Segunda parte: Representaciones de grupos.

1. Álgebras de dimensión finita.

57. Sea $R = FS_3$ el álgebra-grupo del grupo simétrico de grado 3 sobre el cuerpo F de característica $\neq 2, 3$.
   i) Comprueba que F es R-módulo a izquierda de dos modos distintos mediante $\rho_\pm : R \to F$, dadas por
$$\rho_+(g) = 1, \qquad \rho_-(g) = \operatorname{sign}(g)\,(= \pm 1),$$
   para todo $g \in S_3$. Denota los correspondientes módulos por $F_\pm$ y deduce que no son isomorfos entre sí.
   ii) F^3 es un R-módulo de modo natural, donde los elementos de S_3 actúan como permutaciones de las coordenadas. Comprueba que
$$V = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in F^3 : \alpha + \beta + \gamma = 0\}$$
   es un submódulo irreducible.
   iii) Deduce que F_+, F_- y V son, salvo isomorfismos, los únicos R-módulos irreducibles y que $R \cong F \times F \times \mathrm{Mat}_2(F)$.

58. Sea R un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo F, de modo que F es cuerpo de escisión de R. Prueba que para toda extensión de cuerpos K/F, se tiene $J(R^K) = J(R)^K$.

59. Sea K/F una extensión de cuerpos, R una F-álgebra y M y N dos R-módulos de F-dimensión finita.
   i) Demuestra que si M y N tienen algún factor de composición común (salvo isomorfismo), lo mismo les ocurre a M^K y N^K.
   ii) Prueba el recíproco.

60. Sea R un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo F y sea C una subálgebra de su centro. Prueba que:
   i) $J(C) = J(R) \cap C$.
   ii) Si F es cuerpo de escisión de R, también lo es de C.
   iii) ¿Son ciertas las aserciones anteriores si no suponemos que C está contenida en el centro?

---

[57] Por tanto, F es cuerpo de escisión de R.

[60] Para encontrar un contraejemplo de ii) en el caso de C no central, sumerge $\mathbb{H}$ en un álgebra de matrices real.

61. Sea R un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo F de característica $p > 0$. Considera los subespacios $[R, R]$ (generado por los conmutadores) y $T(R) = J(R) + [R, R]$.
 i) Prueba que $\forall a, b \in R$ y $\forall r \geq 0$

$$(a+b)^{p^r} \equiv a^{p^r} + b^{p^r} \pmod{[R, R]}$$

 y $\forall a \in [R, R]$, $a^{p^r} \in [R, R]$.
 ii) Demuestra que $T(R) \subseteq \{a \in R : a^{p^n} \in [R, R] \text{ para algún } n\}$.
 iii) Prueba que se da la igualdad en ii) si F es cuerpo de escisión de R.

62. Sea R un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo F y sean K y L extensiones de F con $F \subseteq K \subseteq L$, de modo que L es cuerpo de escisión de R.
Prueba que K es cuerpo de escisión de R si y sólo si todo R^L-módulo irreducible es, salvo isomorfismo, de la forma M^L para algún R^K-módulo irreducible M.

63. Si $K \supseteq F$ es cuerpo de escisión de la F-álgebra de dimensión finita R, ¿es también cuerpo de escisión de las álgebras cociente de R?

64. Sea F un cuerpo y $R = F[X]/(X^2) = F1 + Fx$ con $x^2 = 0$. Considera los R-módulos V y W, donde $V = W = F^2$ como F-espacios vectoriales, pero $xV = 0$, mientras que en W:

$$x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Prueba que ambos módulos tienen el mismo carácter, a pesar de que no son isomorfos.

65. Prueba que si R es una F-álgebra separable, así son R^{op} y R^{e}.

66. Sea G un grupo finito y F un cuerpo. Prueba que el álgebra opuesta al álgebra grupo $R = FG$ es isomorfa a R y que $R^{\mathrm{e}} \cong F(G \times G)$.

67. Sea R una F-álgebra y $\epsilon : R^{\mathrm{e}} \to R$ la "multiplicación" ($\epsilon(a \otimes b) = ab$). Prueba que si $e \in R^{\mathrm{e}}$ verifica $\epsilon(e) = 1$, entonces e es idempotente de separabilidad si y sólo si $(\ker \epsilon)e = 0$ (en R^{e}).

68. Dada una F-álgebra separable R, con idempotente de separabilidad $e \in R^{\mathrm{e}}$ y multiplicación ϵ, prueba que $\ker \epsilon = R^{\mathrm{e}}(1-e)$. Comprueba que $R^{\mathrm{e}} = R^{\mathrm{e}}(1-e) \oplus R^{\mathrm{e}}e$ y que por tanto, como R-bimódulos, $R^{\mathrm{e}}e$ es isomorfo a R.

---

[61] i) Comprueba que basta hacer el caso $r = 1$. Al desarrollar $(a+b)^p$ aparecen 2^p "palabras" de longitud p sobre las que actúa el grupo cíclico de p elementos por permutaciones cíclicas. Date cuenta de que dos palabras en la misma órbita son congruentes módulo $[R, R]$. Tienes exactamente dos órbitas de un único elemento ($\{a^p\}$ y $\{b^p\}$), y todas las demás órbitas tienen p elementos, luego al sumar los elementos de cualquiera de las órbitas largas obtienes módulo $[R, R]$ algo en $pR = 0$.

2. Representaciones de grupos.

Supondremos, en los ejercicios de este capítulo, que el cuerpo base es $\mathbb{C}$, que todos los grupos considerados son finitos y que todas las representaciones son de dimensión finita.

69. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación con carácter χ y sea V^* el espacio vectorial dual de V. Prueba que la aplicación:

$$\begin{aligned} \rho^* : G &\longrightarrow GL(V^*) \\ g &\mapsto \rho^*(g) : V^* \to V^* \\ &\qquad\qquad f \ \mapsto f \circ \rho(g^{-1}) \end{aligned}$$

es también una representación. Si además ρ es irreducible, demuestra que así es ρ^*. ¿Cuál es el carácter de ρ^*?

70. Sea χ un carácter de G, prueba que $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ (conjugación compleja) para todo $g \in G$.

71. Si $\rho : G \to GL(V)$ y $\rho' : G' \to GL(V')$ son representaciones de grupos, definimos una representación de $G \times G'$ mediante

$$\begin{aligned} \rho \otimes \rho' : G \times G' &\longrightarrow GL(V \otimes V') \\ (g, g') &\mapsto \rho(g) \otimes \rho(g') : V \otimes V' \to V \otimes V' \end{aligned}$$

i) Prueba que si ρ y ρ' son irreducibles, así es $\rho \otimes \rho'$.
ii) Si χ, χ' y χ'' son los caracteres de ρ, ρ' y $\rho\otimes\rho'$ respectivamente, prueba que $\chi''(g, g') = \chi(g)\chi'(g')$, $\forall g \in G$, $g' \in G'$.
iii) Prueba que toda representación irreducible de $G\times G'$ es, salvo isomorfismo, de la forma $\rho \otimes \rho'$, donde ρ y ρ' son representaciones irreducibles de G y G' respectivamente.

72. Se llama *grado* de un carácter χ (o de la representación asociada) de un grupo G al número natural $\chi(1)$ (esto es, a la dimensión del correspondiente módulo). Los caracteres de grado 1 se dicen *lineales*. Prueba que:
i) Un grupo G es abeliano si y sólo si todos sus caracteres irreducibles son lineales.
ii) El número de caracteres lineales de un grupo G coincide con el índice $|G : G'|$.

73. Demuestra que si U y V son representaciones irreducibles de un grupo G con $\dim U = 1$, entonces $U \otimes V$ también es representación irreducible (mediante $g(u \otimes v) = (gu) \otimes (gv)$, $\forall g \in G$, $u \in U$, $v \in V$). ¿Cómo es su carácter?

74. Deduce del ejercicio anterior que el conjunto de caracteres irreducibles de un grupo abeliano G forma un grupo abeliano $\hat{G}$. Prueba que $\hat{G}$ es isomorfo a G.

---

[69] ρ^* se dice representación dual de ρ.

[71] Esto prueba que el estudio de las representaciones de un producto directo de grupos se reduce al de sus factores.

[74] G es un producto directo de grupos cíclicos $G_1 \times \cdots \times G_t$. Para cada $i = 1, \ldots, t$, sea g_i un generador de G_i; si χ es un carácter irreducible, $\chi(g_i)$ es una raíz de la unidad. Utiliza esto para ver que puedes identificar $\chi(g_i)$ con un elemento de G_i $\forall i$ y que la aplicación $\hat{G} \to G$ dada por $\chi \mapsto (\chi(g_1), \ldots, \chi(g_t))$ es un isomorfismo.

75. Sea H un subgrupo abeliano de un grupo G, prueba que toda representación irreducible de G tiene grado $\leq |G : H|$.

76. Sea χ un carácter de un grupo abeliano G. Prueba que $(\chi \mid \chi) \geq \chi(1)$.

77. Sea $D = D_n$ el grupo diédrico de orden $2n$ con n impar. Prueba que D tiene exactamente $\dfrac{n+3}{2}$ clases de conjugación y concluye que D tiene dos caracteres irreducibles de grado 1 y $\dfrac{n-1}{2}$ caracteres irreducibles de grado 2.

78. Sea N un subgrupo normal de un grupo G y ψ un carácter de G/N. Se define $\chi : G \to \mathbb{C}$ mediante $\chi(g) = \psi(gN)$. Prueba que:
   i) χ es un carácter de G.
   ii) χ es irreducible si y sólo si así es ψ.

79. Sea χ un carácter de un grupo G. Considera los conjuntos

$$\ker \chi = \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\},$$
$$Z(\chi) = \{g \in G : |\chi(g)| = \chi(1)\},$$

donde $|z|$ denota el módulo de un número complejo. Prueba que:
   i) $\ker \chi$ y $Z(\chi)$ son subgrupos normales de G, con $\ker \chi \subseteq Z(\chi)$, y $Z(\chi)/\ker \chi \subseteq Z(G/\ker \chi)$, dándose la igualdad si χ es irreducible.
   ii) La intersección de los $\ker \chi$ donde χ recorre el conjunto de los caracteres irreducibles de G (denotado por $\mathrm{Irr}(G)$) es trivial.
   iii) El centro de G es la intersección de los $Z(\chi)$, donde χ recorre $\mathrm{Irr}(G)$.

80. Sea N un subgrupo normal de G y χ un carácter de G de modo que $N \subseteq \ker \chi$. Prueba que existe un carácter ψ de G/N tal que $\chi(g) = \psi(gN)$ para todo $g \in G$.

81. Dado un grupo G y un subgrupo normal N, sea $\mathcal{N} = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) : N \subseteq \ker \chi\}$. Prueba que:
   i) $N = \cap_{\chi \in \mathcal{N}} \ker \chi$.
   ii) $|G : N| = \sum_{\chi \in \mathcal{N}} \chi(1)^2$.

82. Calcula las tablas de caracteres del grupo alternado A_4, del diédrico D_4 y del grupo cuaternio $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subseteq \mathbb{H}$.

---

[75] Si V es el módulo correspondiente, considera un $\mathbb{C}H$-submódulo irreducible W y prueba que tienes un homomorfismo natural $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W \to V$ de $\mathbb{C}G$-módulos, que es epimorfismo por irreducibilidad.

[77] Recuerda que $D = \langle x, y : x^n = 1,\ y^2 = 1,\ xy = yx^{-1} \rangle$ es el grupo de simetrías de un polígono regular de n lados.

[82] Calcula primero los caracteres lineales, para luego completar la tabla usando las relaciones de ortogonalidad. Date cuenta de que D_4 y Q son no isomorfos pero tienen la misma tabla, luego $\mathbb{C}D_4 \cong \mathbb{C}Q$!

83. Se sabe que la tabla de caracteres de un grupo G contiene las dos líneas siguientes:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
μ	1	1	1	ω^2	ω	ω^2	ω
ν	2	-2	0	-1	-1	1	1

donde $\omega = e^{2\pi i/3}$.

i) Muestra que $g_1 = 1$.

ii) Deduce que G tiene al menos tres caracteres lineales distintos: el trivial χ_1, $\chi_2 = \mu$ y el dual χ_3 de μ.

iii) Al menos se tienen tres caracteres irreducibles de grado 2: $\chi_4 = \nu$, $\chi_5 = \nu\chi_2$ y $\chi_6 = \nu\chi_3$ (véase el ejercicio 73). Por tanto sólo falta determinar un carácter irreducible χ_7.

iv) Utiliza las relaciones de ortogonalidad para completar la tabla de caracteres. ¿Qué orden tiene G?

v) Comprueba que el grupo $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, (\pm 1 \pm i \pm j \pm k)/2\} \subseteq \mathbb{H}$ tiene esta tabla de caracteres.

84. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación irreducible y fiel, de grado > 1 potencia de un primo p, de un grupo G cuyo centro es trivial. Sea H un p-subgrupo de Sylow de G y χ el carácter asociado a ρ. Prueba que si $1 \neq g \in Z(H)$ entonces $\chi(g) = 0$.

85. Sea G un grupo simple no abeliano. Prueba que no tiene subgrupos nilpotentes de índice potencia de primo.

86. Sea H un subgrupo de un grupo G tal que $G = HZ(G)$. Prueba que si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$.

87. Sea H un subgrupo de un grupo G y θ un carácter de H. Prueba que $Z(\theta^G) \subseteq H$.

88. Sean H y K subgrupos de un grupo G con $G = HK$ y sea φ una función de clases (compleja) de K. Prueba que $(\varphi^G)_H = (\varphi_{H\cap K})^H$.

89. Sea H un subgrupo de un grupo G con $|G : H| = n$ y χ un carácter de G.

i) Prueba que $(\chi \mid \chi)_G \geq (\chi_H \mid \chi_H)_H/n$.

ii) Si H es abeliano y χ irreducible, comprueba que $\chi(1) \leq n$.

iii) Deduce que si H es abeliano, entonces G contiene al menos $|H|^2/|G|$ clases de conjugación.

iv) Si H es abeliano, $H \neq G$, χ irreducible y $\chi(1) = n$, demuestra que H contiene un subgrupo normal no trivial de G.

---

89 ii) Utiliza el ejercicio 75.

iv) En el año 1998 se probó que, en estas condiciones, H es subnormal en G.

3. Representaciones del grupo simétrico.

El cuerpo base seguirá siendo $\mathbb{C}$.

90. Prueba que si $\lambda = (m_1, \ldots, m_r) \dashv n$ y $l_j = m_j + r - j$ $(j = 1, \ldots, r)$, entonces

$$f(\lambda) = n! \, \frac{\prod_{1 \le i < j \le r}(l_i - l_j)}{\prod_{i=1}^r l_i!} \, .$$

Para ello sigue los siguientes pasos:

i) Haz inducción sobre n, comprobando que el caso $n = 1$ es trivial.

ii) Si $\lambda' \lhd \lambda$ y l'_j es el correspondiente valor de λ' $\forall j$, prueba que

$$\frac{\prod_{i<j}(l'_i - l'_j)}{\prod_i l'_i!} = \frac{\prod_{i<j}(l_i - l_j)}{\prod_i l_i!} l_k \prod_{i \ne k} \frac{(l_k - 1 - l_i)}{l_k - l_i} \, ,$$

donde k es el índice para el que $m'_k = m_k - 1$.

iii) Comprueba que basta probar que $\forall l_1 > l_2 > \cdots > l_r \ge 0$ con $l_1 + \cdots + l_r = n + \binom{r}{2}$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^r l_k \prod_{i \ne k} \frac{l_k - 1 - l_i}{l_k - l_i} = n.$$

iv) Sea $F(z) = \prod_{i=1}^r (z - l_i)$; comprueba que el punto anterior equivale a probar que

$$-\sum_{i=1}^r l_k \frac{F(l_k - 1)}{F'(l_k)} = n.$$

v) Considera la nueva función compleja $G(z) = z \dfrac{F(z-1)}{F(z)}$, que tiene polos en $z = l_k$ con residuos $l_k \dfrac{F(l_k - 1)}{F'(l_k)}$, luego

$$-\sum_{k=1}^r l_k \frac{F(l_k - 1)}{F'(l_k)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} -G(z)dz \, ,$$

para $R \gg 0$.

vi) Date cuenta de que $F(z-1) = F(z) - F'(z) + \frac{1}{2}F''(z) - + \cdots \pm \frac{1}{r!}F^{(r)}(z)$, luego $G(z) = z - \frac{zF'(z)}{F(z)} + \frac{1}{2}\frac{zF''(z)}{F(z)} + O(z^{-2})$. Usa esto para calcular

$$\lim_{R \to \infty} \oint_{|z|=R} G(z)dz$$

y obtén así el resultado deseado.

91. Prueba que si $\lambda \dashv n$ y T es un λ-tablero, entonces $V_T = (\mathbb{C}S_n)a_T b_T \cong (\mathbb{C}S_n)b_T a_T$.

---

[91] Prueba que la aplicación lineal $(\mathbb{C}S_n)a_T b_T \to (\mathbb{C}S_n)b_T a_T$: $x \mapsto x a_T$, es biyectiva y su inversa, salvo un escalar no nulo, viene dada por la aplicación $(\mathbb{C}S_n)b_T a_T \to (\mathbb{C}S_n)a_T b_T$: $x \mapsto x b_T$.

92. Sea $\mathcal{F}$ un diagrama de Young, el diagrama

$$\mathcal{F}' = \{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 : (j,i) \in \mathcal{F}\}$$

se dice *diagrama conjugado* de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ es el diagrama de la partición λ y $\mathcal{F}'$ el de λ', se dice que λ' es la *partición conjugada* de λ. Por último, si T es un λ-tablero, su *tablero conjugado* es el λ'-tablero T' tal que $T'(i,j) = T(j,i)$ para todo i y j.
  i) Prueba que en estas condiciones, el automorfismo $\mathbb{C}S_n \to \mathbb{C}S_n$ dado por $\varphi(\sigma) = (-1)^\sigma \sigma \ \forall \sigma \in S_n$, verifica que $\varphi(a_T b_T) = b_{T'} a_{T'}$, luego $\varphi\big((\mathbb{C}S_n) a_T b_T\big) = (\mathbb{C}S_n) b_{T'} a_{T'}$.
  ii) Sea $U = \mathbb{C}u$ el S_n-módulo dado por la representación signatura ($\sigma u = (-1)^\sigma u$, $\forall \sigma$). Comprueba que el automorfismo de álgebra φ induce un isomorfismo de S_n-modulos:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}S_n \otimes U &\to \mathbb{C}S_n \\ x \otimes u &\mapsto \varphi(x). \end{aligned}$$

  iii) Deduce que $V_{\lambda'} \cong V_\lambda \otimes U$.

93. Sea $0 \neq e = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ un idempotente no nulo del álgebra grupo $\mathbb{C}G$ de un grupo finito G, sea M el G-módulo $(\mathbb{C}G)e$ y χ su carácter. Prueba que para todo $g \in G$:

$$\chi(g) = |C_G(g)| \sum_{h \in \mathcal{C}} \alpha_h,$$

donde $\mathcal{C}$ denota la clase de conjugación de g^{-1}. En particular, $\dim M = \chi(1) = |G| \alpha_1$.

94. Sea G un grupo finito, H un subgrupo suyo. Dado cualquier elemento $a = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in \mathbb{C}G$, considera el elemento $a_H = \sum_{h \in H} \alpha_h h \in \mathbb{C}H \leq \mathbb{C}G$. Sean $0 \neq e = e^2 \in \mathbb{C}G$ y $0 \neq f = f^2 \in \mathbb{C}H$ tales que $V = (\mathbb{C}G)e$ y $W = (\mathbb{C}H)f$ son módulos irreducibles para G y H respectivamente. Prueba que si $f e_H \neq 0$, entonces W es isomorfo a un submódulo de $\mathrm{Res}_H^G(V)$.

95. Considera S_{n-1} sumergido en S_n de modo natural. Utiliza el ejercicio anterior para probar que para cualquier partición $\lambda \dashv n$,

$$\mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(V_\lambda) \cong \bigoplus_{\lambda' \,\lhd\, \lambda} V_{\lambda'} \, .$$

96. Deduce del Teorema de Reciprocidad de Frobenius que

$$\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S^n}(V_\mu) \cong \bigoplus_{\mu \,\lhd\, \mu'} V_{\mu'}.$$

---

[92] Para ii) recuerda cómo el producto tensorial de dos G-módulos es un nuevo G-módulo. V_λ y $V_{\lambda'}$ se dicen *representaciones conjugadas*.

[93] Esto es la *Fórmula de Littlewood*. Para probarla, dado $g \in G$ considera la aplicación $\varphi_g : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$, $x \mapsto gxe$ y calcula su traza.

[95] Para $\lambda' \lhd \lambda$ fija, considera un λ-tablero T en el que n aparezca en el cuadro que desaparece al pasar a λ'.

97. Deduce también que si V es S_n-módulo irreducible, $\lambda \dashv n$ y $\mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(V) \cong \bigoplus_{\lambda' \lhd \lambda} V_{\lambda'}$, entonces $V \cong V_\lambda$; pero el resultado es falso si V no es irreducible.

98. Sea V el módulo estándar de S_n ($\dim V = n-1$), $n \geq 2$. Prueba que las potencias exteriores $\Lambda^s V$, $1 \leq s \leq n-1$, son S_n-módulos irreducibles.

99. Con las hipótesis del ejercicio anterior, comprueba que $\Lambda^s V$ es isomorfo a $V_{(n-s,1,\ldots,1)}$.

100. Prueba que las únicas representaciones irreducibles de $\mathbb{C}S_n$ de dimensión $< n$ son la trivial, la signatura, la estándar y su conjugada, y estas tres excepciones: $V_{(2,2)}$ para S_4 y $V_{(3,3)}$ y $V_{(2,2,2)}$ para S_6.

101. Sea $\alpha = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ con peso$(\alpha) = n$ y $\mathcal{C}_\alpha$ la correspondiente clase de conjugación en S_n. Prueba que

$$\begin{aligned}
\chi_{(n-1,1)}(\mathcal{C}_\alpha) &= k_1 - 1 \\
\chi_{(n-2,1,1)}(\mathcal{C}_\alpha) &= \frac{1}{2}(k_1-1)(k_1-2) - k_2 \\
\chi_{(n-2,2)}(\mathcal{C}_\alpha) &= \frac{1}{2}(k_1-1)(k_1-2) + k_2 - 1
\end{aligned}$$

102. Sea $V = V_{(n-1,1)}$ el módulo estándar de S_n y $\mathrm{Sym}^2 V$ el conjunto de tensores simétricos en $V \otimes V$ (que es un S_n-submódulo de $V \otimes V$). Utiliza el ejercicio anterior para probar que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sym}^2 V &\cong V_{(n)} \oplus V_{(n-1,1)} \oplus V_{(n-2,2)}, \\
V \otimes V &\cong \mathrm{Sym}^2 V \oplus \Lambda^2 V \cong V_{(n)} \oplus V_{(n-1,1)} \oplus V_{(n-2,2)} \oplus V_{(n-2,1,1)}.
\end{aligned}$$

103. Si σ es un ciclo de longitud n en S_n, prueba que

$$\chi_\lambda(\sigma) = \begin{cases} (-1)^s & \text{si } \lambda = (n-s, 1, \ldots, 1),\ 0 \leq s \leq n-1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

104. Sea $\lambda = (m_1, \ldots, m_r) \dashv n$ una partición que coincide con su conjugada (λ se dice entonces *partición simétrica*). Sean $q_1 > q_2 > \cdots > q_s > 0$ las longitudes de los "ganchos simétricos" que forman el diagrama de λ. Así $q_1 = 2m_1 - 1$, $q_2 = 2m_2 - 3$, ... Prueba que si $\sigma \in S_n$ es un producto de ciclos disjuntos de longitudes $q_1, \ldots, q_s$, entonces $\chi_\lambda(\sigma) = (-1)^{\frac{n-s}{2}}$.

---

[97] Considera $V = V_{(1,1,1)} \oplus V_{(3)}$ y comprueba que $\mathrm{Res}_{S_2}^{S_3}(V) \cong \mathrm{Res}_{S_2}^{S_3}(V_{(2,1)})$.

[98] Del hecho de que el producto tensorial de dos G-módulos sea un nuevo G-módulo, se deduce que las potencias exteriores de un G-módulo son también G-módulos mediante $g\cdot(v_1 \wedge \cdots \wedge v_s) = (gv_1) \wedge \cdots \wedge (gv_s)$. Considera el S_n-módulo natural $M = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n$ con $\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$ $\forall j = 1, \ldots, n$, $\forall \sigma \in S_n$. Sabemos que $M \cong V \oplus U$, donde U es módulo trivial. Deduce que $\Lambda^s M \cong \Lambda^s V \oplus \Lambda^{s-1} V$ $\forall s \geq 2$. Calcula el carácter χ de $\Lambda^s M$, su producto $(\chi \mid \chi)$ y deduce el resultado.

[104] Usa la fórmula de Frobenius. Juega con ella para obtener que $\chi_\lambda(\sigma) = (-1)^{r-1}\chi_\mu(\tau)$ donde μ es la partición obtenida suprimiendo la primera fila y columna del diagrama de λ y τ es un producto de ciclos disjuntos de longitudes $q_2, \ldots, q_s$. Ahora usa inducción.