Solución a un ejercicio del Tema 2

En un determinado país, hay tres empresas P, Q y R, dedicadas a la inspección técnica de vehículos, que es obligatoria cada año. P y Q son empresas privadas y R es pública. Se comprueba que, de forma regular y de una año al siguiente, la empresa P mantiene el 50% de sus clientes, pero el 30% pasa a la empresa Q y el 20% a la R. La empresa Q logra mantener el 80% de sus clientes, y pierde un 20% repartido igualitariamente entre P y R. Finalmente, R conserva el 60% de su clientela y del 40% restante, el 30% se va a P y el 10% a Q. Se pide:

a) Expresar el número de clientes de cada empresa en el año $t+1$ en función de los del año t.
b) Indicar la evolución del mercado a largo plazo.
c) Analizar cuál es el reparto de clientes entre las tres empresas que se mantiene a lo largo del tiempo.

Solución

a) Denotamos por p_t, q_t y r_t al número de clientes de la empresa P, Q y R en el año t. Por tanto, se verifican las siguientes igualdades que relacionan el número de clientes de cada empresa en el año $t+1$ y en el año t:

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= \frac{50}{100} p_t + \frac{10}{100} q_t + \frac{30}{100} r_t \\ q_{t+1} &= \frac{30}{100} p_t + \frac{80}{100} q_t + \frac{10}{100} r_t \\ r_{t+1} &= \frac{20}{100} p_t + \frac{10}{100} q_t + \frac{60}{100} r_t \end{aligned}$$

y expresado en forma matricial, $\begin{pmatrix} p_{t+1} \\ q_{t+1} \\ r_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'5 & 0'1 & 0'3 \\ 0'3 & 0'8 & 0'1 \\ 0'2 & 0'1 & 0'6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_t \\ q_t \\ r_t \end{pmatrix}$

b) Para determinar la evolución del mercado a largo plazo, necesitamos conocer el reparto de clientes entre las tres empresas cuando t sea tan grande como queramos.

Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0'5 & 0'1 & 0'3 \\ 0'3 & 0'8 & 0'1 \\ 0'2 & 0'1 & 0'6 \end{pmatrix}$ y p_0, q_0 y r_0 el número de clientes de la empresa P, Q y R, en el año inicial, $t = 0$. De esta manera, el número de clientes de cada empresa en el año siguiente al inicial viene dado por

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix},$$

dos años después del inicial por $\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = A\,A \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.

Siguiendo este proceso, el número de clientes de cada empresa t años después del inicial viene dado por $\begin{pmatrix} p_t \\ q_t \\ r_t \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$, con t = 0, 1, 2…

A continuación se calcula la potencia A^t comprobando previamente que la matriz A es diagonalizable (ya que si esto ocurre el cálculo de las potencias de las matrices se simplifica).

Los valores propios de A son las soluciones reales de la ecuación característica de A, $|A-\lambda I_3| = 0$.

$|A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix} 0'5-\lambda & 0'1 & 0'3 \\ 0'3 & 0'8-\lambda & 0'1 \\ 0'2 & 0'1 & 0'6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1'9\lambda^2 - 1'08\lambda + 0'18 = 0$, cuyas soluciones son $\lambda = 0'3$, $\lambda = 1$ y $\lambda = 0'6$.

Al ser los tres valores propios distintos, se deduce que A es diagonalizable, es decir, existe una matriz P regular tal que $D = P^{-1}AP$, siendo D la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 0'3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0'6 \end{pmatrix}$.

De la igualdad $D = P^{-1}AP$ se obtiene que $A = PDP^{-1}$, luego, $A^t = PD^tP^{-1}$.

Para obtener la matriz P se han de calcular los vectores propios de A.

▪ Para $\lambda = 0'3$, se ha de resolver el sistema homogéneo $(A-0'3I_3)X = O$:

$\begin{pmatrix} 0'2 & 0'1 & 0'3 \\ 0'3 & 0'5 & 0'1 \\ 0'2 & 0'1 & 0'3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cuyas soluciones son $x = -2z$, $y = z$, con $z \in \mathbb{R}$

Así, un vector propio asociado al valor propio 0’3 es (-2, 1, 1).

▪ Para $\lambda = 1$, se ha de resolver el sistema homogéneo $(A\text{-}1I_3)X = O$:

$$\begin{pmatrix} -0'5 & 0'1 & 0'3 \\ 0'3 & -0'2 & 0'1 \\ 0'2 & 0'1 & -0'4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, cuyas soluciones son $x = z$, $y = 2z$, con $z \in \mathbb{R}$

Así, un vector propio asociado al valor propio 1 es (1, 2, 1).

▪ Para $\lambda = 0'6$, se ha de resolver el sistema homogéneo $(A\text{-}0'6I_3)X = O$:

$$\begin{pmatrix} -0'1 & 0'1 & 0'3 \\ 0'3 & 0'2 & 0'1 \\ 0'2 & 0'1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, cuyas soluciones son $x = z$, $y = -2z$, con $z \in \mathbb{R}$

Así, un vector propio asociado al valor propio 0’6 es (1, -2, 1).

Por tanto, $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Así, $$A^t = PD^tP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0'3^t & 0 & 0 \\ 0 & 1^t & 0 \\ 0 & 0 & 0'6^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8.0'3^t+3+0'6^t & 3\text{-}3.0'6^t & -8.0'3^t+3+5.0'6^t \\ -4.0'3^t+6\text{-}2.0'6^t & 6+6.0'6^t & 4.0'3^t+6\text{-}10.0'6^t \\ -4.0'3^t+3+0'6^t & 3\text{-}3.0'6^t & 4.0'3^t+3+5.0'6^t \end{pmatrix}$$

Por tanto, $$\begin{pmatrix} p_t \\ q_t \\ r_t \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8.0'3^t+3+0'6^t & 3\text{-}3.0'6^t & -8.0'3^t+3+5.0'6^t \\ -4.0'3^t+6\text{-}2.0'6^t & 6+6.0'6^t & 4.0'3^t+6\text{-}10.0'6^t \\ -4.0'3^t+3+0'6^t & 3\text{-}3.0'6^t & 4.0'3^t+3+5.0'6^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

A partir de esta igualdad se tiene que:

$$\lim_{t\to+\infty}\begin{pmatrix} p_t \\ q_t \\ r_t \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(p_0+q_0+r_0) \\ \frac{1}{2}(p_0+q_0+r_0) \\ \frac{1}{4}(p_0+q_0+r_0) \end{pmatrix}$$

Por tanto, en el largo plazo, las empresas P y R se quedan cada una de ellas con la cuarta parte del total inicial de clientes y la empresa Q con la mitad restante.

c) Se busca un vector (p_0, q_0, r_0) tal que $\begin{pmatrix} p_t \\ q_t \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$, es decir,

$$A^t \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \text{ para } t = 1, 2 \ldots .$$

Por tanto, dicho vector ha de ser un vector propio de A^t asociado al valor propio 1.

Pero, sabemos que si v es vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces v también es vector propio de A^t asociado al valor propio λ^t.

Por tanto, aplicando este resultado para $\lambda = 1$, se deduce que el vector (p_0, q_0, r_0) ha de ser proporcional al vector (1, 2, 1).

Luego, si el reparto inicial de clientes entre las empresas verifica que en la empresa P y R hay el mismo número de clientes y en la Q hay el doble, este reparto se mantiene a lo largo del tiempo.