# Puntos expuestos de continuidad para una función estrictamente convexa

Luis Carlos García-Lirola

Trabajo conjunto con José Orihuela and Matías Raja

Universidad de Murcia

Noviembre, 2016

Research partially supported by

UNIVERSIDAD DE MURCIA

GOBIERNO DE ESPAÑA

MINISTERIO DE ECONOMÍA Y COMPETITIVIDAD

Unión Europea

Fondo Europeo de Desarrollo Regional

Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua, estrictamente convexa y acotada sobre compactos. Entonces para cada $K \subset X$ convexo y compacto, el conjunto de puntos de $K$ que son expuestos y de continuidad de $f|_K$ es denso en $\operatorname{ext}(K)$.

# Espacios localmente convexos

## Definición

*Un* **espacio localmente convexo** *(e.l.c.) es un par* $(X, \tau)$ *donde* $X$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *y* $\tau$ *es una topología sobre* $X$ *tal que:*

# Espacios localmente convexos

## Definición

*Un* **espacio localmente convexo** *(e.l.c.) es un par* $(X, \tau)$ *donde* $X$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *y* $\tau$ *es una topología sobre* $X$ *tal que:*

1. *las aplicaciones* $(x, y) \mapsto x + y$ *y* $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *son continuas,*

# Espacios localmente convexos

## Definición

*Un* **espacio localmente convexo** *(e.l.c.) es un par* $(X, \tau)$ *donde* $X$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *y* $\tau$ *es una topología sobre* $X$ *tal que:*

1. *las aplicaciones* $(x, y) \mapsto x + y$ *y* $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *son continuas,*
2. *cada punto de* $X$ *tiene una base de entornos formada por conjuntos convexos.*

# Espacios localmente convexos

## Definición

*Un* **espacio localmente convexo** *(e.l.c.) es un par* $(X, \tau)$ *donde* $X$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *y* $\tau$ *es una topología sobre* $X$ *tal que:*

1. *las aplicaciones* $(x, y) \mapsto x + y$ *y* $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *son continuas,*
2. *cada punto de* $X$ *tiene una base de entornos formada por conjuntos convexos.*

- Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado. Entonces $X$ dotado de la topología de la norma es un e.l.c.

# Espacios localmente convexos

## Definición

*Un* **espacio localmente convexo** *(e.l.c.) es un par* $(X, \tau)$ *donde* $X$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *y* $\tau$ *es una topología sobre* $X$ *tal que:*

1. *las aplicaciones* $(x, y) \mapsto x + y$ *y* $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *son continuas,*
2. *cada punto de* $X$ *tiene una base de entornos formada por conjuntos convexos.*

- Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado. Entonces $X$ dotado de la topología de la norma es un e.l.c.
- El espacio de sucesiones $\ell_p$, $0 < p < 1$, equipado con la métrica $d((x_n), (y_n)) = \sum_n |x_n - y_n|^p$ no es un e.l.c.

# Espacios localmente convexos

## Definición

*Un* **espacio localmente convexo** *(e.l.c.) es un par $(X, \tau)$ donde $X$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\tau$ es una topología sobre $X$ tal que:*

1. *las aplicaciones $(x, y) \mapsto x + y$ y $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ son continuas,*
2. *cada punto de $X$ tiene una base de entornos formada por conjuntos convexos.*

- Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado. Entonces $X$ dotado de la topología de la norma es un e.l.c.
- El espacio de sucesiones $\ell_p$, $0 < p < 1$, equipado con la métrica $d((x_n), (y_n)) = \sum_n |x_n - y_n|^p$ no es un e.l.c.
- Si $K$ es un compacto Hausdorff, entonces $(C(K), \tau_p)$ es un e.l.c.

# El dual y la topología débil*

- Un **espacio de Banach** es un espacio vectorial normado y completo.

# El dual y la topología débil*

- Un **espacio de Banach** es un espacio vectorial normado y completo.
- Dado un espacio de Banach $W$, se define su **dual** como el espacio vectorial

$$W^* = \{f\colon W \to \mathbb{R} \text{ lineales y continuas}\}$$

# El dual y la topología débil*

- Un **espacio de Banach** es un espacio vectorial normado y completo.
- Dado un espacio de Banach $W$, se define su **dual** como el espacio vectorial
$$W^* = \{f \colon W \to \mathbb{R} \text{ lineales y continuas}\}$$
- La **topología débil*** en $W^*$ es la topología de convergencia puntual sobre elementos de $W$. Es decir,
$$f_\alpha \xrightarrow{\text{débil}^*} f \Leftrightarrow f_\alpha(w) \to f(w) \text{ para cada } w \in W$$

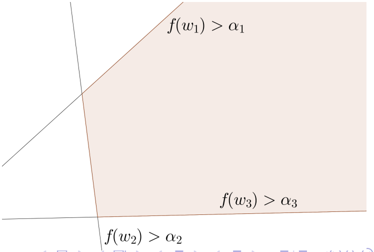
# El dual y la topología débil$^*$

- Un **espacio de Banach** es un espacio vectorial normado y completo.
- Dado un espacio de Banach $W$, se define su **dual** como el espacio vectorial
$$W^* = \{f\colon W \to \mathbb{R} \text{ lineales y continuas}\}$$
- La **topología débil**$^*$ en $W^*$ es la topología de convergencia puntual sobre elementos de $W$. Es decir,
$$f_\alpha \xrightarrow{\text{débil}^*} f \Leftrightarrow f_\alpha(w) \to f(w) \text{ para cada } w \in W$$
- $(W^*, \text{débil}^*)$ es un espacio localmente convexo.

# El dual y la topología débil*

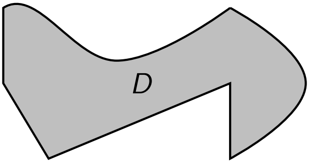
- Un **espacio de Banach** es un espacio vectorial normado y completo.
- Dado un espacio de Banach $W$, se define su **dual** como el espacio vectorial
$$W^* = \{f \colon W \to \mathbb{R} \text{ lineales y continuas}\}$$
- La **topología débil*** en $W^*$ es la topología de convergencia puntual sobre elementos de $W$. Es decir,
$$f_\alpha \xrightarrow{\text{débil}^*} f \Leftrightarrow f_\alpha(w) \to f(w) \text{ para cada } w \in W$$

- $(W^*, \text{débil}^*)$ es un espacio localmente convexo.
- Si $w \in W$, entonces $w(f) := f(w)$ define una aplicación lineal y débil*-continua en $W^*$.

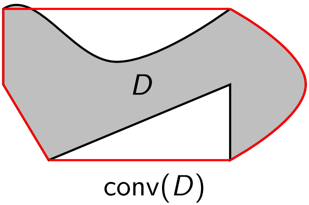


# Contenidos

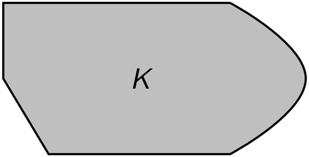
# Puntos extremos



# Puntos extremos

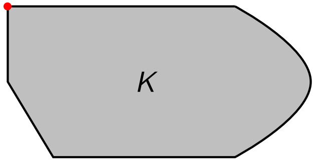


# Puntos extremos



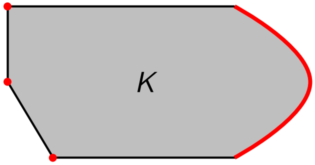

$$¿D \subset K : \mathrm{conv}(D) = K?$$

# Puntos extremos



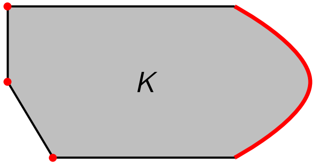

$$¿D \subset K : \mathrm{conv}(D) = K?$$

# Puntos extremos




$$¿D \subset K : \mathrm{conv}(D) = K?$$

# Puntos extremos




$$¿D \subset K : \operatorname{conv}(D) = K?$$

**Definición**

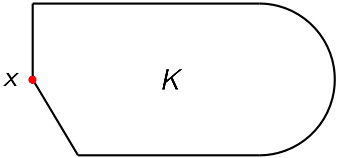
*Decimos que un punto $x \in K$ es un* **punto extremo** *de $K$ si $x$ no es un punto interior de ningún segmento enteramente contenido en $K$.*

# Puntos expuestos

### Definición

*Sea $K \subset X$ compacto y convexo. Decimos que un punto $x \in K$ es un* **punto expuesto** *si existe una función $w : K \to \mathbb{R}$ afín y continua tal que*

$$w(x) > w(y) \text{ para cada } y \neq x, y \in K$$

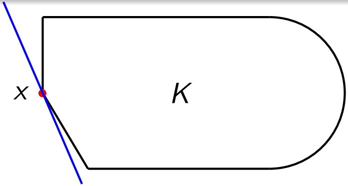


# Puntos expuestos

## Definición

*Sea* $K \subset X$ *compacto y convexo. Decimos que un punto* $x \in K$ *es un* **punto expuesto** *si existe una función* $w : K \to \mathbb{R}$ *afín y continua tal que*

$$w(x) > w(y) \text{ para cada } y \neq x, y \in K$$

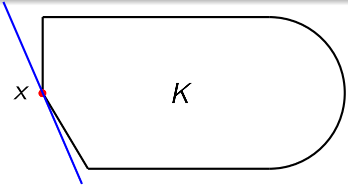


# Puntos expuestos

## Definición

*Sea $K \subset X$ compacto y convexo. Decimos que un punto $x \in K$ es un* **punto expuesto** *si existe una función $w : K \to \mathbb{R}$ afín y continua tal que*

$$w(x) > w(y) \text{ para cada } y \neq x, y \in K$$



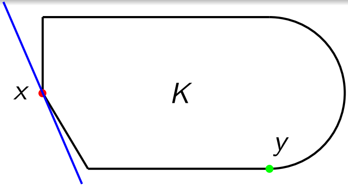

Cada punto expuesto de $K$ es también un punto extremo de $K$.

# Puntos expuestos

## Definición

*Sea $K \subset X$ compacto y convexo. Decimos que un punto $x \in K$ es un* **punto expuesto** *si existe una función $w : K \to \mathbb{R}$ afín y continua tal que*

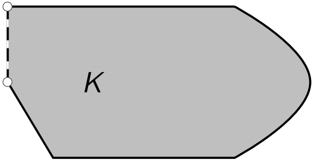
$$w(x) > w(y) \text{ para cada } y \neq x, y \in K$$




Cada punto expuesto de $K$ es también un punto extremo de $K$.

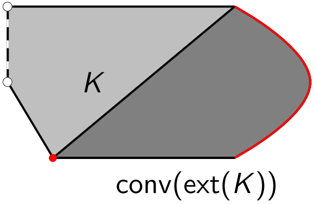
# ¿Qué condiciones garantizan que $K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))$?

Si $K$ no es cerrado...



# ¿Qué condiciones garantizan que $K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))$?

Si $K$ no es cerrado...



# ¿Qué condiciones garantizan que $K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))$?

Si $K$ no es acotado...

# ¿Qué condiciones garantizan que $K = \text{conv}(\text{ext}(K))$?

Si $K$ no es acotado...

# ¿Qué condiciones garantizan que $K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(K))$?

**Teorema (Minkowski, 1911 – Caratheodory, 1930)**

*Sea $K$ un compacto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces $K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(K))$.*

# ¿Qué condiciones garantizan que $K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(K))$?

**Teorema (Minkowski, 1911 – Caratheodory, 1930)**

*Sea $K$ un compacto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces $K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(K))$.*

**Teorema (Straszewicz, 1935)**

*Sea $K$ un compacto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces $K = \operatorname{conv}(\exp(K))$.*

## ¿Qué condiciones garantizan que $K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))$?

**Teorema (Minkowski, 1911 – Caratheodory, 1930)**

*Sea $K$ un compacto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces $K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))$.*

**Teorema (Straszewicz, 1935)**

*Sea $K$ un compacto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces $K = \mathrm{conv}(\mathrm{exp}(K))$.*

Estos resultados no son ciertos en dimensión infinita.

# ¿Qué condiciones garantizan que $K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(K))$?

**Teorema (Minkowski, 1911 – Caratheodory, 1930)**

*Sea $K$ un compacto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces $K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(K))$.*

**Teorema (Straszewicz, 1935)**

*Sea $K$ un compacto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces $K = \operatorname{conv}(\exp(K))$.*

Estos resultados no son ciertos en dimensión infinita.

**Teorema (Krein–Milman, 1940)**

*Sea $K$ un compacto y convexo de un espacio localmente convexo. Entonces $K = \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{ext}(K))$.*

## ¿Qué condiciones garantizan que $K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(K))$?

**Teorema (Minkowski, 1911 – Caratheodory, 1930)**

*Sea $K$ un compacto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces $K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(K))$.*

**Teorema (Straszewicz, 1935)**

*Sea $K$ un compacto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces $K = \operatorname{conv}(\exp(K))$.*

Estos resultados no son ciertos en dimensión infinita.

**Teorema (Krein–Milman, 1940)**

*Sea $K$ un compacto y convexo de un espacio localmente convexo. Entonces $K = \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{ext}(K))$.*

Sin embargo, es posible que $\overline{\operatorname{conv}}(\exp(K)) \subsetneq K$.

# Contenidos

# Continuidad y semicontinuidad

## Definición

*Una función* $f\colon (X,\tau) \to \mathbb{R}$ *es* **continua** *si para cada* $x \in X$ *y cada* $\varepsilon > 0$ *existe un entorno* $U$ *de* $x$ *tal que* $f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$ *para cada* $y \in U$.

# Continuidad y semicontinuidad

## Definición

*Una función* $f\colon (X,\tau) \to \mathbb{R}$ *es* **inferiormente semicontinua** *si para cada* $x \in X$ *y cada* $\varepsilon > 0$ *existe un entorno* $U$ *de* $x$ *tal que*

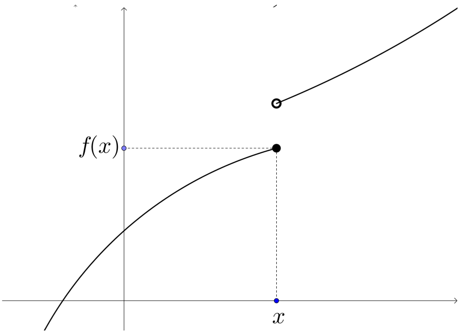
$$f(x) - \varepsilon < f(y) \qquad \text{para cada } y \in U.$$

# Continuidad y semicontinuidad

## Definición

*Una función* $f:(X,\tau)\to\mathbb{R}$ *es* **inferiormente semicontinua** *si para cada* $x\in X$ *y cada* $\varepsilon>0$ *existe un entorno* $U$ *de* $x$ *tal que*

$$f(x)-\varepsilon<f(y)\qquad \text{para cada } y\in U.$$

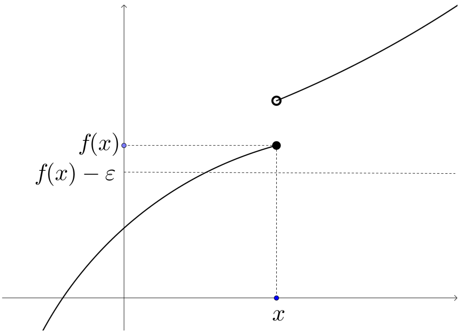


# Continuidad y semicontinuidad

## Definición

*Una función* $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ *es* **inferiormente semicontinua** *si para cada* $x \in X$ *y cada* $\varepsilon > 0$ *existe un entorno* $U$ *de* $x$ *tal que*

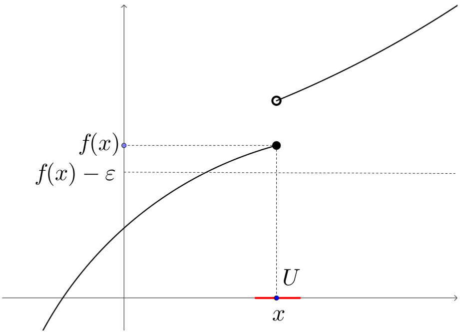
$$f(x) - \varepsilon < f(y) \qquad \text{para cada } y \in U.$$



# Continuidad y semicontinuidad

## Definición

*Una función* $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ *es* **inferiormente semicontinua** *si para cada* $x \in X$ *y cada* $\varepsilon > 0$ *existe un entorno* $U$ *de* $x$ *tal que*
$f(x) - \varepsilon < f(y)$ *para cada* $y \in U$.

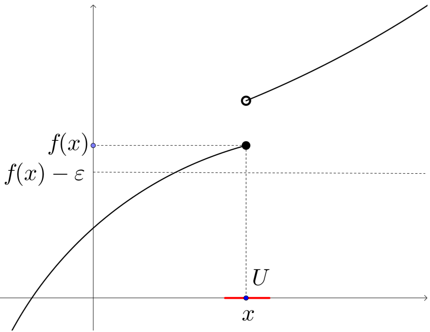


# Continuidad y semicontinuidad

## Definición

*Una función* $f\colon (X,\tau) \to \mathbb{R}$ *es* **inferiormente semicontinua** *si para cada* $x \in X$ *y cada* $\varepsilon > 0$ *existe un entorno* $U$ *de* $x$ *tal que*

$f(x) - \varepsilon < f(y)$ *para cada* $y \in U$.



# Puntos extremos de continuidad

Si $K$ es compacto y $f\colon K \to \mathbb{R}$ es inferiormente semicontinua, entonces $f$ es continua en un conjunto denso de puntos de $K$.

# Puntos extremos de continuidad

Si $K$ es compacto y $f\colon K \to \mathbb{R}$ es inferiormente semicontinua, entonces $f$ es continua en un conjunto denso de puntos de $K$.

¿Podemos encontrar puntos extremos de continuidad?

# Puntos extremos de continuidad

Si $K$ es compacto y $f: K \to \mathbb{R}$ es inferiormente semicontinua, entonces $f$ es continua en un conjunto denso de puntos de $K$.

¿Podemos encontrar puntos extremos de continuidad?

**Teorema (Raja, 2009)**

*Sea $K \subset X$ compacto y convexo y $f : K \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua, convexa y acotada. Entonces $\mathrm{ext}(K)$ contiene un subconjunto denso de puntos de continuidad de $f$.*

# Puntos extremos de continuidad

Si $K$ es compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ es inferiormente semicontinua, entonces $f$ es continua en un conjunto denso de puntos de $K$.

¿Podemos encontrar puntos extremos de continuidad?

**Teorema (Raja, 2009)**

*Sea $K \subset X$ compacto y convexo y $f : K \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua, convexa y acotada. Entonces* $\mathrm{ext}(K)$ *contiene un subconjunto denso de puntos de continuidad de $f$.*

¿Es posible reemplazar $\mathrm{ext}(K)$ por $\exp(K)$ en el teorema anterior?

# Puntos extremos de continuidad

Si $K$ es compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ es inferiormente semicontinua, entonces $f$ es continua en un conjunto denso de puntos de $K$.

¿Podemos encontrar puntos extremos de continuidad?

**Teorema (Raja, 2009)**

*Sea $K \subset X$ compacto y convexo y $f : K \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua, convexa y acotada. Entonces* $\operatorname{ext}(K)$ *contiene un subconjunto denso de puntos de continuidad de $f$.*

¿Es posible reemplazar $\operatorname{ext}(K)$ por $\exp(K)$ en el teorema anterior?

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua, *estrictamente convexa* y acotada sobre compactos. Entonces para cada $K \subset X$ convexo y compacto, el conjunto de puntos de $K$ que son expuestos y de continuidad de $f|_K$ es denso en $\operatorname{ext}(K)$.

# Contenidos

# Dos ingredientes fundamentales

## Teorema (Baire)

*Sea* $(X, d)$ *un espacio métrico completo y* $(G_n)_n$ *una sucesión de abiertos densos en* $X$. *Entonces* $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ *es denso en* $X$.

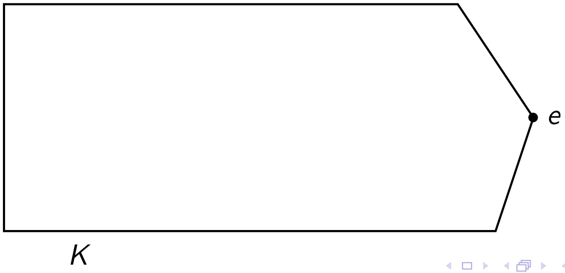
# Dos ingredientes fundamentales

## Teorema (Baire)

*Sea $(X, d)$ un espacio métrico completo y $(G_n)_n$ una sucesión de abiertos densos en $X$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en $X$.*

## Lema (Choquet)

*Sea $K$ un compacto convexo y $e \in \operatorname{ext} K$. Para cada $U$ entorno de $e$ en $K$ existe una rodaja $S$ de $K$ de modo que $e \in S \subset U$.*



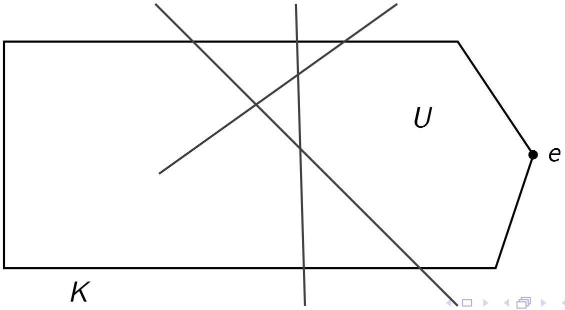
# Dos ingredientes fundamentales

## Teorema (Baire)

*Sea $(X, d)$ un espacio métrico completo y $(G_n)_n$ una sucesión de abiertos densos en $X$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en $X$.*

## Lema (Choquet)

*Sea $K$ un compacto convexo y $e \in \operatorname{ext} K$. Para cada $U$ entorno de $e$ en $K$ existe una rodaja $S$ de $K$ de modo que $e \in S \subset U$.*



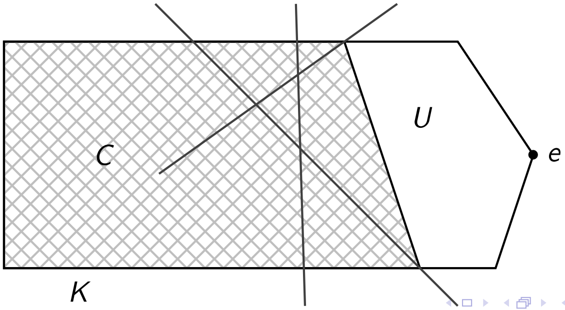
# Dos ingredientes fundamentales

## Teorema (Baire)

*Sea $(X,d)$ un espacio métrico completo y $(G_n)_n$ una sucesión de abiertos densos en $X$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en $X$.*

## Lema (Choquet)

*Sea $K$ un compacto convexo y $e \in \operatorname{ext} K$. Para cada $U$ entorno de $e$ en $K$ existe una rodaja $S$ de $K$ de modo que $e \in S \subset U$.*



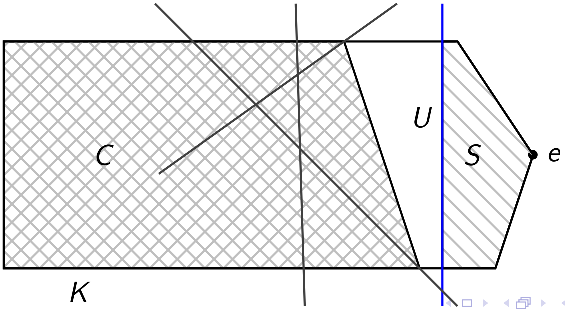
# Dos ingredientes fundamentales

## Teorema (Baire)

*Sea $(X, d)$ un espacio métrico completo y $(G_n)_n$ una sucesión de abiertos densos en $X$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en $X$.*

## Lema (Choquet)

*Sea $K$ un compacto convexo y $e \in \operatorname{ext} K$. Para cada $U$ entorno de $e$ en $K$ existe una rodaja $S$ de $K$ de modo que $e \in S \subset U$.*



Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua, *estrictamente convexa* y acotada sobre compactos. Entonces para cada $K \subset X$ convexo y compacto, el conjunto de puntos de $K$ que son expuestos y de continuidad de $f|_K$ es denso en $\operatorname{ext}(K)$.

Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua, *estrictamente convexa* y acotada sobre compactos. Entonces para cada $K \subset X$ convexo y compacto, el conjunto de puntos de $K$ que son expuestos y de continuidad de $f|_K$ es denso en $\operatorname{ext}(K)$.

- Podemos suponer que $X = (W^*, \text{débil}^*)$, $K \subset W^*$ es débil*-compacto y $f\colon W^* \to \mathbb{R}$ es débil*-inferiormente semicontinua.

Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua, *estrictamente convexa* y acotada sobre compactos. Entonces para cada $K \subset X$ convexo y compacto, el conjunto de puntos de $K$ que son expuestos y de continuidad de $f|_K$ es denso en $\mathrm{ext}(K)$.

- Podemos suponer que $X = (W^*, \text{débil}^*)$, $K \subset W^*$ es débil$^*$-compacto y $f\colon W^* \to \mathbb{R}$ es débil$^*$-inferiormente semicontinua.
- Supongamos probado lo siguiente:

Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua, *estrictamente convexa* y acotada sobre compactos. Entonces para cada $K \subset X$ convexo y compacto, el conjunto de puntos de $K$ que son expuestos y de continuidad de $f|_K$ es denso en $\operatorname{ext}(K)$.

- Podemos suponer que $X = (W^*, \text{débil}^*)$, $K \subset W^*$ es débil*-compacto y $f\colon W^* \to \mathbb{R}$ es débil*-inferiormente semicontinua.
- Supongamos probado lo siguiente:

Dado $K \subset W^*$ débil*-compacto y convexo, el conjunto de elementos de $W$ que producen puntos expuestos donde $f|_K$ is continua es denso en $W$.

Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua, *estrictamente convexa* y acotada sobre compactos. Entonces para cada $K \subset X$ convexo y compacto, el conjunto de puntos de $K$ que son expuestos y de continuidad de $f|_K$ es denso en $\mathrm{ext}(K)$.

- Podemos suponer que $X = (W^*, \text{débil}^*)$, $K \subset W^*$ es débil$^*$-compacto y $f\colon W^* \to \mathbb{R}$ es débil$^*$-inferiormente semicontinua.
- Supongamos probado lo siguiente:

Dado $K \subset W^*$ débil$^*$-compacto y convexo, el conjunto de elementos de $W$ que producen puntos expuestos donde $f|_K$ is continua es denso en $W$.

- Sea $e \in \mathrm{ext}(K)$ y $U$ entorno de $e$.

Sea $f: X \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua, *estrictamente convexa* y acotada sobre compactos. Entonces para cada $K \subset X$ convexo y compacto, el conjunto de puntos de $K$ que son expuestos y de continuidad de $f|_K$ es denso en $\operatorname{ext}(K)$.

- Podemos suponer que $X = (W^*, \text{débil}^*)$, $K \subset W^*$ es débil*-compacto y $f: W^* \to \mathbb{R}$ es débil*-inferiormente semicontinua.
- Supongamos probado lo siguiente:

Dado $K \subset W^*$ débil*-compacto y convexo, el conjunto de elementos de $W$ que producen puntos expuestos donde $f|_K$ is continua es denso en $W$.

- Sea $e \in \operatorname{ext}(K)$ y $U$ entorno de $e$.
- Por el lema de Choquet, existe $w \in W$ que produce una rodaja $S$ de $K$ con $e \in S \subset U$.

Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función inferiormente semicontinua, *estrictamente convexa* y acotada sobre compactos. Entonces para cada $K \subset X$ convexo y compacto, el conjunto de puntos de $K$ que son expuestos y de continuidad de $f|_K$ es denso en $\mathrm{ext}(K)$.

- Podemos suponer que $X = (W^*, \text{débil}^*)$, $K \subset W^*$ es débil$^*$-compacto y $f\colon W^* \to \mathbb{R}$ es débil$^*$-inferiormente semicontinua.
- Supongamos probado lo siguiente:

Dado $K \subset W^*$ débil$^*$-compacto y convexo, el conjunto de elementos de $W$ que producen puntos expuestos donde $f|_K$ is continua es denso en $W$.

- Sea $e \in \mathrm{ext}(K)$ y $U$ entorno de $e$.
- Por el lema de Choquet, existe $w \in W$ que produce una rodaja $S$ de $K$ con $e \in S \subset U$.
- Existe $w' \in W$ cercano a $w$ que expone un punto $x \in K$ donde $f|_K$ es continua. Por tanto $x \in S \subset U$.

Dado $K \subset W^*$ débil$^*$-compacto y convexo, el conjunto de elementos de $W$ que producen puntos expuestos donde $f|_K$ is continua es denso en $W$.

Dado $K \subset W^*$ débil$^*$-compacto y convexo, el conjunto de elementos de $W$ que producen puntos expuestos donde $f|_K$ is continua es denso en $W$.

- Consideramos la función $\rho(x, y) = \frac{f(x)^2 + f(y)^2}{2} - f(\frac{x+y}{2})^2$.

Dado $K \subset W^*$ débil$^*$-compacto y convexo, el conjunto de elementos de $W$ que producen puntos expuestos donde $f|_K$ is continua es denso en $W$.

- Consideramos la función $\rho(x,y) = \frac{f(x)^2+f(y)^2}{2} - f(\frac{x+y}{2})^2$.
- $\rho(x,y) \geq \frac{f(x)^2+f(y)^2}{2} - \left(\frac{f(x)+f(y))}{2}\right)^2 = \left(\frac{f(x)-f(y)}{2}\right)^2 \geq 0$.

Dado $K \subset W^*$ débil$^*$-compacto y convexo, el conjunto de elementos de $W$ que producen puntos expuestos donde $f|_K$ is continua es denso en $W$.

- Consideramos la función $\rho(x,y) = \frac{f(x)^2+f(y)^2}{2} - f(\frac{x+y}{2})^2$.
- $\rho(x,y) \geq \frac{f(x)^2+f(y)^2}{2} - \left(\frac{f(x)+f(y))}{2}\right)^2 = \left(\frac{f(x)-f(y)}{2}\right)^2 \geq 0$.
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\rho(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Dado $K \subset W^*$ débil$^*$-compacto y convexo, el conjunto de elementos de $W$ que producen puntos expuestos donde $f|_K$ is continua es denso en $W$.

- Consideramos la función $\rho(x,y) = \frac{f(x)^2+f(y)^2}{2} - f(\frac{x+y}{2})^2$.
- $\rho(x,y) \geq \frac{f(x)^2+f(y)^2}{2} - \left(\frac{f(x)+f(y))}{2}\right)^2 = \left(\frac{f(x)-f(y)}{2}\right)^2 \geq 0$.
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\rho(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- Consideramos $\rho$-diam$(A) := \sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\}$.

Dado $K \subset W^*$ débil$^*$-compacto y convexo, el conjunto de elementos de $W$ que producen puntos expuestos donde $f|_K$ is continua es denso en $W$.

- Consideramos la función $\rho(x, y) = \frac{f(x)^2+f(y)^2}{2} - f(\frac{x+y}{2})^2$.
- $\rho(x, y) \geq \frac{f(x)^2+f(y)^2}{2} - \left(\frac{f(x)+f(y))}{2}\right)^2 = \left(\frac{f(x)-f(y)}{2}\right)^2 \geq 0$.
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- Consideramos $\rho$-diam$(A) := \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$.
- Consideramos los conjuntos:

$$G_n = \{w \in W : w \text{ produce una rodaja } S \text{ de } K \text{ con } \rho\text{-diam}(S) < \frac{1}{n}\}$$

$$G = \bigcap_{n \geq 1} G_n$$

Dado $K \subset W^*$ débil$^*$-compacto y convexo, el conjunto de elementos de $W$ que producen puntos expuestos donde $f|_K$ is continua es denso en $W$.

- Consideramos la función $\rho(x,y) = \frac{f(x)^2+f(y)^2}{2} - f(\frac{x+y}{2})^2$.
- $\rho(x,y) \geq \frac{f(x)^2+f(y)^2}{2} - \left(\frac{f(x)+f(y))}{2}\right)^2 = \left(\frac{f(x)-f(y)}{2}\right)^2 \geq 0$.
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\rho(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- Consideramos $\rho$-diam$(A) := \sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\}$.
- Consideramos los conjuntos:

$$G_n = \{w \in W : w \text{ produce una rodaja } S \text{ de } K \text{ con } \rho\text{-diam}(S) < \frac{1}{n}\}$$

$$G = \bigcap_{n\geq 1} G_n$$

- Nota que cada $w \in G$ expone un punto de $K$ donde $f|_K$ es continua.

$$G_n = \{w \in W : w \text{ produce una rodaja } S \text{ de } K \text{ con } \rho\text{-diam}(S) < \frac{1}{n}\}$$

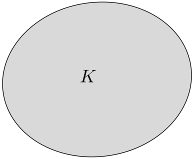
- Basta probar que cada $G_n$ es un abierto denso de $X$ y aplicar el teorema de Baire.

$$G_n = \{w \in W : w \text{ produce una rodaja } S \text{ de } K \text{ con } \rho\text{-diam}(S) < \frac{1}{n}\}$$

- Basta probar que cada $G_n$ es un abierto denso de $X$ y aplicar el teorema de Baire.
- Es claro que $G_n$ es abierto. Veamos que $G_n$ es denso:

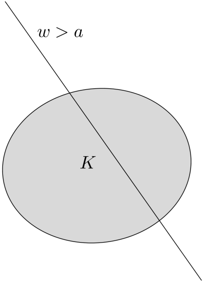
$$G_n = \{w \in W : w \text{ produce una rodaja } S \text{ de } K \text{ con } \rho\text{-diam}(S) < \frac{1}{n}\}$$

- Basta probar que cada $G_n$ es un abierto denso de $X$ y aplicar el teorema de Baire.
- Es claro que $G_n$ es abierto. Veamos que $G_n$ es denso:



$$G_n = \{w \in W : w \text{ produce una rodaja } S \text{ de } K \text{ con } \rho\text{-diam}(S) < \frac{1}{n}\}$$

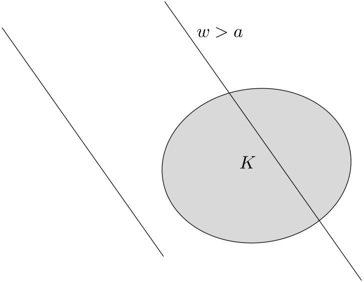
- Basta probar que cada $G_n$ es un abierto denso de $X$ y aplicar el teorema de Baire.
- Es claro que $G_n$ es abierto. Veamos que $G_n$ es denso:




- Tomemos $w \in W$ y $\delta > 0$.

$$G_n = \{w \in W : w \text{ produce una rodaja } S \text{ de } K \text{ con } \rho\text{-diam}(S) < \frac{1}{n}\}$$

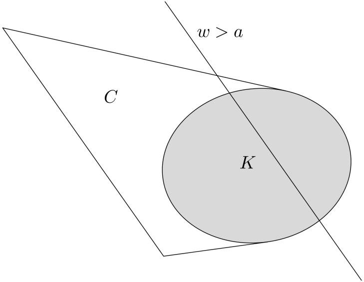
- Basta probar que cada $G_n$ es un abierto denso de $X$ y aplicar el teorema de Baire.
- Es claro que $G_n$ es abierto. Veamos que $G_n$ es denso:




- Tomemos $w \in W$ y $\delta > 0$.

$$G_n = \{w \in W : w \text{ produce una rodaja } S \text{ de } K \text{ con } \rho\text{-diam}(S) < \frac{1}{n}\}$$

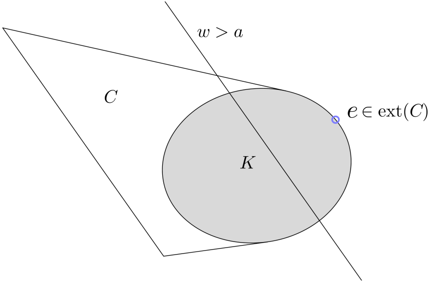
- Basta probar que cada $G_n$ es un abierto denso de $X$ y aplicar el teorema de Baire.
- Es claro que $G_n$ es abierto. Veamos que $G_n$ es denso:




- Tomemos $w \in W$ y $\delta > 0$.
- Consideramos $r >> 0$ y $C = \text{conv}(K \cup (y + Ker(w) \cap rB_{W^*})$

$$G_n = \{w \in W : w \text{ produce una rodaja } S \text{ de } K \text{ con } \rho\text{-diam}(S) < \frac{1}{n}\}$$

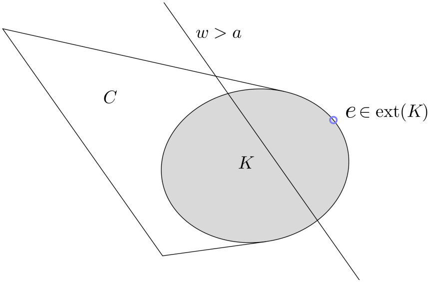
- Basta probar que cada $G_n$ es un abierto denso de $X$ y aplicar el teorema de Baire.
- Es claro que $G_n$ es abierto. Veamos que $G_n$ es denso:




- Tomemos $w \in W$ y $\delta > 0$.
- Consideramos $r >> 0$ y $C = \text{conv}(K \cup (y + Ker(w) \cap rB_{W^*})$
- Existe $e \in \text{ext}(C)$ con $w(e) > w(a)$ donde $f|_C$ es continua.

$$G_n = \{w \in W : w \text{ produce una rodaja } S \text{ de } K \text{ con } \rho\text{-diam}(S) < \frac{1}{n}\}$$

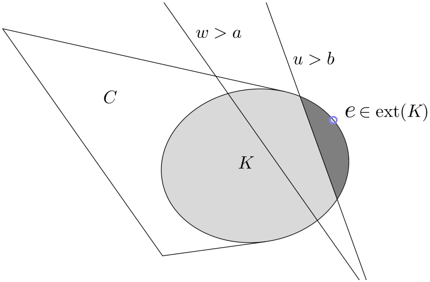
- Basta probar que cada $G_n$ es un abierto denso de $X$ y aplicar el teorema de Baire.
- Es claro que $G_n$ es abierto. Veamos que $G_n$ es denso:




- Tomemos $w \in W$ y $\delta > 0$.
- Consideramos $r >> 0$ y $C = \mathrm{conv}(K \cup (y + Ker(w) \cap rB_{W^*})$
- Existe $e \in \mathrm{ext}(C)$ con $w(e) > w(a)$ donde $f|_C$ es continua.
- De hecho, $e \in \mathrm{ext}(K)$.

$$G_n = \{w \in W : w \text{ produce una rodaja } S \text{ de } K \text{ con } \rho\text{-diam}(S) < \frac{1}{n}\}$$

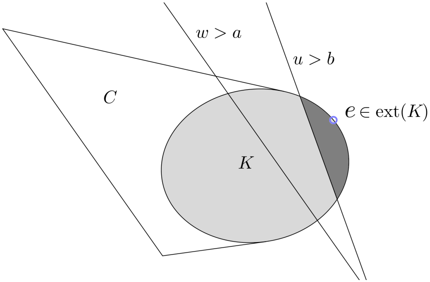
- Basta probar que cada $G_n$ es un abierto denso de $X$ y aplicar el teorema de Baire.
- Es claro que $G_n$ es abierto. Veamos que $G_n$ es denso:




- Tomemos $w \in W$ y $\delta > 0$.
- Consideramos $r >> 0$ y $C = \mathrm{conv}(K \cup (y + Ker(w) \cap rB_{W^*})$
- Existe $e \in \mathrm{ext}(C)$ con $w(e) > w(a)$ donde $f|_C$ es continua.
- De hecho, $e \in \mathrm{ext}(K)$.
- Por el lema de Choquet, existe $u \in W$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $\rho\text{-diam}(C \cap \{u > b\}) < \frac{1}{n}$

$$G_n = \{w \in W : w \text{ produce una rodaja } S \text{ de } K \text{ con } \rho\text{-diam}(S) < \frac{1}{n}\}$$

- Basta probar que cada $G_n$ es un abierto denso de $X$ y aplicar el teorema de Baire.
- Es claro que $G_n$ es abierto. Veamos que $G_n$ es denso:




- Tomemos $w \in W$ y $\delta > 0$.
- Consideramos $r >> 0$ y $C = \mathrm{conv}(K \cup (y + Ker(w) \cap rB_{W^*})$
- Existe $e \in \mathrm{ext}(C)$ con $w(e) > w(a)$ donde $f|_C$ es continua.
- De hecho, $e \in \mathrm{ext}(K)$.
- Por el lema de Choquet, existe $u \in W$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $\rho\text{-diam}(C \cap \{u > b\}) < \frac{1}{n}$
- Así, $u \in G_n$ y $||w - u|| < \delta$.

# Contenidos

**Teorema (Krein–Milman, 1940)**

*Sea $K$ un subconjunto compacto y convexo de un espacio localmente convexo. Entonces* $K = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{ext}(K))$.

**Teorema (Krein–Milman, 1940)**

*Sea $K$ un subconjunto compacto y convexo de un espacio localmente convexo. Entonces $K = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{ext}(K))$.*

¿Para qué compactos convexos se cumple que $K = \overline{\mathrm{conv}}(\exp(K))$.

**Teorema (Krein–Milman, 1940)**

*Sea $K$ un subconjunto compacto y convexo de un espacio localmente convexo. Entonces $K = \overline{\text{conv}}(\text{ext}(K))$.*

¿Para qué compactos convexos se cumple que $K = \overline{\text{conv}}(\exp(K))$.

Por ejemplo, si $K$ es metrizable entonces $K = \overline{\text{conv}}(\exp(K))$.

**Teorema (Krein–Milman, 1940)**

*Sea $K$ un subconjunto compacto y convexo de un espacio localmente convexo. Entonces $K = \overline{\text{conv}}(\text{ext}(K))$.*

¿Para qué compactos convexos se cumple que $K = \overline{\text{conv}}(\text{exp}(K))$.

Por ejemplo, si $K$ es metrizable entonces $K = \overline{\text{conv}}(\text{exp}(K))$.

Si existe una función $f\colon K \to \mathbb{R}$ estrictamente convexa e inferiormente semicontinua, entonces $K = \overline{\text{conv}}(\text{exp}(K))$.

**Teorema (Krein–Milman, 1940)**

*Sea $K$ un subconjunto compacto y convexo de un espacio localmente convexo. Entonces $K = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{ext}(K))$.*

¿Para qué compactos convexos se cumple que $K = \overline{\mathrm{conv}}(\exp(K))$.

Por ejemplo, si $K$ es metrizable entonces $K = \overline{\mathrm{conv}}(\exp(K))$.

Si existe una función $f\colon K \to \mathbb{R}$ estrictamente convexa e inferiormente semicontinua, entonces $K = \overline{\mathrm{conv}}(\exp(K))$.

**Teorema (Hervé, 1961)**

*$K$ es metrizable si y sólo si existe $f\colon K \to \mathbb{R}$ estrictamente convexa y continua.*

# References


Fabian, M. et al. *Banach Space Theory*. Springer, 2011.

L.C. García-Lirola, J. Orihuela, and M. Raja. "Compact convex sets that admit a lower semicontinuous strictly convex function". In: *J. of Convex Anal.* 24.3 (2017). to appear.

Lukeš, J. et al. *Integral Representation Theory*. de Gruyter, 2010.

M. Raja. "Continuity at the extreme points". In: *J. Math. Anal. Appl.* 350.2 (2009), pp. 436–438.


Muchas gracias por vuestra atención