MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1.- Calcular:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 10 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ñ) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

o) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ p) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ q) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}$

r) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ s) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ -1 & a & 1 & 1 & . & . & 1 \\ -1 & -1 & a & 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -1 & -1 & -1 & -1 & . & . & a \end{vmatrix}$

t) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & n-1 \\ 2 & 3 & 4 & . & . & n \\ 3 & 4 & 5 & . & . & n+1 \\ . & . & . & . & . & . \\ n-2 & n-1 & n & . & . & 2n-2 \\ n-1 & n & n+1 & . & . & 2n-1 \end{vmatrix}$

2.- Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 4 & x & 6 \\ 5 & 7 & 12 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$.

3.- Demostrar:

a) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -2(x^3+y^3)$ b) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2z^2$

4.- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular $\left|A - \lambda I_3\right|$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

5.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, obtener el valor de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+4 & y+4 & z+4 \end{vmatrix}$.

6.- Sean $A, B \in M_4$ con $|A|=3$, $|B|=-2$. Calcular:

a) $|2A|$. b) $|\frac{1}{2}B|$. c) $|BA^t|$.

d) $|(BA)^t|$. e) $|(B^tA^tB)^t|$.

7.- Calcular el rango de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

$$D=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad H=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.- Calcular, según los valores reales del parámetro a, el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}$$

9.- Estudiar si las siguientes matrices son inversibles. En caso afirmativo calcular la matriz inversa.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.- Estudiar la existencia de la matriz inversa según los valores de $m \in \mathbb{R}$. Calcular la matriz inversa en los casos que sea posible.

$$A=\begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

11.- Estudiar para qué valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices no tienen inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1-m & 2 \\ 3 & 2-m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -m & 5 \\ 2 & 3-m \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2-m & 3 & 1 \\ 1 & 1-m & 4 \\ 0 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} m & 9 & 4 \\ 4 & m & -1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ -1 & 3 & m-1 \end{pmatrix}$$

12.- Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz A que verifica $P^{-1}AP = B$.

13.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Utiliza la Regla de Cramer para calcular las soluciones:

a) $\left.\begin{aligned} x+y-z&=3 \\ 5x-y+2z&=5 \\ -3x+3y-4z&=1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x+y-z&=1 \\ x+2y+z&=2 \\ x+3y-z&=0 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} x+y-2z+t+3s&=1 \\ 2x-y+2z+2t+6s&=2 \\ 3x+2y-4z-3t-9s&=3 \end{aligned}\right\}$

14.- Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales según los valores reales de los parámetros (m, a y b). Utiliza la Regla de Cramer para calcular las soluciones:

a) $\left.\begin{aligned} mx+y-z&=1 \\ x+2y+z&=2 \\ x+3y-z&=0 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} mx+y+z&=m \\ x+my+z&=1 \\ x+y+mz&=1 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=m \\ x+(1+m)y+z&=2m \\ x+y+z&=4 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x+my-z&=0 \\ 2x-3y-2z&=0 \\ x+2y+z&=0 \end{aligned}\right\}$ e) $\left.\begin{aligned} mx+y+3z&=3 \\ x-y-z&=0 \\ 5x-3y-2z&=6 \end{aligned}\right\}$ f) $\left.\begin{aligned} x-2y+z&=-1 \\ x+y+3z&=4 \\ 5x-y+mz&=10 \end{aligned}\right\}$

g) $\left.\begin{aligned} -x+2y-2z&=0 \\ 2x-y+az&=b \\ 2x-2y+3z&=1+b \end{aligned}\right\}$ h) $\left.\begin{aligned} 2x+ay+z&=7 \\ x+ay+z+t&=b \\ x+2ay+t&=-1 \\ bx+ay&=b \end{aligned}\right\}$

15.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 3 & 2 & 4m \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ con $m \in \mathbb{R}$:

a) ¿Para que valores del parámetro m, es la matriz A inversible?.

b) Resolver el sistema lineal $AX = 0_3$ utilizando el apartado anterior.

16.- Considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con a un parámetro real.

a) Discutir en función de a el sistema $AX = B$.

b) En los casos que sea posible, calcular las soluciones de $AX = B$.

17.- En un mercado con competencia perfecta las funciones de oferta y demanda de los bienes están dadas por:

$Q_{1d} = 10 - 2P_1 + 4P_2$ $\qquad$ $Q_{2d} = 10 + 5P_1 - 3P_2$

$Q_{1s} = 20 + 3P_1 - 2P_2$ $\qquad$ $Q_{2s} = 30 - 7P_1 + 5P_2$

Donde Q_{id} es la cantidad demandada de bien i, Q_{is} es la cantidad ofertada de bien i y P_i es el precio de mercado del bien i, para i=1,2. Calcular los precios para los que el mercado está en equilibrio y la cantidad demanda y ofertada de cada bien en esta situación.

18.- La condición de equilibrio para el precio de tres bienes en un mercado queda determinado por la siguiente condición:

$$\begin{aligned} 11P_1 - P_2 - P_3 &= 31 \\ -P_1 + 6P_2 - 2P_3 &= 26 \\ -P_1 - 2P_2 + 7P_3 &= 24 \end{aligned}$$

Siendo P_1, P_2 y P_3 los precios de estos tres bienes. Calcular el precio de equilibrio de cada bien.