilton, fechada el ¡26 de octubre de 1843!)

Octoniones (1843-1845)

Octoniones (1843-1845)

Los cuaterniones se obtienen duplicando adecuadamente los complejos:

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j.$$

Octoniones (1843-1845)

Los cuaterniones se obtienen duplicando adecuadamente los complejos:

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j.$$

Duplicando de nuevo se obtienen los octoniones (Graves – Cayley):

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l.$$

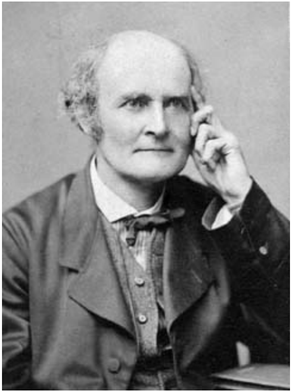
Octoniones (1843-1845)

Los cuaterniones se obtienen duplicando adecuadamente los complejos:

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j.$$

Duplicando de nuevo se obtienen los octoniones (Graves – Cayley):

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l.$$



Arthur Cayley

Octoniones

Octoniones

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$$

Octoniones

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$$

con producto

$$(p_1 + p_2 l)(q_1 + q_2 l) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2) + (q_2 p_1 + p_2 \bar{q}_1) l$$

Octoniones

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$$

con producto

$$(p_1 + p_2 l)(q_1 + q_2 l) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2) + (q_2 p_1 + p_2 \bar{q}_1) l$$

y norma:

$$|p_1 + p_2 l|^2 = |p_1|^2 + |p_2|^2$$

Octoniones

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l = \mathbb{R}\langle 1, i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$$

con producto

$$(p_1 + p_2 l)(q_1 + q_2 l) = (p_1 q_1 - \bar{q}_2 p_2) + (q_2 p_1 + p_2 \bar{q}_1) l$$

y norma:

$$|p_1 + p_2 l|^2 = |p_1|^2 + |p_2|^2$$

¡Son las mismas fórmulas que permiten pasar de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$!

Algunas propiedades algebraicas

- $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{O}$.
- $\mathbb{O}$ es álgebra de división no conmutativa y ¡no asociativa!.
  Pero es *alternativa*: cada dos elementos generan una subálgebra asociativa.
  Theorem (Zorn 1933): Las únicas álgebras de división reales alternativas de dimensión finita son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

  Las únicas asociativas son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ (Frobenius 1877).
- $S^7 \simeq \{x \in \mathbb{O} : |x| = 1\}$ no es grupo (falla la asociatividad), pero es el ejemplo más importante de *lazo de Moufang*.
- $\mathbb{O}_0 = \mathbb{R}\langle i, j, k, l, il, jl, kl \rangle$. $\forall u, v \in \mathbb{O}_0$:

  $$uv = -u \cdot v + u \times v.$$

  (¡Producto vectorial en $\mathbb{R}^7$!: $(u \times v) \times v = (u \cdot v)v - (v \cdot v)u$.)
- $\mathbb{O}$ es *cuadrática*: $\forall x = a1 + u \in \mathbb{O}$, $x^2 - 2ax + |x|^2 = 0$.

Algunas propiedades geométricas

- Los grupos $Spin_7$ y $Spin_8$ (cubiertas universales de $SO(7)$ y $SO(8)$) pueden ser descritos fácilmente en términos de productos de octoniones.
- $\mathbb{O}$ de división $\Rightarrow S^7$ es paralelizable.
  S^1, S^3 y S^7 son las únicas esferas paralelizables (Milnor y Kervaire).
- $S^6 \simeq \{x \in \mathbb{O}_0 : |x| = 1\}$ tiene una *estructura casi compleja* heredada de la multiplicación de octoniones.
  S^2 y S^6 son las únicas esferas con tal estructura (Adams).
- *Plano proyectivo no desarguesiano* $\mathbb{OP}^2$.
- Las únicas esferas que aparecen como espacios homogéneos de grupos no clásicos son $S^6 = \operatorname{Aut}\mathbb{O}/SU(3)$,
  $S^7 = Spin_7/\operatorname{Aut}\mathbb{O}$ y $S^{15} = Spin_9/Spin_7$.

¡$\mathbb{O}$ es ciertamente un objeto matemático bonito!

¡$\mathbb{O}$ es ciertamente un objeto matemático bonito!

The saying that God is the mathematician, so that, even with meager experimental support, a mathematically beautiful theory will ultimately have a greater chance of being correct, has been attributed to Dirac. Octonion algebra may surely be called a beautiful mathematical entity.

It is possible that this and other non-associative algebras (other than Lie algebras) may play some essential future role in the ultimate theory, yet to be discovered.

(Susumu Okubo)

¡$\mathbb{O}$ es ciertamente un objeto matemático bonito!

The saying that God is the mathematician, so that, even with meager experimental support, a mathematically beautiful theory will ultimately have a greater chance of being correct, has been attributed to Dirac. Octonion algebra may surely be called a beautiful mathematical entity.

It is possible that this and other non-associative algebras (other than Lie algebras) may play some essential future role in the ultimate theory, yet to be discovered.

(Susumu Okubo)

Gracias