Primera parte: Algebras asociativas

1. Sea R una Φ–álgebra unitaria y sean a y b dos elementos de R.
   i) Prueba que si $1-ab$ tiene inverso a izquierda, también $1-ba$ lo tiene.
   ii) Prueba que si a tiene inverso a derecha pero no a izquierda, entonces tiene infinitos inversos a derecha.

2. Dada una Φ–álgebra R, calcula el centro de $\mathrm{Mat}_n(R)$ y prueba que si R es unitaria, $Z(\mathrm{Mat}_n(R)) = \{rI_n : r \in Z(R)\}$.

3. Sea p un número primo.
   i) Prueba que todo anillo con p^2 elementos y unitario es conmutativo.
   ii) Prueba que existen anillos no conmutativos y no unitarios con p^2 elementos.
   iii) Prueba que existen anillos unitarios y no conmutativos con p^3 elementos.

4. Sea R una Φ–álgebra con identidad a izquierda e (es decir, $ea = a\ \forall a \in R$).
   i) Muestra que e no tiene por qué ser identidad a derecha.
   ii) Prueba que si e es la única identidad a izquierda de R, entonces también lo es a derecha (esto es, R es unitaria y $e = 1$).

5. Sea R una Φ-álgebra unitaria, $\alpha : R \to R$ un homomorfismo "unitario" (esto es, $\alpha(1) = 1$) y $\delta : R \to R$ una *α-derivación*. Es decir, $\forall a, b \in R$, $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$.

   En el anillo de polinomios usual $R[X]$ definimos un nuevo producto asociativo determinado mediante
   $$X^iX^j = X^{i+j}, \qquad Xa = \alpha(a)X + \delta(a),$$
   $\forall a \in R$ y denotamos por $R[X; \alpha, \delta]$ el álgebra resultante.

   Prueba que $R[X; \alpha, \delta]$ es efectivamente una Φ–álgebra. Como hacerlo de modo directo es un jaleo imponente, procede del modo siguiente: considera la Φ–subálgebra S de $\mathrm{End}_\Phi(R[X])$ generada por los endomorfismos λ_r ($r \in R$) y φ, donde $\lambda_r(\sum a_iX^i) = \sum ra_iX^i$ y
   $$\varphi(\sum a_iX^i) = \sum\big(\alpha(a_i)X^{i+1} + \delta(a_i)X^i\big),$$
   y el homomorfismo de Φ–módulos $\rho : R[X; \alpha, \delta] \longrightarrow S$ dado por $\rho(\sum a_iX^i) = \sum \lambda_{a_i} \circ \varphi^i$. Comprueba que ρ es un isomorfismo de Φ–módulos y que la multiplicación en $R[X; \alpha, \delta]$ se corresponde por ρ con la multiplicación en S.

6. Considera la $\mathbb{R}$–álgebra $A = \mathbb{C}[X; \sigma, \delta]$, donde σ es la conjugación compleja y $\delta = 0$.
   i) Prueba que $Z(A) = \mathbb{R}[X^2]$.
   ii) Prueba que $A/A(X^2 + 1) \cong \mathbb{H}$.
   iii) Prueba que $A/A(X^4 + 1) \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$.

---

[5] Un caso particular interesante de esta construcción es el llamado *plano cuántico* $F_q[X, Y]$, $q \in F^\times$, que es la F-álgebra de polinomios $F[X, Y]$, pero con la nueva multiplicación asociativa determinada por $XY = qYX$ (esto es, $R = F[Y]$, $\alpha(Y) = qY$ y $\delta = 0$). Otro caso particular es la llamada *álgebra de Weyl* $A_1(F)$, que es el álgebra $R[X; Id, \delta]$, con $R = F[Y]$ y $\delta(Y) = 1$, esto es, δ es la derivada usual de los polinomios en la variable Y. Si $F = \mathbb{R}$, se puede sumergir $A_1(\mathbb{R})$ en el álgebra de endomorfismos del espacio vectorial de las funciones reales de variable real infinitamente derivables, de modo que X se convierte en el endomorfismo $f(t) \mapsto f'(t)$, e Y en el endomorfismo $f(t) \mapsto tf(t)$. Comprueba que esto funciona bien.

[6] Para iii) utiliza el homomorfismo inducido por $\varphi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix}$ y $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Módulos irreducibles. Radical de Jacobson

7. Sean R una Φ–álgebra, M y N dos R–módulos a izquierda y $f : M \to N$ un homomorfismo no nulo. Prueba que:
 i) si M es irreducible, f es un monomorfismo,
 ii) si N es irreducible, f es un epimorfismo.

8. Encuentra todos los módulos irreducibles a izquierda, salvo isomorfismos, de las siguientes álgebras:
 i) la $\mathbb{C}$–álgebra $\mathbb{C}[X]$,
 ii) la F–álgebra $R = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in F \right\}$ (subálgebra de $\mathrm{Mat}_2(F)$), donde F es un cuerpo.

9. Sea R un dominio de integridad con cuerpo de fracciones Q. Prueba que $\mathrm{End}_R(Q) \cong Q$, pero Q no es un R–módulo irreducible (salvo en el caso trivial en que $R = Q$).

10. Sea R una Φ–álgebra primitiva a izquierda con centro $Z(R) \neq 0$. Prueba que $\forall 0 \neq a \in Z(R)$ y $\forall 0 \neq b \in R$, $ab \neq 0 \neq ba$. En particular, prueba que si R es unitaria, $Z(R)$ es un dominio de integridad.

11. Sea R un dominio de integridad con cuerpo de fracciones Q, sea V un espacio vectorial sobre Q con base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$ (numerable) y sea A el subanillo de $\mathrm{End}_Q(V)$ formado por los endomorfismos $f : V \to V$ tales que existen $a \in R$ y $n \in \mathbb{N}$ con $f(v_i) = av_i$ $\forall i > n$ y $f(Qv_1 + \cdots + Qv_n) \subseteq Qv_1 + \cdots + Qv_n$.
 Prueba que A es denso sobre V y que $Z(A) \cong R$.

12. Sea D un álgebra de división y V un D–espacio vectorial a derecha de dimensión finita n. Si $V^* = \mathrm{Hom}_D(V, D)$ es el 'dual' de V, prueba que V^* es un D–espacio vectorial *a izquierda* y que su dimensión también es n.

13. Sea D un álgebra de división y V un D–espacio vectorial a derecha. Sea R una subálgebra de $\mathrm{End}_D(V)$ que actúa densamente sobre V. Si S es un subconjunto de R, su anulador es $\mathrm{ann}(S) = \{v \in V : rv = 0 \ \forall r \in S\}$, y si $W \subseteq V$ su anulador es $\mathrm{ann}(W) = \{r \in R : rv = 0 \ \forall v \in W\}$. Prueba que si W es un subespacio vectorial de V de dimensión finita, entonces $\mathrm{ann}(\mathrm{ann}(W)) = W$.

14. Sea D un álgebra de división y V un D–espacio vectorial a derecha. Prueba que la familia de subconjuntos de $\mathrm{End}_D(V)$:

$$\mathcal{F} = \{O(f; u_1, \ldots, u_r) : f \in \mathrm{End}_D(V),\ r \in \mathbb{N},\ u_1, \ldots, u_r \in V\},$$

 donde

$$O(f; u_1, \ldots, u_r) = \{g \in \mathrm{End}_D(V) : g(u_i) = f(u_i) \ \forall i = 1, \ldots, r\},$$

 es una base de abiertos de una topología (llamada *topología finita*). Si R es una subálgebra de $\mathrm{End}_D(V)$, prueba que R es densa sobre V si y sólo si R es un subconjunto denso de $\mathrm{End}_D(V)$ en la topología finita.

---

[9] Por tanto, el recíproco del Lema de Schur no es cierto.

[11] Luego cualquier dominio de integridad aparece como centro de algún anillo primitivo.

15. Sea D un álgebra de división y V un D–espacio vectorial a derecha. Si R es una subálgebra de $\mathrm{End}_D(V)$ e I es un ideal no nulo de R, prueba que R es densa sobre V si y sólo si así es I.

16. Sea R una Φ–álgebra, $\forall a, b \in R$ se define $a \circ b = a + b - ab$.
  i) Prueba que $(R, \circ)$ es un monoide (esto es, que $\circ$ es asociativa y tiene elemento neutro).
  ii) Prueba que la aplicación
$$\begin{aligned}(R, \circ) &\to (R^\sharp, \cdot)\\ a &\mapsto 1 - a\end{aligned}$$
  es un homomorfismo de monoides.
  iii) Un elemento $a \in R$ se dice *casirregular* (a izquierda) si tiene inverso (a izquierda) en $(R, \circ)$. Prueba que si $a, b \in R$ y ab es casirregular a izquierda, así es ba.
  iv) Un subconjunto $S \subseteq R$ se dice casirregular a izquierda o derecha si así es cada elemento suyo. Prueba que si I es un ideal a izquierda de R y es casirregular a izquierda, también es casirregular a derecha.
  v) Prueba que $J(R) = \{a \in R : Ra \text{ es casiregular}\}$.

17. Prueba que el radical de Jacobson de una Φ–álgebra es independiente de considerar ésta como Φ–álgebra o como anillo ($\mathbb{Z}$–álgebra).

18. Dada una Φ–álgebra R, prueba que $J(R)$ es la intersección de los ideales a izquierda maximales y modulares.

19. Si R es una Φ–álgebra e I es un ideal maximal a izquierda de R tal que $I + R^2 = R$, ¿se puede deducir que I es modular?

20. Dada una Φ–álgebra R, se define su *radical de Brown–McCoy* como la intersección de los ideales maximales M de R tales que existe $e \in R$ con $ex - x \in M$ y $xe - x \in M$ $\forall x \in R$. Lo denotaremos $BM(R)$. Prueba que $J(R) \subseteq BM(R)$.

21. Sea R una Φ–álgebra y $0 \neq e = e^2 \in R$. Prueba que $J(eRe) = eJ(R)e$. Prueba también que si R es primitiva a izquierda, así es eRe.

22. Sea G un grupo finito. Para todo elemento $g \in G$, sea $C_G(g) = \{x \in g : xg = gx\}$ su centralizador. Prueba que G es abeliano si y sólo si existe un número natural q y para cada $g \in G$ un número natural $n(g)$ tal que $|C_G(g)| = q^{n(g)} - 1$.

23. Prueba que si R es una Φ–álgebra semiprima, $0 \neq x \in R$ y Rx es un ideal minimal a izquierda de R, entonces xR es un ideal minimal a derecha de R.

24. Dado un par dual (V, W) sobre un álgebra de división D, determina los ideales a izquierda y a derecha minimales de cualquier álgebra R tal que $\mathcal{S}(V, W) \leq R \leq \mathcal{L}(V, W)$.

---

[19] Usa el anillo no conmutativo que tienes con p^2 elementos.

[22] Considera la ecuación de clases como en la demostración del Teorema Pequeño de Wedderburn.

[23] $Rx = Re$ para algún idempotente e. Muestra que eR es minimal y que xR es una imagen homomorfa de eR.

2. Módulos completamente reducibles. Álgebras semisimples.

25. Prueba que el $\mathbb{Z}$–módulo $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ no es completamente reducible, y lo mismo para el $\mathbb{Q}[X]$–módulo $\mathbb{Q}^2$, donde la acción de X viene dada por $Xe_1 = 0$ y $Xe_2 = e_1$, siendo $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{Q}^2$. Deduce que ni $\mathbb{Z}$ ni $\mathbb{Q}[X]$ son álgebras semisimples.

26. Dada una Φ–álgebra R y unos R–módulos irreducibles no isomorfos entre sí: W, V_1, $\dots$, V_r, prueba que:
 i) Si
$$V = n_1V_1 \oplus \cdots \oplus n_rV_r = (V_1 \oplus \overset{n_1}{\cdots} \oplus V_1) \oplus \cdots \oplus (V_r \oplus \overset{n_r}{\cdots} \oplus V_r),$$
 entonces
$$\mathrm{End}_R(V) \cong \mathrm{End}_R(n_1V_1) \times \cdots \times \mathrm{End}_R(n_rV_r).$$
 ii) Si $D = \mathrm{End}_R(W)$ (que es álgebra de división por el Lema de Schur), entonces
$$\mathrm{End}_R(nW) \cong \mathrm{Mat}_n(D).$$

27. Si R es una Φ–álgebra semisimple, prueba que $\mathrm{Mat}_n(R)$ también es semisimple.

28. Sea R una Φ–álgebra semisimple e I un ideal de R. Prueba que:
 i) $I = I^2$.
 ii) Existe $J \lhd R$ con $R = I \oplus J$.
 iii) R/I también es semisimple.

29. Prueba que el centro de un álgebra semisimple es un producto finito de cuerpos.

30. Dada una Φ–álgebra semisimple R, prueba que:
 i) Si $a, b \in R$ y $ab = 1$, también $ba = 1$ (las álgebras que verifican esta propiedad se dicen "finitas en el sentido de Dedekind").
 ii) Si $a \in R$ verifica que Ra es un ideal bilátero, entonces $Ra = aR$.
 iii) Todo elemento de R se puede poner como producto de una unidad por un idempotente.

31. Prueba que una Φ–álgebra es regular von Neumann si y sólo si $IJ = I \cap J$ para todo ideal a derecha I e ideal a izquierda J.

32. Si S es un subconjunto de una Φ–álgebra R, se definen sus anuladores a izquierda y derecha como
$$\mathrm{ann}_{\mathrm{izda}}(S) = \{x \in R : xS = 0\}, \qquad \mathrm{ann}_{\mathrm{dcha}}(S) = \{x \in R : Sx = 0\}.$$
 Prueba que si R es álgebra semisimple e I es un ideal a izquierda, entonces
$$I = \mathrm{ann}_{\mathrm{izda}}\big(\mathrm{ann}_{\mathrm{dcha}}(I)\big).$$
 Comprueba que el resultado sigue siendo válido si sólo asumes que R es regular von Neumann y que I es un ideal a izquierda finitamente generado.

---

30 Reduce al caso en que $R = \mathrm{Mat}_n(D)$.

32 $I = Re$ con $e = e^2$. Prueba ahora que $\mathrm{ann}_{\mathrm{dcha}}(I) = (1 - e)R$.

3. Condiciones de cadena. Álgebras artinianas.

33. Dada un álgebra R y un R–módulo completamente reducible M, prueba que las siguientes condiciones son equivalentes:
1) M está finitamente generado,
2) M es noetheriano,
3) M es artiniano,
4) M es una suma directa finita de módulos sin submódulos propios.

34. Considera para un primo p el anillo

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \left\{ \frac{a}{p^n} : a \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\} \ (\leq \mathbb{Q}),$$

y el $\mathbb{Z}$–módulo $M = \mathbb{Z}(p^\infty)/\mathbb{Z}$. Prueba que M es un $\mathbb{Z}$–módulo artiniano pero no noetheriano.

35. Un álgebra R se dice que es un *dominio* si no tiene divisores de cero (aunque no sea conmutativa). Prueba que todo dominio artiniano (a izquierda) es álgebra de división.

36. Sea F un cuerpo y R la F–álgebra

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c \in F \right\} \ (\leq \mathrm{Mat}_3(F)).$$

i) Prueba que R es álgebra conmutativa local cuyo único ideal maximal tiene cuadrado nulo.
ii) Supongamos que la característica de F es $p > 0$. Sea G un producto directo de dos grupos cíclicos de orden p con generadores respectivos x e y, $S = FG$ la correspondiente álgebra grupo y V el S–módulo con dimensión 3 sobre F, base $\{e_1, e_2, e_3\}$ y acción dada por

$$\begin{aligned} xe_1 &= e_1, & ye_1 &= e_1, \\ xe_2 &= e_2, & ye_2 &= e_2, \\ xe_3 &= e_1 + e_3, & ye_3 &= e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Prueba que $\mathrm{End}_S(V) \cong R$ y deduce que V es un S–módulo fuertemente indescomponible.

37. Sea R un álgebra unitaria con un único ideal maximal $\mathfrak{m}$. Prueba que el centro de R es un álgebra local (en particular, el centro de un álgebra local es local).

---

[34] Prueba que los únicos submódulos son los generados por las clases de $\dfrac{1}{p^n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

[35] Un álgebra unitaria es de división si y sólo si no tiene ideales a izquierda propios.

38. Sea R un álgebra local y $\mathfrak{m}$ su ideal maximal. Sea P un R–módulo unitario finitamente generado.
  i) Deduce que $P/\mathfrak{m}P$ es un $D = R/\mathfrak{m}$–espacio vectorial de dimensión finita.
  ii) Muestra, usando el Lema de Nakayama, que si $P = P_1 \oplus P_2$ con $P_1 \neq 0 \neq P_2$, entonces $\dim_D P_i/\mathfrak{m}P_i < \dim_D P/\mathfrak{m}P$ $(i = 1, 2)$.
  iii) Deduce que P es una suma directa finita de módulos indescomponibles.
  iv) Prueba que R es R–módulo a izquierda fuertemente indescomponible.
  v) Prueba, con la ayuda del Teorema de Krull–Schmidt–Azumaya, que si además P es proyectivo, entonces es libre.

39. Sea R un álgebra y $R[[X]]$ el álgebra de series formales con coeficientes en R.
  i) Prueba que $J\big(R[[X]]\big) = \{\sum_{i\geq 0} r_i X^i : r_0 \in J(R)\}$.
  ii) Deduce que si R es local, así es $R[[X]]$.

40. Sea F un cuerpo y R la F–álgebra de dimensión tres

$$R = F[X,Y]/(X,Y)^2 = F1 + Fx + Fy\,,$$

donde x e y denotan las clases de X e Y respectivamente (luego $x^2 = y^2 = xy = yx = 0$).

Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in F$, considera $V_{n,\lambda} = F^{2n}$ y la representación unitaria $\rho = \rho_{n,\lambda} : R \longrightarrow \mathrm{End}_F(V_{n,\lambda}) \cong \mathrm{Mat}_{2n}(F)$ dada por $\rho(x) = \alpha$ y $\rho(y) = \beta$, con α y β las matrices por bloques $n \times n$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J_\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

donde I_n es la matriz identidad y J_λ es la matriz (bloque de Jordan)

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Prueba que $V_{n,\lambda}$ es así un R–módulo (fuertemente) indescomponible.

41. Hemos visto condiciones de finitud que fuerzan que el radical de Jacobson sea nilpotente. Veamos una que implica algo más débil, que sea nil.
Sea F un cuerpo y R una F-álgebra con $\dim_F R < |F|$ (cardinal de F).
  i) Prueba que si F es finito, entonces $J(R)$ es nilpotente (luego nil).
  ii) Suponiendo F infinito, prueba que también $\dim_F R^{\#} < |F|$ y que $J(R) = J(R^{\#}) \cap R$.
  iii) Suponiendo que R es unitaria, sea $r \in J(R)$. Demuestra que si $0 \neq \alpha \in F$, el elemento $\alpha 1 - r$ tiene inverso y que $\{(\alpha 1 - r)^{-1} : 0 \neq \alpha \in F\}$ es una familia linealmente dependiente. Deduce que r es algebraico.
  iv) De lo anterior deduce el siguiente Teorema de Amitsur: *Si R es una F-álgebra con $\dim_F R < |F|$, entonces $J(R)$ es nil.*

---

[40] Se dice que un álgebra artiniana unitaria tiene *tipo de representación finito* si sólo tiene un número finito de módulos unitarios indescomponibles finitamente generados. Este ejercicio nos da un ejemplo de álgebra artiniana con tipo de representación infinito.

4. Álgebras simples. Grupo de Brauer.

42. Sea R una Φ-álgebra con centroide Γ. Prueba que:
   i) Si R es semiprima, Γ es conmutativo.
   ii) Si R es prima, Γ es un dominio de integridad.

43. Sea Φ un dominio de integridad contenido en un cuerpo Ω, sean A una Φ-álgebra y B una Ω-álgebra simple central, tales que A es una Φ-subálgebra de B (B es también una Φ-álgebra de modo natural) de tal modo que $\Omega A = B$. Si Γ es el centroide de A, prueba que $\Gamma \cong \{\alpha \in \Omega : \alpha A \subseteq A\}$.

44. Sea $K = F(\alpha)$ un cuerpo extensión finita de F y sea $p(X) \in F[X]$ el polinomio mínimo de α sobre F, luego $K \cong F[X]/(p(X))$. Sea L/F otra extensión de cuerpos.
   i) Prueba que $K^L \cong L[X]/(p(X))$.
   ii) ¿Cómo ha de ser $p(X)$ para que K^L sea semisimple?
   iii) Prueba que si K/F es una extensión de Galois, entonces $K^K \cong K^n$ ($n = [K : F]$).

45. Sean G_1 y G_2 dos grupos y $G = G_1 \times G_2$. Considera las correspondientes álgebras-grupo: ΦG, ΦG_1 y ΦG_2. Prueba que $\Phi G \cong \Phi G_1 \otimes_\Phi \Phi G_2$.

46. Sea K/F una extensión finita de cuerpos no trivial y A una K-álgebra simple central. A es, por restricción de escalares, una F-álgebra simple. Prueba que $A \otimes_F A^{op}$ no es simple.

47. Sea R una Φ-álgebra. Una aplicación Φ-lineal $d : R \to R$ se llama *derivación* si verifica $d(ab) = d(a)b + ad(b)\ \forall a, b \in R$.
   i) Prueba que si $c \in R$, entonces $\mathrm{ad}_c : R \to R$, dada por $\mathrm{ad}_c(x) = cx - xc$, es una derivación. Estas derivaciones se llaman *internas*.
   ii) Si F es un cuerpo, A es una F-álgebra simple central de dimensión finita y d es una derivación de A, utiliza el Teorema de Noether-Skolem con las dos subálgebras isomorfas de $\mathrm{Mat}_2(A)$:
$$\{aI : a \in A\} \qquad \text{y} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} a & d(a) \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in A \right\},$$
   para probar que toda derivación de A es interna.

48. Sea F un cuerpo y A una F–álgebra de dimensión finita con una F–base formada por elementos nilpotentes. Prueba que A es nilpotente.
   Este es un resultado de Wedderburn, de hecho uno de sus resultados favoritos. Para probarlo procede como sigue:
   i) Prueba que si K es la clausura algebraica de F entonces A^K también satisface las hipótesis, y que si A^K satisface la tesis, también A lo hace. Por tanto, puedes suponer que F es algebraicamente cerrado.
   ii) Prueba que $\mathrm{Mat}_n(F)$ no tiene ninguna base formada por elementos nilpotentes.
   iii) Utiliza la "teoría de estructura de A".

---

[43] Más precisamente, $\Gamma = \{\lambda_\alpha : A \to A, x \mapsto \alpha x : \alpha \in \Omega,\ \alpha A \subseteq A\}$. Para probar el contenido difícil del ejercicio, muestra que se puede extender todo elemento de Γ a un elemento del centroide de B.

49. Sea F un cuerpo, $0 \neq A$ una F–álgebra de dimensión finita y sea $[A, A]$ el subespacio vectorial generado por los conmutadores $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in A$. Prueba que $[A, A] \neq A$.

50. Sea D una F–álgebra de división central ($Z(D) = F$) con $\dim_F D = r^2$. Sea K un subcuerpo maximal de D con K/F separable y α un elemento primitivo de la extensión K/F (esto es, $K = F(\alpha)$). Sea $p(X) \in F[X]$ el polinomio mínimo de α. Considera el álgebra $R = D \otimes_F K$ y su módulo irreducible a izquierda $V = D$ con la acción dada por $(d \otimes \mu)v = dv\mu$.
    i) Como $K \subseteq D$, D es K–espacio vectorial a izquierda (que denotaremos por ${}_K D$). Sea $T \in \mathrm{End}({}_K D)$ la aplicación lineal dada por $vT = v\alpha$ $\forall v \in D$. Prueba que $1, T, \ldots, T^{r-1}$ son K–linealmente independientes en $\mathrm{End}({}_K D)$. Deduce que el polinomio mínimo de T es $p(X)$.
    ii) Deduce que existe un elemento $0 \neq \beta \in D$ tal que D está generado como K–espacio vectorial a izquierda por $\beta, \beta\alpha, \ldots, \beta\alpha^{r-1}$.
    iii) Concluye que $\{\alpha^i \beta \alpha^j : 0 \leq i, j \leq r - 1\}$ es una F–base de D.
    iv) Prueba que en toda álgebra de división D con $Z(D) = F$ y $\dim_F D = r^2$ existen elementos conjugados α y γ tales que $\{\alpha^i \gamma^j : 0 \leq i, j \leq r - 1\}$ es una F–base de D.

51. Sea D una F–álgebra de división central y de dimensión finita y sea K un subcuerpo de D conteniendo a F. Prueba que K es cuerpo de escisión de D si y sólo si es subcuerpo maximal.

52. Sea D una F–álgebra de división central de dimensión infinita y algebraica sobre F. Prueba que existen elementos de D algebraicos sobre F de grado arbitrariamente grande.

53. Sea G un grupo y M un G-módulo. Un 2-cociclo $f \in Z^2(G, M)$ se dice *normalizado* si $f(\sigma, \tau) = 0$ si σ o τ valen 1. Prueba que todo 2-cociclo es equivalente (esto es, difiere en un 2-coborde) a un 2-cociclo normalizado.

54. Prueba el *Teorema 90 de Hilbert*: Si K/F es una extensión de Galois finita, con grupo de Galois G, entonce $H^0(G, K^\times) = F^\times$ y $H^1(G, K^\times) = 1$. Para esto último, sea $f : G \to K^\times$ con $\delta f = 1$. Muestra que existe un elemento $a \in K^\times$ tal que $b = \sum_{\sigma \in G} f(\sigma)\sigma(a) \neq 0$. Deduce de aquí que $\tau(b) = f(\tau)^{-1} b$ para todo $\tau \in G$, y que $f \in B^1(G, K^\times)$.

55. Sea F un cuerpo y A una F-álgebra simple central de dimensión finita igual a m^2. Sea K un cuerpo de escisión de A tal que K/F es una extensión de Galois finita con $[K : F] = n$. Prueba que
$$A \otimes_F A \otimes_F \ldots^n \ldots \otimes_F A \cong \mathrm{Mat}_{m^n}(F).$$

56. Prueba que $Br(\ )$ define un funtor de la categoría de cuerpos (y homomorfismos entre ellos) a la categoría de grupos abelianos.

---

[49] ¡Extiende escalares!

[50] iv) Este resultado es de Brauer y Albert. En particular, D está generada como álgebra por dos elementos.

[52] En otro caso, prueba que hay un subcuerpo K de D con K/F separable finita y $[K : F]$ máximo. Considera la subálgebra de división $L = C_D(K)$ y calcula su centro.