Taller de Talento Matemático

http://www.unizar.es/ttm ttm@unizar.es

Nudos y números

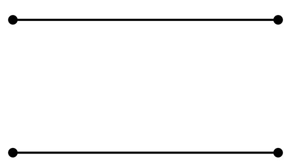
Alberto Elduque
Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.
http://www.unizar.es/matematicas/algebra/elduque

La llamada *Teoría de Nudos* es una teoría matemática muy abstracta, que está teniendo una gran relevancia por sus aplicaciones al estudio de la estructura del ADN en Biología, la *Teoría de Cuerdas* en Física Teórica, o en otras ramas de la Matemática como la *Teoría de Representaciones.*

En esta sesión del Taller vamos a jugar con un tipo de nudos muy particulares, los llamados *marañas racionales* (*rational tangles* en inglés), que fueron estudiadas por J. Conway, quien en 1970 probó cómo asociar un número racional (o ∞) de modo biunívoco a cada una de estas marañas.

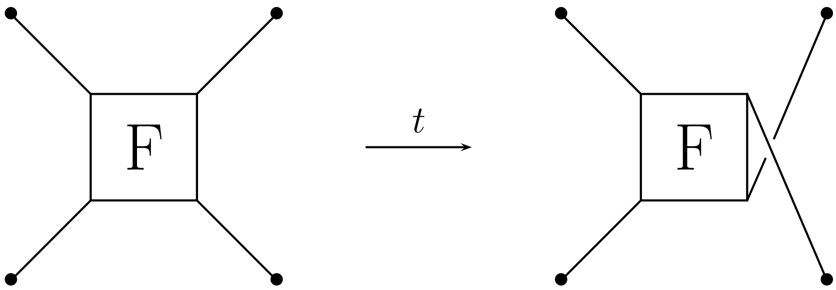
1. Marañas racionales

Las marañas racionales son los "nudos" que se obtienen a partir de dos cuerdas en posición inicial

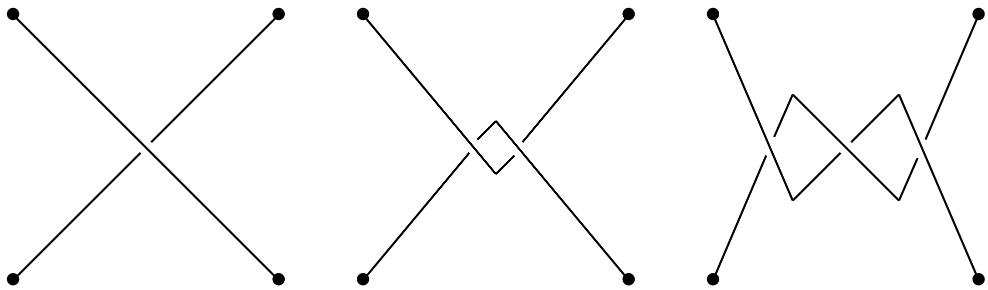


a las que podemos aplicar sólo dos movimientos permitidos: *twist* y *rotación.*

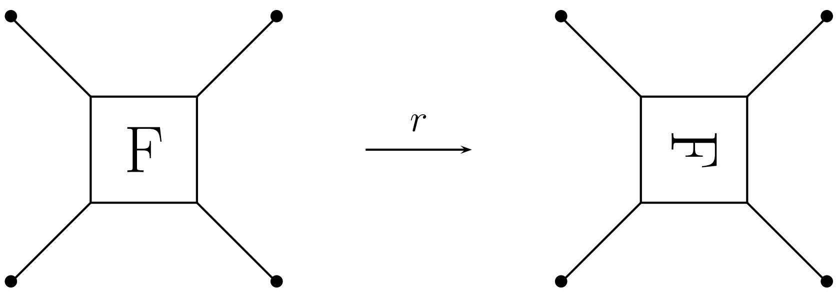
TWIST: En este movimiento el extremo superior derecho y el extremo inferior derecho permutan, pasando el superior por encima del inferior, como muestra la figura:



Así, si aplicamos a la posición inicial uno, dos o tres twists, obtenemos respectivamente las marañas:



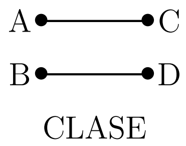
Rotación: Este movimiento consiste en un giro de noventa grados en el sentido de las agujas del reloj:



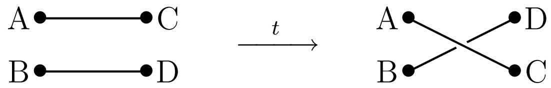
Las marañas obtenidas a partir de la posición inicial mediante una sucesión de estos movimientos se dicen *marañas racionales*.

Podemos convertir esto en un juego, con cuatro voluntarios sosteniendo los extremos de las cuerdas y un juez dando órdenes *twist* o *rotate*.

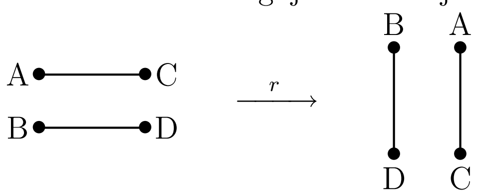
Estos voluntarios comienzan sosteniendo las dos cuerdas paralelas ante la clase:



Cuando el juez da la orden *twist* (que abreviaremos por t), los voluntarios que sujetan los extremos de la derecha (C y D) permutan sus posiciones, de modo que el voluntario C pasa su extremo de la cuerda por encima del de D:

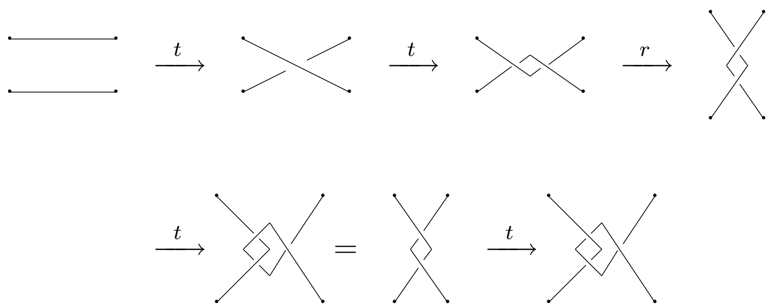


Si el juez da la orden *rotación* (que abreviaremos por r) los cuatro voluntarios giran en sentido de las agujas del reloj:



¡MUY IMPORTANTE! Lo único que importa es la configuración de las cuerdas, no la posición en la que quedan los voluntarios.

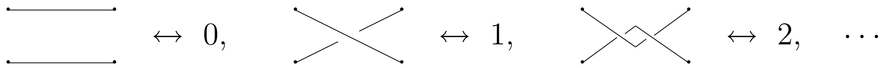
Así, por ejemplo, si el juez ordena la secuencia *ttrtt* obtendremos:



De vez en cuando el juez dará otra orden: *mostrar*, de modo que los voluntarios más cercanos a la clase se agachan, y los voluntarios que están detrás subirán sus extremos, permitiendo así ver qué nudo (maraña racional) se ha hecho en las cuerdas.

John Conway observó que se puede asignar de manera biunívoca un número racional o infinito (∞) a cada maraña racional.

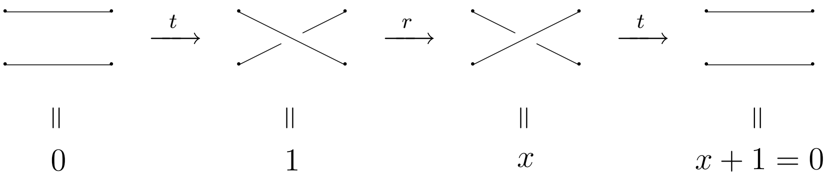
Parece lógico asignar a la posición inicial el valor 0 y añadir 1 cada vez que hagamos un *twist*:



De este modo identificamos el movimiento *twist* con la aplicación $t : x \mapsto x + 1$.

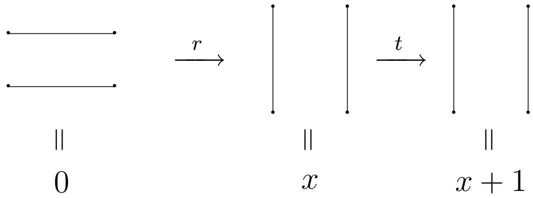
La cuestión natural ahora es entender a qué operación debe de corresponder el movimiento *rotación*.

Para conjeturar cuál debe de ser la respuesta, observa qué pasa cuando el juez, desde la posición inicial, ordena la secuencia *trt*:



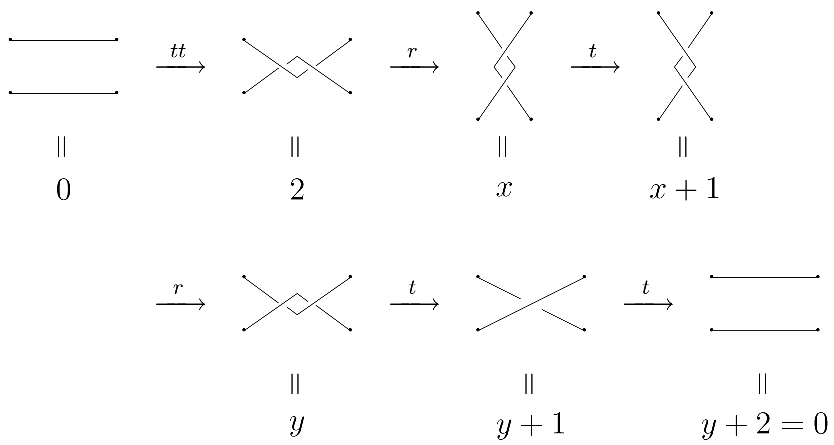
Así, la operación r asociada al movimiento *rotación* debe de llevar 1 a -1.

Observa qué pasa si ahora el juez ordena *rt* (o *rtt* o *rttt*, ...) desde la posición inicial:



No nos queda más remedio que admitir $x = \infty$, luego la aplicación r debe de llevar 0 a ∞ (y también ∞ a 0).

Si el juez ordena la secuencia *ttrtrtt* obtenemos:



luego ha de ser $y = -2$ y

$$2 \xrightarrow{r} x, \qquad x + 1 \xrightarrow{r} -2.$$

Una aplicación que encaja bien con los tres casos que hemos visto (aceptando que en $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, si $0 \neq a \neq \infty$, $\frac{a}{0} = \infty$ y $\frac{a}{\infty} = 0$) es

$$x \xrightarrow{r} -\frac{1}{x}.$$

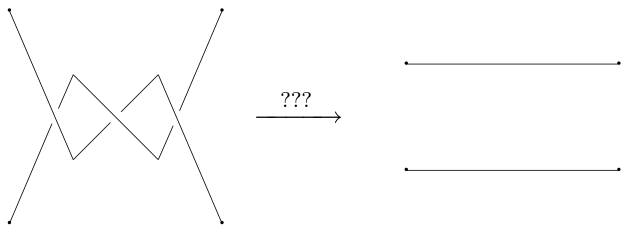
John Conway probó en 1970 que este modo de proceder es correcto. Esto constituye un teorema muy complicado de demostrar.

2. ¿CÓMO LLEGAR A 0?

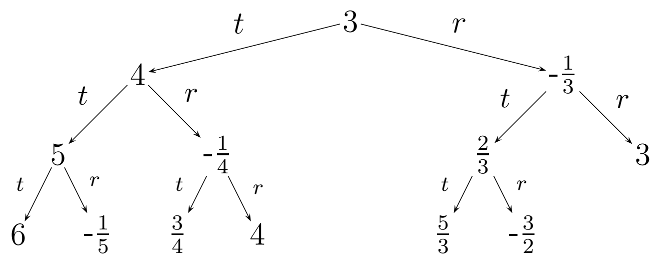
El objetivo de esta sección es el de obtener un algoritmo que permita, a partir de una maraña racional cuyo número racional (o ∞) es x, llegar a la posición inicial (¡usando sólo los dos movimientos permitidos!).

Si $x = \infty$ es muy fácil. Basta aplicar una rotación.

Ejercicio 1: Prueba a llegar a 0 desde 3:



Para esto puedes ayudarte de un árbol de posibilidades:



Ejercicio 2: $\frac{3}{5} \xrightarrow{???} 0.$

Cuando ya tengas práctica con estos ejercicios anteriores, y con algunos análogos, estarás en condiciones de plantearte el siguiente:

Ejercicio 3: Diseña un algoritmo que funcione siempre.

Soluciones

Solución al ejercicio 1:

$$3 \xrightarrow{r} -\frac{1}{3} \xrightarrow{t} \frac{2}{3} \xrightarrow{r} -\frac{3}{2} \xrightarrow{t} -\frac{1}{2} \xrightarrow{t} \frac{1}{2} \xrightarrow{r} -2 \xrightarrow{t} -1 \xrightarrow{t} 0.$$

(¡Compruébalo con las cuerdas!)

Solución al ejercicio 2:

$$\frac{3}{5} \xrightarrow{r} -\frac{5}{3} \xrightarrow{tt} \frac{1}{3} \xrightarrow{r} -3 \xrightarrow{ttt} 0.$$

Solución al ejercicio 3:

PASO 1: Si $x = 0$ no hay que hacer nada, y si $x = \infty$, basta hacer $x \xrightarrow{r} 0$.

PASO 2: Si $x \neq 0, \infty$ y $x > 0$ aplicamos r para obtener un número racional negativo.

PASO 3: Si $x = -\frac{p}{q}$ con p y q números naturales primos entre sí:

- Si $q = 1$ aplicamos t exactamente p veces para obtener 0.
- Si $q > 1$ aplicamos t el número mínimo de veces hasta obtener un número positivo (ejemplo: $-\frac{17}{3} \xrightarrow{t} -\frac{14}{3} \xrightarrow{t} -\frac{11}{3} \xrightarrow{t} -\frac{8}{3} \xrightarrow{t} -\frac{5}{3} \xrightarrow{t} -\frac{2}{3} \xrightarrow{t} \frac{1}{3}$).
  Este número racional positivo es de la forma $\frac{a}{q}$, con $1 \leq a \leq q$. Aplicamos ahora r para obtener $-\frac{q}{a}$ (¡el denominador es más pequeño que q!) y repetimos el PASO 3.

Notemos que cada vez que aplicamos el PASO 3, o bien llegamos a 0 (si el denominador es 1), o bien obtenemos un número racional negativo con denominador más pequeño que el precedente, por lo que el proceso termina siempre.

3. ¿EXISTE UNA MARAÑA RACIONAL PARA CADA NÚMERO RACIONAL?

El objetivo ahora es el de, dado un número racional (o ∞) x cualquiera, conseguir a partir de la posición inicial una maraña cuyo número asignado sea precisamente x.

Ya nos ha aparecido cómo obtener la maraña inicial (de número 0) a partir de la maraña de número 2:

$$2 \xrightarrow{r} -\frac{1}{2} \xrightarrow{t} \frac{1}{2} \xrightarrow{r} -2 \xrightarrow{t} -1 \xrightarrow{t} 0.$$

Esto es, $2 \xrightarrow{rtrtt} 0$. Hagamos estos mismos movimientos en orden inverso pero partiendo de la posición inicial: $0 \xrightarrow{ttrtr} ?$.

$$0 \xrightarrow{t} 1 \xrightarrow{t} 2 \xrightarrow{r} -\frac{1}{2} \xrightarrow{t} \frac{1}{2} \xrightarrow{r} -2.$$

Ejercicio 4: Obtén una secuencia de movimientos que lleve $\frac{4}{7}$ a 0 y aplica la secuencia en orden inverso a 0. ¿Qué obtienes?

Repite el ejercicio con otros números racionales.

Ejercicio 5: Prueba que si una secuencia de movimientos lleva x a y, entonces la secuencia inversa lleva $-y$ a $-x$. Puesto que por el ejercicio 3 sabes llegar desde cualquier número racional hasta 0, esto te permite llegar desde 0 a cualquier número racional (o ∞).

SOLUCIONES

Solución al ejercicio 4:

$$\frac{4}{7} \xrightarrow{r} -\frac{7}{4} \xrightarrow{tt} \frac{1}{4} \xrightarrow{r} -4 \xrightarrow{tttt} 0,$$

$$0 \xrightarrow{tttt} 4 \xrightarrow{r} -\frac{1}{4} \xrightarrow{tt} \frac{7}{4} \xrightarrow{r} -\frac{4}{7}.$$

Solución al ejercicio 5: Basta ver qué ocurre en cada paso de la secuencia:

Twist: $x \xrightarrow{t} x+1$, y se tiene también $-(x+1) \xrightarrow{t} -x$,
Rotación: $x \xrightarrow{r} -\frac{1}{x}$, y se tiene también $\frac{1}{x} \xrightarrow{r} -x$,

Luego en cada paso, si $a \longrightarrow b$, se tiene que $-b \longrightarrow -a$.

Alternativamente, se puede utilizar la división "por exceso" para obtener la secuencia de movimientos que nos lleve a la maraña correspondiente a un número dado.

Si, por ejemplo, deseamos llegar a $\frac{17}{38}$, dividimos 17 por 38 por exceso, es decir, añadimos 1 al cociente, de modo que el resto es un número ≤ 0, menor en valor absoluto que el divisor: $17 = 1 \times 38 - 21$:

$$\frac{17}{38} = 1 - \frac{21}{38} = 1 + \frac{-1}{\frac{38}{21}}$$

y continuamos del mismo modo[1]:

$$\frac{17}{38} = 1 + \frac{-1}{\frac{38}{21}} = 1 + \frac{-1}{2 - \frac{4}{21}} = 1 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{\frac{21}{4}}} = 1 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{6 - \frac{3}{4}}}$$

$$= 1 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{6 + \cfrac{-1}{\frac{4}{3}}}} = 1 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{6 + \cfrac{-1}{2 - \frac{2}{3}}}} = 1 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{6 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{\frac{3}{2}}}}}$$

[1]Obsérvese que obtenemos un tipo especial de fracciones continuas.

$$= 1 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{6 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{2 - \frac{1}{2}}}}} = 1 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{6 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{2 + \frac{-1}{2}}}}}$$

De este modo, obtenemos

$$0 \xrightarrow{t^2} 2 \xrightarrow{r} -\frac{1}{2} \xrightarrow{t^2} 2 + \frac{-1}{2} \xrightarrow{r} \cfrac{-1}{2 + \frac{-1}{2}} \xrightarrow{t^2} 2 + \cfrac{-1}{2 + \frac{-1}{2}}$$

$$\xrightarrow{r} \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{2 + \frac{-1}{2}}} \xrightarrow{t^6} 6 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{2 + \frac{-1}{2}}} \xrightarrow{r} \cfrac{-1}{6 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{2 + \frac{-1}{2}}}}$$

$$\xrightarrow{t^2} 2 + \cfrac{-1}{6 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{2 + \frac{-1}{2}}}} \xrightarrow{r} \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{6 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{2 + \frac{-1}{2}}}}}$$

$$\xrightarrow{t} 1 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{6 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{2 + \frac{-1}{2}}}}} = \frac{17}{38}$$

APÉNDICE

Este apéndice no está pensado para alumnos de bachillerato sino para, al menos, alumnos de doctorado en Matemáticas; pero no puedo resistir la tentación de enlazar el contenido de la sesión con algunos temas más avanzados.

Consideremos la recta proyectiva racional $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ cuyos elementos denotaremos en la forma $[a:b]$, con $(a,b)\in\mathbb{Q}^2\setminus\{(0,0)\}$, siendo $[a:b]=[c:d]$ si y sólo si $ad=bc$. Podemos identificar $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ con $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$, de modo que $\infty=[0:1]$ y $x=[1:x]$ para todo $x\in\mathbb{Q}$.

El llamado *grupo modular*, o grupo proyectivo especial sobre los enteros:

$$PSL_2(\mathbb{Z})=\{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right):a,b,c,d\in\mathbb{Z},ad-bc=1\}/\{\pm\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\},$$

actúa a derecha sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ de modo natural. Denotaremos por $\overline{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}$ la clase módulo $\{\pm\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ de la matriz $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbb{Z})$.

Consideramos los elementos $r=\overline{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)}$ y $t=\overline{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)}$ del grupo modular. Mediante nuestra identificación $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ con $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ se tiene:

$$x\cdot r=-\frac{1}{x}\qquad\text{y}\qquad x\cdot t=x+1,$$

para todo $x\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$.

Teorema.

(I) r y t generan el grupo modular.

(II) El grupo modular es el producto libre de un grupo cíclico de orden 3 y otro de orden 2.

Demostración: En la acción a derecha considerada anteriormente, el estabilizador de ∞ es

$$\begin{aligned}\mathrm{Est}(\infty)&=\{\overline{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\in PSL_2(\mathbb{Z}):\exists e\in\mathbb{Q}\text{ tal que }(0,1)\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)=(0,e)\}\\&=\{\overline{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\in PSL_2(\mathbb{Z}):c=0\}\\&=\{\overline{\left(\begin{smallmatrix}1&n\\0&1\end{smallmatrix}\right)}:n\in\mathbb{Z}\}=\langle t\rangle\text{ (subgrupo generado por }t).\end{aligned}$$

El algoritmo que hemos deducido para las marañas racionales muestra que para todo $x\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$, existe un elemento $u\in\langle r,t\rangle$ tal que $x\cdot u=\infty$. Sea g un elemento arbitrario de $PSL_2(\mathbb{Z})$, y sea $u\in\langle r,t\rangle$ tal que $\infty\cdot gu=\infty$. Entonces $h=gu\in\mathrm{Est}(\infty)=\langle t\rangle$, luego $g\in\langle r,t\rangle$. Esto prueba (i).

Consideremos ahora el producto libre del enunciado: $G=\langle x,y: x^3=y^2=1\rangle$. Como $r^2=1=(rt)^3$ se tiene un único homomorfismo de grupos $\Phi : G \to PSL_2(\mathbb{Z})$ tal que $\Phi(x) = rt$ y $\Phi(y) = r$. Por (i), Φ es un epimorfismo, ya que $\langle r, t\rangle = \langle r, rt\rangle$.

Los elementos de G, salvo 1 e y, se escriben de modo único en la forma $y^\epsilon x^{n_1} y x^{n_2} y \cdots y x^{n_m} y^\delta$, con $m \in \mathbb{N}$, $\epsilon, \delta \in \{0,1\}$ y $n_i \in \{1,2\}$ $\forall i$. Juntando términos, un elemento de la forma $yx^{n_1}yx^{n_2}y\cdots yx^{n_m}$ se escribe de modo único en la forma $(yx)^{m_1}x(yx)^{m_2}\cdots x(yx)^{m_s}$ $(s \geq 1)$ con $m_1, \ldots, m_{s-1} \geq 1, m_s \geq 0$, que por Φ se aplica en $t^{m_1}rt^{m_2+1}r\cdots rt^{m_s+1} = t^{p_1}rt^{p_2}r\cdots rt^{p_s}$, con $p_1, p_s \geq 1$, $p_2, \ldots, p_{s-1} \geq 2$.

Si $s = 1$, el elemento es $t^{p_1} \neq 1, r$, y si $s > 1$ este elemento lleva el número racional (que está en el intervalo $[-p_1, -p_1 + 1)$)

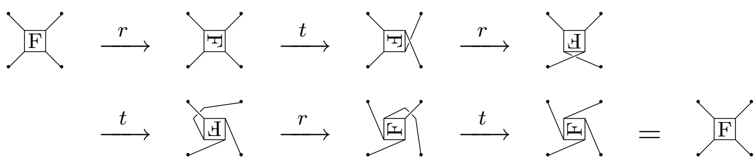
$$-p_1 - \cfrac{1}{-p_2 - \cfrac{1}{-p_3 - \cfrac{1}{\ddots \; - \cfrac{1}{p_{s-1}}}}}$$

a ∞, luego tampoco coincide con 1 ni con r. De aquí se deduce inmediatamente que el núcleo de Φ es trivial. $\square$

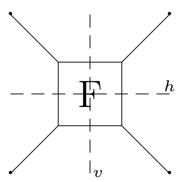
Corolario. $PSL_2(\mathbb{Z}) = \{r, t : r^2 = 1 = (rt)^3\}$.

Volviendo a las marañas racionales, veamos primero que los movimientos permitidos: twist (t) y rotación (r), también verifican las mismas relaciones:

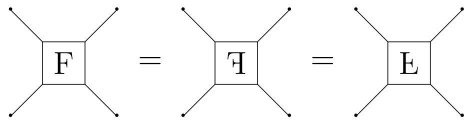
- $(rt)^3 = 1$:



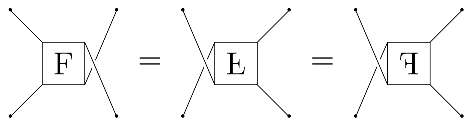
- $r^2 = 1$ (¡sólo sobre marañas racionales!, pues en general sólo se tiene $r^4 = 1$): Para probar esto es suficiente ver que toda maraña racional es invariante por los giros de 180 grados en el espacio sobre los ejes horizontal h y vertical v:



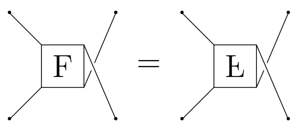
pues r^2 es el giro de 180 grados sobre el centro, que es la composición de los giros de 180 grados sobre los ejes h y v. Esto se prueba por inducción sobre el número mínimo n de movimientos necesarios para obtener la maraña a partir de la posición inicial. Si $n = 0$ es obvio.
$n \mapsto n+1$: Si una maraña es invariante por ambos giros:



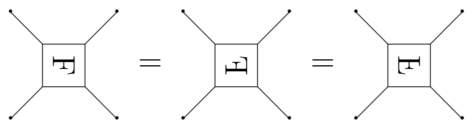
y aplicamos t, se tiene:



donde en la primera igualdad simplemente hemos estirado los extremos de las cuerdas a la derecha. Esto prueba la invariancia respecto al giro sobre v. Además se tiene inmediatamente la invariancia respecto al giro sobre h:



Por último, si aplicamos r a nuestra maraña invariante por h y v, tenemos:



donde la invariancia respecto a h de nuestra maraña inicial se convierte en la invariancia respecto a v para la nueva maraña, y lo mismo cambiando h y v.

Así pues, se tienen un par de acciones transitivas bien definidas del grupo modular, una en $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ y otra en el conjunto $\mathcal{M}$ de marañas racionales. Además, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}\cup\{\infty\} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \infty\cdot g &\mapsto \big(|\,|\big)\cdot g \end{aligned}$$

está bien definida, pues $\mathrm{Est}(\infty) = \langle t\rangle$, y t estabiliza la maraña $|\,|$ (la que corresponde a ∞).

La dificultad del Teorema de Conway radica en probar la inyectividad de esta aplicación.

Referencias:

1. J.H. Conway: *An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties*. Proceedins of the conference on Computational Problems in Abstract Algebra, held at Oxford in 1967. J. Leech. ed. (1970), Pergamon-Press, 329–358.
2. T. Davis: *Conway's Rational Tangles*, `http://www.geometer.org/mathcircles` (August 2007).
3. J. Goldman, L.H. Kauffman: *Rational Tangles*. Adv. Appl. Math. **18** (1997), 300–332.
4. L.H. Kauffman, S. Lambropoulou: *Classifying and Applying Rational Knots and Rational Tangles*. Contemporary Mathematics **304** (2002), 223–259.