

FORMAS CUADRÁTICAS

1.- Considerar la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ de matriz asociada

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Expresar $Q(\mathbf{x})$ en forma polinómica.
- b) Encontrar, por el método de valores propios, una expresión diagonal para $Q(\mathbf{x})$.
- c) Clasificar $Q(\mathbf{x})$.

2.- Considerar la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ de matriz asociada

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Expresar $Q(\mathbf{x})$ en forma polinómica.
- b) Encontrar, por formación de cuadrados, una expresión diagonal para $Q(\mathbf{x})$.
- c) Clasificar $Q(\mathbf{x})$.

3.- Para la forma cuadrática $Q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$ se pide:

- a) Encontrar una expresión diagonal para Q .
- b) Clasificar Q .

4.- Para cada una de las siguientes matrices, se pide:

- a) Encontrar una matriz diagonal congruente con la matriz dada.
- b) Clasificar la forma cuadrática que representa.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

5.- Clasificar según su signo las siguientes formas cuadráticas:

- a) $Q(x, y) = 3x^2 - 4xy + 7y^2$.
- b) $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$.
- c) $Q(x, y) = 6xy - 2x^2 - 5y^2$.
- d) $Q(x, y) = 4y^2 + 8xy$.
- e) $Q(x, y, z) = y^2 + 2xy + 2yz$.
- f) $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xz + 2xy + 4yz$.
- g) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xz + 2xy + 2yz$.
- h) $Q(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy$.
- i) $Q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$.
- j) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
- k) $Q(x, y, z) = -4x^2 + y^2 + 3z^2 + 3xz + yz$.
- l) $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2xz + 3y^2 + 2z^2$.
- m) $Q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 3z^2 - 3xy + 4yz - 2xz$.
- n) $Q(x, y, z) = x^2 + 10y^2 + 6xy$.
- o) $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$.
- p) $Q(x, y, z, t) = 2xz - 3yt + 2xt - t^2$.
- q) $Q(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z^2 + 2xy + 4yz$.
- r) $Q(x, y, z) = 2xy + 4yz - 4xz - x^2 - y^2 + 4z^2$.

6.- Demostrar que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

7.- Determinar para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ las siguientes formas cuadráticas son semidefinidas indicando si es positiva o negativa.

- a) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + \alpha z^2 - 2xz$.

b) $Q(x, y, z) = x^2 + \alpha y^2 + \alpha z^2 + 2yz$.

8.- Clasificar según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ la forma cuadrática de expresión

$$Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\beta yt + 2\beta xz.$$

9.- Estudiar, según los valores del parámetro a , el signo de la forma cuadrática de

matriz asociada $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

10.- Considerar la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es definida

negativa para algún valor del parámetro a ?

11.- Clasificar las siguientes formas cuadráticas restringidas:

a) $Q(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}xy$ sobre $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - \sqrt{2}y = 0\}$.

b) $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz + 4yz$ para los vectores $x + 2y - z = 0$, $2x - 3y + z = 0$.

c) $Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy + 2yz$ para los vectores $x - y + z = 0$.

d) $Q(x, y, z, t) = x^2 - z^2 + 2xz + xt + 2yz$ para los vectores $x + y - z = 0$, $y - t = 0$.

12.- Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ restringida a:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z\}$.

13.- Clasificar $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ restringida a:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0\}$.

b) $S = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

14.- Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ sobre el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$.

15.- Considerar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = 4x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xz$. Se pide:

- a) Encontrar una expresión diagonal para Q .
- b) Clasificar Q según su signo.
- c) Clasificar Q restringida a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$.

16.- Considerar la forma cuadrática de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde b es un

parámetro real. Se pide:

- a) Determinar su signo según los valores del parámetro b .
- b) Determinar su signo restringida a los vectores de la forma $y = 2z$ para cualquier valor de b .

17.- Sea $Q(x, y, z) = y^2 - xy - xz - yz$. Se pide:

- a) Encontrar una expresión diagonal para Q .
- b) Clasificar Q .
- c) Clasificar según los valores del parámetro α Q restringida al subconjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = \alpha z\}$.

18.- Sea $Q(x, y, z) = 2ax^2 + y^2 + z^2 + 4axz$, con $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

- a) Clasificar Q según los valores del parámetro a .
- b) Para $a = -1$, encontrar subconjuntos S_1 y S_2 de \mathbb{R}^3 tales que Q restringida a S_1 sea definida positiva y Q restringida a S_2 sea definida negativa.

19.- Considerando la forma cuadrática $Q(x, y, z)$ representada por la matriz

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, responde razonadamente las siguientes cuestiones:

- a) ¿La forma cuadrática Q admite la expresión $Q(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = -2\tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 - 5\tilde{z}^2$?
- b) Justificar si existe algún $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ para el que se verifique que $Q(x_0, y_0, z_0) > 0$.
- c) Definir, si es posible, un subconjunto de \mathbb{R}^3 en el que la forma cuadrática Q sea definida negativa.

20.- Dada la forma cuadrática $Q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - 4z^2 + 4zy$. Se pide:

- a) Calcular una expresión diagonal para Q .

- b) Justificar si existe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $Q(x_0, y_0, z_0) < 0$.
- c) Estudiar el signo de Q restringida $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\}$.

21.- Dada la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xz$:

- a) Clasificar $Q(x, y, z)$.
- b) ¿Puede ser $Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 + 2\bar{z}^2$ una expresión diagonal de $Q(x, y, z)$? Razonar la respuesta.

22.- Ante lo elevado del déficit público de un país imaginario, el gobierno decide crear un nuevo impuesto T cuyo importe es función de los pagos (o devoluciones en su caso) por el impuesto de las personas físicas, R , y de los pagos por el impuesto del patrimonio, P , de tal manera que $T = 2R^2 + 4P^2 - 4RP$. El gobierno antes de ponerlo en marcha quiere asegurarse de que la recaudación por dicho impuesto será mayor que cero para cada individuo, es decir, no está dispuesto a devolver dinero a ningún contribuyente por este concepto.

Comprobar que el impuesto cumplirá su finalidad recaudadora con todos y cada uno de los contribuyentes.

23.- Los economistas de una empresa aseguran que la función de producción es del tipo:

$P = L^2 + K^2 - 2LK$, siendo L y K el número de trabajadores y de máquinas respectivamente. Además se sabe que para que funcione cada máquina se necesitan dos trabajadores. Comprobar que efectivamente, P es una función de producción.

24.- Un inversionista estima que al invertir en tres valores, A , B y C , la cartera resultante tendrá una rentabilidad de $U(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3$, siendo x_1 , x_2 y x_3 las rentabilidades en el momento de la compra de cada valor A , B y C respectivamente.

- a) Analizar si dicha cartera puede generar pérdidas.
- b) Valorar cómo afecta a la respuesta anterior una situación económica en que los tres productos partiesen de la misma rentabilidad.
- c) Si el inversionista sabe que la rentabilidad del producto A es el doble que la de B , ¿habrá ganancias?