1.- Para cada una de las siguientes situaciones, escribir un programa matemático que permita obtener su solución.

a) Una empresa produce tres bienes cuyos precios de mercado son: $p_1 = 16, p_2 = 12$ y $p_3 = 20$. Su función de costes es $C(q_1, q_2, q_3) = q_1^2 + 2q_2^2 + 3q_3^2 - 2q_1q_2 + 25$ donde q_1, q_2, q_3 representan las cantidades producidas de cada uno de los tres bienes. Obténgase las cantidades a producir de cada bien para maximizar el beneficio de la empresa.

b) El volumen de ventas V de un coche es función del número de anuncios en prensa, x, y del número de minutos de propaganda en TV, y. Estadísticamente se ha estimado que la relación entre las tres variables es $V = 12xy - x^2 - 3y^2$. Si un anuncio en la prensa vale 100 euros, un minuto en TV cuesta 1700 euros y el presupuesto en publicidad de la empresa es de 30000 euros, determinar la política óptima en publicidad.

c) Un sastre dispone de 160 metros cuadrados de tela de algodón y 240 metros cuadrados de tela de lana para hacer vestidos y abrigos. Para cada vestido se utilizan 1 metro cuadrado de tela de algodón y 3 metros cuadrados de tela de lana y para cada abrigo 2 metros cuadrados de tela de algodón y la misma cantidad de tela de lana. Suponiendo que se vende todo lo que se produce, calcular cuántos vestidos y abrigos debe hacer el sastre para obtener un ingreso máximo sabiendo que cada vestido se vende por 150 euros y cada abrigo por 210 euros.

d) En un hospital se quiere elaborar una dieta alimenticia para un determinado grupo de enfermos con dos alimentos A y B. Estos alimentos contienen tres principios nutritivos: N1, N2 y N3. Una unidad de A vale 1 euro y contiene 2 unidades de N1, 1 de N2 y 1 de N3. Una unidad de B vale 2,5 euros y contiene 1, 3 y 2 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente. Un enfermo de este grupo necesita diariamente al menos 4, 6 y 5 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente. Determinar las cantidades de alimentos A y B que dan lugar a la dieta de coste mínimo .

2.- Calcular para cada una de las siguientes funciones, los máximos y mínimos locales y globales en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x(x-1)$ en el intervalo [0,1]

b) $f(x) = -x(x-1)$ en el intervalo [0,2]

c) $f(x) = lnx$ en el intervalo [1,e]

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en el intervalo [-2,-1]

e) $f(x) = senx + cosx$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

3.- Clasificar cada uno de los siguientes programas matemáticos y resolverlos gráficamente:

a) Optimizar $x^2 + y^2 + 8$

b) Optimizar $\sqrt[3]{x^2 + y^2 + 8}$

c) Optimizar $\sqrt[3]{x^2 + y^2 + 8}$

s.a: $y \geq x^2 - 2$

d) Optimizar $\sqrt[3]{x^2 + y^2 + 8}$

s.a: $\begin{cases} y \geq x^2 - 2 \\ y \leq 0 \end{cases}$

e) Optimizar $x + y$

s.a: $\begin{cases} y \geq x^2 \\ 2x + y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

f) Maximizar $x_1 + x_2$

s.a: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq -5 \end{cases}$

g) La función de utilidad de un consumidor viene dada por $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$, donde x_1 y x_2 representan las cantidades de los bienes 1 y 2 consumidas. Sabiendo que p_1 y p_2 son los precios unitarios de los bienes 1 y 2 y que el consumidor dispone de una renta R que debe consumir en su totalidad, calcular la cantidad a consumir de cada bien si el objetivo es maximizar la utilidad.

4.- Representar gráficamente los siguientes conjuntos e indicar si son o no convexos. En el caso de que sean convexos determinar sus vértices.

a) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$

b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x,\ x + y \geq 1\right\}$

c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq x^2\right\}$

d) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > x^2\right\}$

e) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\right\}$

5.- Estudiar la concavidad y la convexidad de las siguientes funciones en su dominio de definición. Razonar si existen puntos de inflexión y en su caso calcularlos.

a) $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

6.- Indicar si las siguientes funciones son cóncavas o convexas en los conjuntos que se indican:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 10 + e^{x+y}$, en $\mathbb{R}^2$

b) $f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz$, en $\mathbb{R}^3$

c) $f(x, y) = ln(xy)$, en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$

d) $q(K, L) = A\,K^{\alpha}L^{\beta}$, con A, α, $\beta > 0$, $\alpha+\beta < 1$, en $D = \{(K, L) \in \mathbb{R}^2 \mid K > 0, L > 0\}$

7.- Un consumidor dispone de una renta de 150 euros que gasta íntegramente en el consumo de dos bienes: yogures, cuyas cantidades denotamos por x_1 y refrescos, cuyas cantidades denotamos por x_2. Sabiendo que el precio de cada yogur es de 1,5 euros y el de cada refresco es de 2 euros, se pide:

a) Determinar si el conjunto formado por todas las combinaciones de consumo que el consumidor puede comprar es convexo o no. En caso de serlo, ¿cuáles son sus vértices?

b) Supongamos ahora que existe una oferta de promoción de modo que, por la compra de 10 o más yogures, el precio unitario de cada yogur es de 1 euro. ¿Es convexo el conjunto de combinaciones alcanzables?

8.- Consideremos un individuo cuya riqueza viene dada exclusivamente por los ingresos derivados de su trabajo, la cual distribuye entre dos bienes: trigo y horas de ocio. Sabiendo que puede trabajar un máximo de 24 horas al día, se pide:

a) Representar gráficamente el conjunto de combinaciones de consumo alcanzables si el salario por hora es $w = 1$ y el precio unitario del trigo es $p = 1$. (Represente las horas de ocio x_1 en el eje de abscisas y las unidades de trigo x_2 en ordenadas). ¿Es convexo el conjunto alcanzable?

b) Supongamos ahora que el salario sigue siendo $w = 1$ para las 8 primeras horas trabajadas, mientras que es $w' = 1{,}5$ para las restantes, las cuales se consideran horas extraordinarias. ¿Qué representación gráfica tiene ahora el conjunto alcanzable? ¿Es convexo?

9.- Un consumidor posee una renta diaria de 40 unidades monetarias para el consumo de dos bienes: tabaco (cuyas cantidades denotamos por x_1) y alimentos (cuyas cantidades denotamos por x_2). El precio unitario del tabaco es $p_1 = 8$ y el precio unitario de los alimentos es $p_2 = 2$.

a) Dibuje el conjunto de combinaciones de consumo que son alcanzables por parte del consumidor y deducir si es convexo o no.

b) Supongamos que el gobierno establece un impuesto de cuantía de t = 1 que grava el consumo a partir de la segunda unidad de tabaco. ¿Es convexo el conjunto alcanzable?

10.- El señor X es coleccionista de sellos y monedas, de manera que su nivel de satisfacción depende del número que tenga de ambos bienes. Concretamente, su utilidad está representada por la función: $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, donde $x_1 > 0$ denota el número de sellos y $x_2 > 0$ la cantidad de monedas y $0 < \alpha < 1$. Se pide:

a) Deducir si la función de utilidad del señor X es cóncava o convexa.

b) Supongamos el valor $\alpha = \frac{1}{2}$ y sea la curva de nivel k. Represente gráficamente el conjunto de combinaciones de sellos y monedas que proporcionan al señor X un nivel de satisfacción mayor que k. ¿Es dicho conjunto convexo? ¿Cómo se interpreta la convexidad de dicho conjunto en términos de satisfacción?

11.- En la producción de automóviles, una empresa emplea como factores productivos el trabajo (L) y el capital (K). La función de producción viene representada de la forma: $Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$, donde Q indica el número de automóviles producidos, A es una constante positiva y α, β > 0.

a) Deduzca qué relación debe darse entre los parámetros α y β para que la función de producción sea cóncava.

b) Sean $A = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$. Deduzca el conjunto de combinaciones de trabajo y capital que permiten producir más de 50 automóviles y demuestre que es convexo. ¿Cómo interpreta la convexidad en términos de producción?