Funciones de R^n en R^m

Nota: se entenderá $\log x = \log_{10} x$ y $\ln x = \log_e x$

1.- Determinar y representar gráficamente el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 3}}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x + 1}}{x^2 + x + 1}$

f) $f(x) = e^{\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}}$

g) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2 + x}}$

h) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

i) $f(x) = \ln\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

j) $f(x) = \ln(x + 2) + \ln(x - 2)$

k) $f(x,y) = 3x + y$

l) $f(x,y) = \dfrac{3x + y}{x^2 + 2y^2}$

m) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x - y}}$

n) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$

o) $f(x,y) = \ln(2x - y + 1)$

p) $f(x,y) = x + \sqrt{y}$

q) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$

r) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

s) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

t) $f(x,y) = \ln(3x^2 + y^2 + 4)$

u) $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

v) $f(x,y) = \left(\ln(x + y),\ \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right)$

2.- Representar gráficamente las curvas de nivel de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x + y$

b) $f(x,y) = (x + y)^2$

c) $f(x,y) = x^2 + y^2$

d) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

e) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

f) $f(x,y) = x^y, x > 0$

g) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2}$ h) $f(x,y)=\ln(2x-y+1)$ i) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x}$

3.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^3+3}-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3+4^{\frac{1}{x}}}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x^2-6x}{3x^2-8}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)^{x}$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+4}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$ i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^5}{e^{-x}}$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^{x}$ k) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{5x+1}{8x-1}\right)^{-x}$ l) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{3x^2y}{4x-y+1}$

m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x^2}{5x^2+y^2}$ n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\left(x^2+5xy-8,\ e^{x^2y},\ \ln(2x+y)\right)$

4.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{x-1} & \text{si } x\le 0\\ x^3+1 & \text{si } x>0\end{cases}$ b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3y^2}{7x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

5.- Calcular la primera derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^5$ b) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ d) $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$

e) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ f) $f(x)=\sqrt{2x-1}$

g) $f(x)=\ln x+\sqrt{x^2+1}$ h) $f(x)=\dfrac{\pi}{x}+\ln 2$

i) $f(x)=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x}$ j) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

k) $f(x) = \ln x \ \log x - \ln a \ \log_a x$

l) $f(x) = \dfrac{3}{56(2x-1)^7} - \dfrac{1}{24(2x-1)^6} - \dfrac{1}{40(2x-1)^5}$

m) $f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5 x$

n) $f(x) = x^2 10^{2x}$

o) $f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$

p) $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$

q) $f(x) = x^4(a - 2x^3)^2$

r) $f(x) = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$

s) $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

t) $f(x) = (2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}$

u) $f(x) = \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$

v) $f(x) = \ln(senx)$

w) $f(x) = senx^4$

x) $f(x) = cos^4 x$

y) $f(x) = sen^2 x \ cosx^6$

6.- Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z) = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$

b) $f(x,y) = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}$

c) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$

d) $f(x,y) = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$

e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$

f) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

g) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$

h) $f(x,y) = x^y$

i) $f(x,y,z) = z^{xy}$

j) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

k) $f(x,y) = x^2 sen^2 y$

l) $f(x,y) = \dfrac{e^{ax}(sen\, x + a\cos y)}{a^2 + b^2}$

7.- Comprobar que $y = xe^{-x}$ verifica la ecuación $x\dfrac{dy}{dx} = (1-x)y$.

8.- Calcular y' en las siguientes expresiones:

a) $2x^2 + 5xy + y^2 = 19$ b) $x^2 + y^2 = 25$ c) $y = 1 + xe^y$

d) $\ln y + e^{-\frac{y}{x}} = 8$ e) $\ln y + \frac{x}{y} = 7$ f) $x^y = y^x$

9.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en x=1. Hallar un valor aproximado de $f(1'1)$.

10.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2(1-cos x)}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen 3x^2}{3x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos\sqrt{x}}{\frac{1}{2}x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(sen x)}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+sen x)}{sen x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x^3}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen x\, tg x}{1-cos x}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos 4x}{5x^2}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{1-e^x}$ n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen^2 x}{1-cos 2x}$ o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x\ln(1+x)}$

p) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$ q) $\lim\limits_{x\to 0^+} (cos x)^{\frac{1}{x}}$ r) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left[\ln(x+1) - \ln x\right]$

s) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\ln x$ t) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ u) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x^6)}{x^2}$

v) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x^3)e^{-x}$

11.- Calcular $\nabla f(x,y)$ cuando $f(x,y) = x^2 y + y^3$.

12.- Hallar la matriz jacobiana de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln^2 x$ b) $f(x_1,x_2) = (x_1 - x_2)^2$

c) $f(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ d) $f(t) = (t, e^t, e^{-t})$

13.- Calcular $\frac{dz}{dt}$ en las funciones:

a) $z = 3x + y$, con $x = t^2 + 1$; $y = e^t$.

b) $z = xy + yu + xu$, con $x = t$; $y = e^{-t}$; $u = \log(t)$.

c) $z = e^{xy}$, con $x = t\cos t$; $y = t\,sen\,t$.

14.- Calcular $\frac{dz}{du}(1)$ en la función $z = 3x^2 + 2xy - y^2$, con $x = u^2 + 3u$; $y = 2u^2 - u$.

15.- Calcular $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial s}$ en la función $u = z\,sen\frac{y}{x}$, con $x = 3r^2 + 2s$; $y = 4r - 2s^3$, $z = 2r^2 - 3s^2$.

16.- Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y evaluarlas en el punto (x, y) = (0, 1), en los siguientes casos:

a) $z = u + v$, con $u = x + e^y$; $v = \log(y) + e^{-x}$.

b) $z = \frac{sen\,u}{v}$, con $u = s - t$; $v = s + x$; $s = y^2 - x$; $t = e^y$.

17.- Demostrar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$, si $z = ln(x^2 + xy + y^2)$.

18.- Demostrar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, si $z = xy + x\,e^{y/x}$.

19.- Demostrar que se verifica

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + xy\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = xyz,$$

siendo $z = e^y F\left(y\,e^{x^2/2y^2}\right)$ y F una función real de variable real derivable.

20.- Sea $f(x,y) = g(x^2 + y^2)$, siendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en cualquier punto de la recta real. Si $g'(5) = 3$, calcular $\nabla f(1,2)$.

21.- Determinar la diferencial de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $y = \ln x$, en 2

b) $y = \frac{x^2}{e^x}$, en 0

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, en $(1,1)$

d) $u = \left(xy + \frac{x}{y} \right)^z$, en $(1,1,1)$.

e) $z = \ln \frac{2x}{y^2}$, en $(1,e)$

j) $f(x,y) = x^2 e^{\frac{y}{x}}$, en (x, y) con $x \neq 0$

k) $z = (e^{x+y} + y,\ xy^2)$, en $(0,0)$

22.- Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$, utilizando el concepto de diferencial, estudiar la variación que experimenta la función al pasar de x=27 a x=26'9.

23.- Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones en la dirección y en el punto indicados:

a) $f(x,y) = 3 - 2x^2 + y^3$, en la dirección de $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2} \right)$ y en el punto P=(1,2)

b) $f(x,y) = x^2 + y + 1$, en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ y en el punto (0,0)

c) $f(x,y) = \log(x^2 + y^3)$, en la dirección de $v = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right)$ y en el punto $P = (1,3)$

d) $f(x,y,z) = x\,sen(yz)$, en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ y en el punto (1,3,0)

e) $f(x,y,z) = x\,seny + y\cos z + z\,senx$, en la dirección $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ y en el punto (0,0,0)

f) $f(x,y,z) = (x^2 + yz^2,\ sen(x^2 + y^2))$, en la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ y en el punto $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, 1)$

24.- Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en el punto $(1,2)$. Sabiendo que $f_v(1,2)=5$ y $f_w(1,2)=6$ con $v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $w=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, calcular $\nabla f(1,2)$.

25.- Dado el campo vectorial $f(x,y)=(xy,\ x^2,\ y^2)$, se pide:

a) Estudiar su diferenciabilidad en el punto $(-1,2)$.

b) En el caso de ser diferenciable, calcular su diferencial en dicho punto.

c) Hallar $f_v\,'$ en el punto $(-1,2)$ siendo $v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

26.- Calcular y'' en $y=\ln(x+\sqrt{4+x^2})$.

27.- Dada $f(x,y)=x\,e^{2y-x}$, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

28.- Calcular la matriz hessiana de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=x^4+y^4+4xy-2x^2-2y^2$.

b) $f(x,y)=x^2+y^2+xy-4\ln x-10\ln y,\ x,y>0$.

c) $f(x,y)=9x^2+y^2+6xy+12x+4y$.

d) $f(x,y)=x^3+y^3-9xy+27$.

e) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$.

f) $f(x,y,z)=xyz$.

29.- Si F y G son funciones reales de una variable real con derivadas de segundo orden continuas, demostrar que la función $z=x\,F\left(\frac{y}{x}\right)+G\left(\frac{y}{x}\right)$, satisface la siguiente ecuación:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)=0.$$

30.- Sabiendo que f y g son funciones reales de una variable real con derivadas de segundo orden y $z = f(x^2+y^2)+g(x^2+y^2)$, calcular:

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)-\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)-\frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+\frac{1}{y^3}\frac{\partial z}{\partial y}(x,y).$$

31.- Comprobar que $z=\log(x^2+y^2)$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

32.- Si f es una función real de variable real con derivada segunda, comprobar que la función $z = x\,f(x+y)+y\,f(x+y)$ satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

33.- Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones reales de variable real y $h(x,y)=f(y\cdot g(x))$. Suponiendo que existen f'' y g'' en todo $\mathbb{R}$, calcular $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)$.

34.- Calcular el desarrollo de Taylor hasta el orden 2 de las siguientes funciones en un entorno del punto que se indica:

a) $f(x)=\ln(1+x),\quad x=0$

b) $f(x)=e^x,\quad x=0$

c) $f(x)=\frac{1}{1+x},\quad x=0$

d) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2},\quad x=0$

e) $f(x)=\sqrt{1+x},\quad x=0$

f) $f(x)=senx,\quad x=0$

g) $f(x)=cosx,\quad x=0$

h) $f(x)=\frac{2x^2-3}{(x-1)^2},\quad x=0$

i) $f(x)=\ln(x-2x^2),\quad x=\frac{1}{3}$

j) $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\quad x=0$

k) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\quad x=1$

l) $f(x)=\sqrt[3]{6+x},\quad x=2$

m) $f(x)=(1+x)e^{-x},\quad x=0$

n) $f(x)=(1+e^x)^3,\quad x=\frac{1}{2}$

o) $f(x)=sen^2 2x,\quad x=0$

p) $f(x)=\ln(2x)-\frac{1}{x-1},\quad x=2$

q) $f(x) = e^x \ln(1-x)$, $x = 0$

r) $f(x) = \ln(9 - x^2)$, $x = 0$

s) $f(x,y) = e^{2x-3y}$, $(x,y) = (0,0)$

t) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, $(x,y) = (1,1)$

u) $f(x,y,z) = x + yz + e^y$, $(x,y,z) = (1,0,1)$

35.- Dada la función $f(x,y) = \sqrt{x+y}\,\ln y$, se considera la ecuación $f(x,y) = 2e$. Se pide:

a) Demostrar que la anterior ecuación define a y como función implícita de x en un entorno del punto $(0,e^2)$.

b) Calcular $y'(0)$.

36.- Dada la ecuación $e^z sen(x+y) + e^y sen(x+z) + e^x sen(y+z) = 0$, se pide:

a) Comprobar que define a z como función implícita de x y de y en un entorno del punto $(\pi,0,\pi)$.

b) Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}(\pi,0)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(\pi,0)$.

37.- Probar que la ecuación $x^2 y + xy^2 = 16$ define a y como función implícita de x en un entorno del punto (2,2). ¿Qué podemos decir del crecimiento de la función $y(x)$ en un entorno de x=2?

38.- Considerar la ecuación $3\alpha x^2 - \ln(yz) - \dfrac{3\alpha x}{yz} = 0$. ¿Para qué valores del parámetro α podemos asegurar que la ecuación anterior define implícitamente la función $x = x(y,z)$ en un entorno del punto (1,1,1)?

39.- Dada la ecuación $z\, sen\, x - y\, sen\, z = 0$, se pide:

a) Demostrar que define a z como función implícita de (x,y) en un entorno de $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Hallar el polinomio de Taylor de grado 1 en un entorno del punto $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ de la función definida en el apartado a).

40.- Sea $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $h(x,y) = sen(x^2+y) + x\,y + a^2\,y$.

a) ¿Para qué valores de a la ecuación $h(x,\,y)=0$ define a y como función implícita de x, $y=\varphi(x)$, en un entorno del punto (0, 0)?

b) Calcular $\varphi'(0)$.

c) ¿Define la misma ecuación en un entorno del (0,0) a x como función implícita de y para algún valor de a?

d) Sea $F(x,\,t) = (e^{x+t} + x^2 - 1,\, e^{\varphi(x)} + t\cos x - 1)$, con $\varphi(x)$ la función implícita anterior. Probar que $JF(0,0)$ es una matriz regular.

41.- Dada la ecuación $e^{x^2-y^2} + \alpha(x^2+y^2) = 1+\alpha$, se pide:

a) ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la ecuación $e^{x^2-y^2} + \alpha(x^2+y^2) = 1+\alpha$ define una función implícita $y = y(x)$ en un entorno del punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

b) Para los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, hallados en el apartado anterior, calcular $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

42.- Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \alpha\,y\,z - y\ln\left(1+z^2\right) + z\,cos(x+2y) + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Probar que $f(x,\,y,\,z) = 0$ define a z como función implícita de x e y en un entorno de $(\pi,\,0,\,1)$ para cualquier valor de α.

b) Calcular α para que $\frac{\partial z}{\partial x}(\pi,0) = 0 = \frac{\partial z}{\partial y}(\pi,0)$.

43.- Dada la ecuación $xy^2 - yx^2 + z^2 cos(xz) = 1$:

a) Probar que define a $z(x,y)$ como función implícita en un entorno del punto $(0,\sqrt{2},1)$.

b) Hallar el plano tangente a $z(x,y)$ en el punto $(0,\sqrt{2})$.

c) Hallar la derivada direccional de $z(x,y)$ en $(0,\sqrt{2})$ respecto de la dirección $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

44.- Sea $F:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z,t) = x^3 z + y^3 t^2 - 1$:

a) Probar que la ecuación $F(x,y,z,t) = 0$ define a la variable t como función de las variables (x, y, z) en un entorno del punto (0, 1, 0, 1).

b) Si $t = \varphi(x,y,z)$ es la función del apartado anterior, calcular $\nabla\varphi(0,1,0)$.

45.- Estudiar si son homogéneas las siguientes funciones indicando el grado de homogeneidad:

a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^4+y^4}}{x}$

b) $f(x,y) = 3x^4 + 4x^2y^2 + 5y^4$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$

d) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1/3}$

f) $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 15x - 12y$

g) $f(x,y) = 90x^{1/3}y^{1/3}$

h) $f(x,y) = x^a y^b$

i) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x^3y + x^2yz - 4xz^3}{x-2y}\right)^5$

j) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2} \ln \dfrac{y}{z}$

k) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2-y^2} + \sqrt{x+z}$

l) $f(x,y,z) = \sqrt[5]{\dfrac{x^6+y^4x^2+yz^5}{2z^3}}$

m) $f(x,y,z) = \ln \dfrac{x-2y}{y+3z}$

n) $f(x,y,z) = e^{3x+y} + \sqrt[3]{xz}$

o) $f(x,y,z) = e^{\sqrt{\frac{x^2}{yz}}}$

p) $f(x,y,z) = x\ln\dfrac{y}{z} + \sqrt{2yz} + 7$

46.- Para las funciones del ejercicio anterior, calcular las derivadas parciales. Comprobar el resultado del teorema de Euler.

47.- Dada $f(x,y) = x^4y^2e^{y/x}$, comprobar que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6f$. ¿Qué se deduce de la anterior igualdad?

48.- Sea f una función homogénea de grado m, tal que $f(-1,1) = 1$ y $f(-2,2) = 1$. Calcular m.

49.- Sea f una función diferenciable y homogénea de grado 2 con $\frac{\partial f}{\partial x}(3,2)=3$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(3,2)=4$. Calcular $f(3,2)$.

50.- De la función $f(x,y,z)$ se sabe que es diferenciable, homogénea de grado 3 y que las componentes de su vector gradiente en el punto $(1,2,3)$ son $(5,2,2)$. ¿Cuál es el valor de la función en el punto $(1,2,3)$?

51.- Sea $z=z(x,y)$ que verifica la ecuación $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$, siendo F una función con derivadas de primer orden, la segunda de ellas no nula. Se pide:

a) Demostrar que $z=z(x,y)$ es homogénea de grado 1.

b) ¿Es homogénea $\frac{\partial z}{\partial x}$? En caso afirmativo, ¿de qué grado? Razona la respuesta.

52.- Sea $f(x,y)$ homogénea de grado 1 con derivadas de segundo orden. Probar que:

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{xy}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

53.- Sea $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. Demostrar que:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

54.- Dada la función $f(x,y,z)=e^{tg\frac{x^2+y^2+z^2}{xy}}$:

a) Comprobar que es homogénea de grado 0.

b) Calcular $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

55.- Sean $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ funciones diferenciables y homogéneas de grados 4 y 1, respectivamente. Probar que si $h(x,y,z)=f(x,y,z).g(x,y,z)$, se verifica:

$$x\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z)=5\,h(x,y,z).$$

56.- Sea $f(x,y)$ diferenciable tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=1$, $f(1,1)=2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=1$, $f(1,2)=5$. Decir si f es homogénea y en caso afirmativo de qué grado.

57.- Sea $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$. Se pide:

a) Calcular las curvas de nivel de $f(x, y)$ y representarlas gráficamente.

b) Calcular $\nabla f(2,1)$.

c) Calcular la derivada direccional de f en el punto (2,1) según la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

d) Teniendo en cuenta $\begin{cases} x = 2+\ln t^2 \\ y = e^{t^3-1} \end{cases}$, calcular $\frac{df}{dt}(1)$.

58.- Sea la función $f(x,y)=ln(1+x^2+2y^2)$. Se pide:

a) Calcular el dominio de f.

b) Calcular el vector gradiente de f en (x,y).

c) ¿Es la función f diferenciable?

d) Calcular la derivada direccional de la función f respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ en el punto (1,1).

e) ¿Verifica la función f las condiciones del Teorema de Schwarz?

f) Utilizando el resultado del apartado anterior, calcular la matriz Hessiana de f en (x, y).

59.- Sea la función $f(x,y)=\ln\left(\frac{y}{x^2}+1\right)-1$.

a) Determinar las curvas de nivel de la función y representarlas gráficamente.

b) Calcular $\nabla f(1,2e)$.

c) Dado el vector $v=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, calcular la derivada direccional $f_v(1,2e)$.

d) Probar que la curva de nivel 0 de f define implícitamente a la variable y como función de la variable x. Derivando implícitamente calcular $y'(1)$.

60.- Considerar la función de dos variables $f(x,y)=\dfrac{y}{x+2y}$.

a) Determinar su dominio y representarlo gráficamente.

b) Determinar y representar las curvas de nivel de f.

c) Probar que no existe el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

d) Determinar los pares $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tales que la ecuación $f(x,y)=\dfrac{b}{a+2b}$ define a la variable y como función de la variable x en un entorno del punto (a,b). Para cada uno de los pares anteriores, calcular $y'(a)$ por derivación implícita.

61.- Sea $F(x,y,z)=x^2zy+e^{xz}-z^2y+4y$:

a) Sin calcular las derivadas parciales, razona si la siguiente igualdad es cierta:

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=4F(x,y,z).$$

b) Calcular $\nabla F(0,2,1)$.

c) Calcular la derivada direccional de $F(x,y,z)$ respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ en el punto (0,2,1).

d) Demuestra que la ecuación $F(x,y,z)=7$ define a x como función implícita de y, z (x = $f(y, z)$) en un entorno del punto (0,2,1).

e) Calcular $\nabla f(2,1)$.

f) Calcular la derivada direccional de $f(y,z)$ respecto de la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ en el punto (2,1).

62.- Sabiendo que la oferta de un bien en función de su precio p es:

$$S(p)=\begin{cases}\dfrac{p^2}{20} & \text{si } 0\le p<10\\ 2p-15 & \text{si } 10\le p\le 30\end{cases}$$

a) Determine el dominio de la función de oferta.

b) ¿Cuál es la oferta si el precio es de 5 unidades monetarias?

63.- La demanda de un bien en función de su precio viene dada por una función de la forma $D(p) = ap^2 - b$. Determinar los valores de *a* y de *b* sabiendo que *D*(8) = 1 y que $\lim_{p \to 0} D(p) = 5$.

64.- El coste total de producir *q* unidades de un artículo es $C(q) = 4q^3 - 6q^2 + 18q + 12$.

a) Calcule el coste de producir 1 unidad.

b) Si se producen 20 unidades, ¿Cuál es el coste medio de producir cada una de ellas?

c) Escriba la función de coste medio.

d) Escriba la función de coste marginal.

65.- El beneficio, *B*(*p*), que obtiene una empresa conocido el precio de venta del producto, $p \in [2,6]$, viene dado por dos segmentos rectilíneos cuyas pendientes son en ambos casos 0'2. Además se sabe que *B*(3) = 50 y que al ir aumentando el precio y pasar de 4 unidades monetarias se pierde una subvención que hace bajar el beneficio en 10 unidades. Escriba y represente esta función de beneficio.

66.- La función de costes según el número de horas trabajadas, *x*, es de la forma $C(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in [0,100] \\ c\sqrt{x} & \text{si } x \in (100,200] \end{cases}$. Determine *a*, *b*, *c* sabiendo que *C*(*x*) es continua, que la pendiente de la recta tangente en *x* = 50 es 8 y que 121 horas trabajadas suponen un coste igual a 990.

67.- La función de producción de un bien es $Q(K,L) = 8\sqrt[3]{K^2 L}$, donde *Q* es la cantidad de producción, *K* y *L* la cantidad de inputs capital y trabajo respectivamente.

Demostrar que la productividad del trabajo es una función de la ratio capital-trabajo (sólo depende de la proporción entre el capital y el trabajo).

68.- Sea la función de producción de una empresa $Q(K,L) = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{2}{5}}$, donde *K* es el capital, *L* el trabajo y *Q* la producción obtenida.

a) Suponiendo que se están utilizando 9 unidades de capital y 32 de trabajo, ¿qué input se deberá aumentar para generar un mayor incremento de la producción, suponiendo que el otro se mantiene constante?

b) Suponiendo que se están utilizando 9 unidades de capital y 32 de trabajo, ¿cuál sería aproximadamente la variación de la producción si se incrementa en 2 unidades el capital y en 1 el trabajo?

c) Sin realizar las derivadas, calcular la expresión $K\dfrac{\partial Q}{\partial K}(K,L)+L\dfrac{\partial Q}{\partial L}(K,L)$.

69.- Una empresa produce dos productos en cantidades q_1 y q_2 respectivamente, siendo sus ingresos $I(q_1,q_2)=q_1q_2$. Cada uno de los productos tiene una función de producción que depende del capital K y del trabajo L que vienen dadas por:

$$q_1(K,L)=3K+2L, \qquad q_2(K,L)=6\sqrt{K^2L}$$

a) Calcular $\dfrac{\partial I}{\partial K}(K,L), \dfrac{\partial I}{\partial L}(K,L)$ cuando se utilizan 4 unidades de capital y 9 de trabajo.

b) ¿Son homogéneas las funciones de producción?, ¿de qué grado?

c) Sin hacer las derivadas, calcular $K\dfrac{\partial I}{\partial K}(K,L)+L\dfrac{\partial I}{\partial L}(K,L)$.