

Introducción a la teoría de integración

Nota: se entenderá $\log x = \log_{10} x$ y $\ln x = \log_e x$

1.- Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1) $\int \frac{3}{1+2y} dy$

2) $\int \frac{6z}{(z^2-5)^5} dz$

3) $\int \frac{1}{t^2} \sqrt{-1+\frac{1}{t}} dt$

4) $\int (5-2x+\sqrt[4]{x^3}+8e^x) dx$

5) $\int \frac{t}{1+t^2} dt$

6) $\int \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} dy$

7) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 8\frac{1}{\sqrt{x^3}} \right) dx$

8) $\int \left(\frac{1}{3}x + 5 \right)^9 dx$

9) $\int \frac{\ln t}{t} dt$

10) $\int \frac{5^t - 3^t}{7^t} dt$

11) $\int \frac{(\sqrt{x}-2x)^2}{\sqrt{x}} dx$

12) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+13} dx$

13) $\int \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} dx$

14) $\int \operatorname{tg}(x) dx$

15) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \operatorname{sen} x dx$

16) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

18) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} dx$

19) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

20) $\int \frac{4-2x}{x^2-4x+3} dx$

21) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+3} dx$

22) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$

23) $\int \frac{x^2 dx}{(x^3-1)^2}$

24) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$

2.- Calcular las siguientes integrales definidas:

1) $\int_1^2 \left(x^3 - \frac{1}{x^2} + 2 \right) dx$

2) $\int_0^1 e^{-t+1} dt$

3) $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

4) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \sqrt{x} \right) dx$

5) $\int_{-2}^0 \left(\frac{x+4}{3} \right)^2 dx$

6) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

3.- Resolver los siguientes problemas de aplicación del cálculo integral al cálculo de áreas:

- 1) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $3y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.
- 2) Calcular el área de la figura plana limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$.
- 3) Calcular el área de la figura plana limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 2x$, $y = \frac{x^2}{2}$.
- 4) Calcular el área de la figura limitada por las curvas $x = 0$, $x = 2$, $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$.
- 5) Calcular el área limitada por la curva $y = x^2 - 5x + 6$ y la recta $y = 2x$.
- 6) Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$.
- 7) Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$.
- 8) Calcular el área limitada por las parábolas $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.

4.- Resolver los siguientes problemas de aplicación del cálculo integral:

1) Para un cierto país, la propensión marginal al consumo está dada por $\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}$ donde el consumo C es una función del ingreso nacional I (en millones de euros). Determinar la función de consumo para el país si se sabe que el consumo es de 1 millón de euros cuando $I=12$.

2) La función de coste marginal para el producto de un fabricante está dada por:

$\frac{dc}{dq} = 10 - \frac{100}{q+10}$ donde c es el coste total en euros cuando se producen q unidades.

Cuando se producen 100 unidades el coste promedio es de 50 euros la unidad. Con aproximación a la unidad de euro más cercana, determinar el coste fijo del fabricante.

3) El coste marginal de la fabricación de un determinado producto viene dado por la función $CMg(x) = 6 - \frac{2}{\sqrt{x}}$. Sabiendo que el coste de funcionamiento es de 84000 euros, hallar la función de coste total de fabricación de dicho producto.

- 4) Se estima que dentro de t meses la población de cierta ciudad cambiará a razón de $4 + 5t^{2/3}$ personas por mes. Si la población actual es de 10.000 personas, ¿cuál es la población dentro de 8 meses?
- 5) Se estima que dentro de t años la población de cierta comunidad a la orilla de un lago cambiará a razón de $0.6t^2 + 0.2t + 0.5$ miles de personas al año. Los ambientalistas han encontrado que el nivel de contaminación del lago aumenta a razón de, aproximadamente, 5 unidades por 1.000 personas. ¿En cuánto aumentará la contaminación del lago durante los próximos 2 años?
- 6) Un fabricante manifestó que el coste marginal es $6q + 1$ euros por unidad cuando se producen q unidades. El coste total (incluidos los gastos indirectos) de producir la primera unidad es de 130 euros. ¿Cuál es el coste total de producir las primeras 10 unidades?