DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS

1.- Considerar los vectores u = (1, -3, 2) y v = (2, -1, 1) de $\mathbb{R}^3$:

a) Escribir, si es posible, los vectores (1, 7, -4) y (2, -5, 4) como combinación lineal de u y v.

b) ¿Para qué valores de x es el vector (1, x, 5) una combinación lineal de u y v?

2.- Los vectores $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (2,1,3)$ y $v_3 = (5, 2, 10)$ de $\mathbb{R}^3$, ¿son linealmente independientes? En caso de no serlo hallar la relación de dependencia.

3.- Dados los vectores $u_1 = (2,-1,0)$, $u_2 = (0,1,-1)$ y $u_3 = (8,3,1)$ de $\mathbb{R}^3$, estudiar si son linealmente dependientes o independientes.

4.- Dados los vectores $u_1 = (1,0,-1,0)$, $u_2 = (2,0,3,-1)$, $u_3 = (1,1,-1,1)$ y $u_4 = (2,1,-2,1)$ de $\mathbb{R}^4$, estudiar si son linealmente independientes. En caso de no serlo hallar la relación de dependencia.

5.- Dados los vectores de $\mathbb{R}^4$ $v_1 = (1,1,0,m)$, $v_2 = (3,-1,n,-1)$ y $v_3 = (-3,5,m,-4)$, determinar los valores que han de tomar los parámetros m y n para que los tres vectores sean linealmente dependientes.

6.- Sean u = (-1, 0, 0), v = (1, 1, 0) y w = (-1, 1, -1) vectores de $\mathbb{R}^3$:

a) Demostrar que $\{u, v, w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Hallar las coordenadas respecto de esta base del vector cuyas coordenadas respecto de la base canónica son 1, 0, 2.

c) Hallar las coordenadas respecto de la base canónica del vector $a = 3u - v + 5w$.

7.- Sea $A \in M_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de A y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vector propio de A asociado a λ. Probar que:

a) $\alpha\lambda$ es valor propio de la matriz αA para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}$ es vector propio de αA asociado a $\alpha\lambda$.

b) λ^p es valor propio de A^p y $\mathbf{x}$ es vector propio de A^p asociado a λ^p.

c) $|A| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ es valor propio de A.

d) Si A es regular entonces $\lambda \neq 0$. Además, λ^{-1} es valor propio de A^{-1} y $\mathbf{x}$ es vector propio de A^{-1} asociado a λ^{-1}.

8.- Sean $A, B \in M_n$ matrices semejantes. Probar que:

a) $|A| = |B|$.

b) A^p es semejante a B^p para cualquier $p \in \mathbb{N}$.

c) Si A es regular entonces B es regular y A^{-1} es semejante a B^{-1}.

9.- Sea $A \in M_n$. Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico.

10.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudiar si 3 es o no valor propio de A.

b) ¿Son los vectores (1,1,1) y (0,0,1) vectores propios de A? En caso afirmativo, buscar el valor propio asociado.

11.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudiar si el vector $(-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ es o no un vector propio de la matriz A. En caso afirmativo determinar el valor propio asociado.

b) Lo mismo para el vector (-1,0,1).

12.- Para cada una de las siguientes matrices indicar razonadamente si es diagonalizable o no. Además:

a) En caso afirmativo, dar una matriz semejante diagonal y la matriz regular de paso.

b) En caso negativo, calcular los valores propios y los vectores propios asociados a cada valor propio.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_9 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

13.- Una matriz $A \in M_2$ verifica las siguientes condiciones: $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y (2,-1) es vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = -2$. Hallar la matriz A indicando si es diagonalizable o no. En caso afirmativo dar una matriz semejante diagonal D y la matriz de paso P tal que $D = P^{-1}AP$.

14.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular los valores de los parámetros a y b para que el vector (2,-1) sea vector propio de A asociado al valor propio 2.

15.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ no diagonal de valores propios -1, 1, 2 con vectores propios asociados (1,0,-1), (-1,1,0), (3,-3,1) respectivamente.

16.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ no diagonal de valores propios $\lambda_1 = 1$ simple y $\lambda_2 = 2$ doble con vectores propios asociados (1,1,0), (1,0,0) respectivamente.

17.- Encontrar una matriz $A \in M_3$ con valores propios $\lambda_1 = -1$ doble, $\lambda_2 = 3$ simple y con vectores propios asociados (1,0,2), (-1,0,0) y (0,1,1) respectivamente.

18.- Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular los valores de los parámetros a y b para que A tenga como valores propios 1 y -1. ¿Es A una matriz diagonalizable?.

19.- Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) ¿Para qué valores del parámetro a $\lambda = -2$ es valor propio de A?.

b) ¿Para qué valores del parámetro a es la matriz A diagonalizable?.

20.- Determinar una matriz $A \in M_3$ tal que $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que sus vectores propios sean los vectores de $\mathbb{R}^3$ no nulos de los conjuntos $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, z = 0\}$.

21.- La matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$ admite como vectores propios (-1,-1,0), (1,0,-2) y $(0,-1,1)$ asociados a los valores propios 3, 0 y 3/2 respectivamente. Se pide:

a) Hallar los elementos desconocidos de A.

b) ¿Es A diagonalizable?. En caso afirmativo, diagonalizarla.

22.- Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar sus valores y vectores propios. ¿Es A diagonalizable?.

b) Comprobar que se cumple que el determinante de la matriz A es el producto de sus valores propios.

23.- Comprobar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ tienen los mismos valores propios pero sin embargo no son semejantes.

24.- Calcular A^{100} y, en general, A^k, con $k \in \mathbb{N}$, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

25.- Calcular A^k con $k \in \mathbb{N}$ impar para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

26.- Calcular A^n $\forall n \in \mathbb{N}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

27.- Calcular una matriz $A \in M_3$ simétrica que verifique: $v=(1,-1,0)$ es vector propio de A,

$A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $|A| = 0$. Calcular A^{50}.

28.- Determinar para qué valores de los parámetros $b, c \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices son diagonalizables. En los casos que lo sea, encontrar una matriz diagonal semejante a la dada.

$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & c \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

29.- Para cada una de las siguientes matrices A_i, i=1,2,3, encontrar si es posible una matriz regular P y una matriz diagonal D de forma que $D = P^{-1} A_i P$.

$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

30.- El polinomio característico de una matriz A de orden 3 es $P(\lambda) = -\lambda^3 + 21\lambda - 20$. Con estos datos, ¿puedes justificar si A es inversible y/o diagonalizable?

31.- Los valores propios de una cierta matriz $A \in M(n \times n)$ diagonalizable son las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 - 5\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda + 4$.

a) Determinar los valores propios y su multiplicidad.

b) Determinar la dimensión n de la matriz A y $Rg(A)$.

c) Calcular, si es posible, $|A^{-1}|$ y $\left|-\frac{1}{2}A^{-1}\right|$.

d) Calcular los valores propios de A^2 y su multiplicidad.

32.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular valores y vectores propios de A.

b) ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo calcular una matriz semejante diagonal D y una matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.

c) ¿Existe algún valor del parámetro a para que $(3,-6,a)$ sea vector propio de A?

33.- Sea A una matriz de orden 3 cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda + 6$:

a) Calcular los valores propios de A y el determinante de A.

b) Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $AX = 0$ es compatible determinado.

ii) Existe una matriz D diagonal y una matriz P regular tal que $D = P^{-1}AP$.

34.- Dada una matriz A de orden 4 simétrica cuyos valores propios son 1, 3 y -5 doble:

i) Razonar si existe la matriz A^{-1} y, en caso afirmativo, calcule su determinante.

ii) ¿Cuánto vale el rango de la matriz $A + 5I_4$?

35.- Sea $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ con m número real. Se pide:

a) Estudiar la existencia de la matriz inversa de A según los valores del parámetro m. Calcula, cuando sea posible, A^{-1}.

b) Determinar los valores del parámetro m para que A sea diagonalizable.

c) Calcular el polinomio característico y los valores propios de la matriz A.

d) Para $m = 0$ calcular una matriz diagonal D y una matriz P tales que $D = P^{-1}AP$.

36.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular los valores propios de A.

b) Calcular los vectores propios de A.

c) ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo, calcular una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que $D = P^{-1}AP$.

d) Calcular los valores propios de A^3.