Lipschitz operators which preserve injectivity

Luis C. García-Lirola

Joint work with Colin Petitjean and Tony Procházka

University of Zaragoza

EITA 2022, Huesca
22nd October, 2022

f SéNeCa (+)
Agencia de Ciencia y Tecnología
Región de Murcia

GOBIERNO DE ESPAÑA

MINISTERIO DE ECONOMÍA, INDUSTRIA Y COMPETITIVIDAD


EAST SHORE
OCEAN BEACH
SANFERMIN
PENNSYLVANIA
EST. 1787


EAST SHORE
OCEAN BEACH
PENNSYLVANIA
EST. 1787

Espacios Lipschitz-libres

(M, d) espacio métrico (completo), $0 \in M$.

Espacios Lipschitz-libres

(M, d) espacio métrico (completo), $0 \in M$.

$$\mathrm{Lip}_0(M) = \{f \colon M \to \mathbb{R}, f(0) = 0\}$$
$$\|f\|_{Lip} = \sup \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)} : x \neq y \right\}$$

Espacios Lipschitz-libres

(M, d) espacio métrico (completo), $0 \in M$.

$$\mathrm{Lip}_0(M) = \{f\colon M \to \mathbb{R}, f(0) = 0\}$$
$$\|f\|_{Lip} = \sup\left\{\frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)} : x \neq y\right\}$$

$(\mathrm{Lip}_0(M), \|\cdot\|_{Lip})$ es un espacio de Banach.

Espacios Lipschitz-libres

(M, d) espacio métrico (completo), $0 \in M$.

$$\mathrm{Lip}_0(M) = \{f \colon M \to \mathbb{R}, f(0) = 0\}$$
$$\|f\|_{Lip} = \sup\left\{\frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)} : x \neq y\right\}$$

$(\mathrm{Lip}_0(M), \|\cdot\|_{Lip})$ es un espacio de Banach. Considera

$$\begin{aligned} \delta \colon M &\to \mathrm{Lip}_0(M)^* \\ x &\mapsto \delta(x) : \langle f, \delta(x)\rangle = f(x) \end{aligned}$$

El **espacio Lipschitz-libre** (Kadec (1985), Pestov (1986), Godefroy-Kalton (2003)) $\mathcal{F}(M)$ sobre M (a.k.a. *espacio Arens-Eells*, *transportation cost space*) se define como

$$\mathcal{F}(M) = \overline{\mathrm{span}}\{\delta(x) : x \in M\} \subset \mathrm{Lip}_0(M)^*$$

Espacios Lipschitz-libres

(M, d) espacio métrico (completo), $0 \in M$.

$$\mathrm{Lip}_0(M) = \{f\colon M \to \mathbb{R}, f(0) = 0\}$$
$$\|f\|_{Lip} = \sup\left\{\frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)} : x \neq y\right\}$$

$(\mathrm{Lip}_0(M), \|\cdot\|_{Lip})$ es un espacio de Banach. Considera

$$\begin{aligned} \delta\colon M &\to \mathrm{Lip}_0(M)^* \\ x &\mapsto \delta(x) : \langle f, \delta(x)\rangle = f(x) \end{aligned}$$

El **espacio Lipschitz-libre** (Kadec (1985), Pestov (1986), Godefroy-Kalton (2003)) $\mathcal{F}(M)$ sobre M (a.k.a. *espacio Arens-Eells*, *transportation cost space*) se define como

$$\mathcal{F}(M) = \overline{\mathrm{span}}\{\delta(x) : x \in M\} \subset \mathrm{Lip}_0(M)^*$$

$M \overset{\delta}{\hookrightarrow} \mathcal{F}(M)$ es un embebimiento isométrico y $\mathcal{F}(M)^* = \mathrm{Lip}_0(M)$.

Espacios Lipschitz-libres

Ejemplo

- $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \ell_1$ $(\delta(n) \mapsto e_1 + \ldots + e_n)$.
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$ $(\delta(x) \mapsto \chi_{(0,x)})$.

Espacios Lipschitz-libres

Ejemplo

- $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \ell_1$ $(\delta(n) \mapsto e_1 + \ldots + e_n)$.
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$ $(\delta(x) \mapsto \chi_{(0,x)})$.

Propiedad fundamental: para cada función Lipschitz $f\colon M \to N$ con $f(0) = 0$, existe un único operador lineal $T_f\colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ tal que $\|T_f\| = \|f\|_{Lip}$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"] & N \arrow[d, "\delta"] \\ \mathcal{F}(M) \arrow[r, "T_f"'] & \mathcal{F}(N) \end{tikzcd}$$

Espacios Lipschitz-libres

Ejemplo

- $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \ell_1$ $(\delta(n) \mapsto e_1 + \ldots + e_n)$.
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$ $(\delta(x) \mapsto \chi_{(0,x)})$.

Propiedad fundamental: para cada función Lipschitz $f : M \to N$ con $f(0) = 0$, existe un único operador lineal $T_f : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ tal que $\|T_f\| = \|f\|_{Lip}$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"] & N \arrow[d, "\delta"] \\ \mathcal{F}(M) \arrow[r, "T_f"'] & \mathcal{F}(N) \end{tikzcd}$$

En el caso en que $N = Y$ es Banach, $\mathrm{Lip}_0(M, Y) = \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), Y)$.

Espacios Lipschitz-libres

Ejemplo

- $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \ell_1$ $(\delta(n) \mapsto e_1 + \ldots + e_n)$.
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$ $(\delta(x) \mapsto \chi_{(0,x)})$.

Propiedad fundamental: para cada función Lipschitz $f\colon M \to N$ con $f(0) = 0$, existe un único operador lineal $T_f\colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ tal que $\|T_f\| = \|f\|_{Lip}$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ f\ } & N \\ \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ \mathcal{F}(M) & \xrightarrow[T_f]{} & \mathcal{F}(N) \end{array}$$

En el caso en que $N = Y$ es Banach, $\mathrm{Lip}_0(M, Y) = \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), Y)$.

Además, $\langle T_f^*(g), \delta(x)\rangle = \langle g, T_f(\delta(x))\rangle = \langle g, \delta(f(x))\rangle = (g \circ f)(x)$ así que $T_f^*\colon \mathrm{Lip}_0(N) \to \mathrm{Lip}_0(M)$ es el operador "composición con f".

¿Por qué son importantes?

- **En análisis no-lineal**.

¿Por qué son importantes?

- **En análisis no-lineal**.

Theorem (Godefroy-Kalton, 2003)

Sean X, Y espacios de Banach, con X separable. Supongamos que existe una isometría (no lineal) $f : X \to Y$. Entonces existe una isometría lineal $T : X \to Y$. Además, el resultado es falso para X no separable.

¿Por qué son importantes?

- **En análisis no-lineal**.

Theorem (Godefroy-Kalton, 2003)

Sean X, Y espacios de Banach, con X separable. Supongamos que existe una isometría (no lineal) $f : X \to Y$. Entonces existe una isometría lineal $T : X \to Y$. Además, el resultado es falso para X no separable.

- **En transporte óptimo**. Para un espacio métrico finito M, la norma de un elemento de $\mathcal{F}(M)$ se puede interpretar como el coste de un cierto problema de transporte (Wasserstein-1, Kantorovich-Rubenstein).

¿Por qué son importantes?

- **En análisis no-lineal**.

Theorem (Godefroy-Kalton, 2003)

Sean X, Y espacios de Banach, con X separable. Supongamos que existe una isometría (no lineal) $f : X \to Y$. Entonces existe una isometría lineal $T : X \to Y$. Además, el resultado es falso para X no separable.

- **En transporte óptimo**. Para un espacio métrico finito M, la norma de un elemento de $\mathcal{F}(M)$ se puede interpretar como el coste de un cierto problema de transporte (Wasserstein-1, Kantorovich-Rubenstein).
- **En teoría de la computación** ("earthmover distance").

Theorem (Naor-Schechtman, 2007)

$\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ *no es (linealmente) isomorfo a un subespacio de* $L_1 = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Esto proporciona cotas inferiores para el tiempo de computación de ciertos algoritmos relacionados con la semejanza de imágenes 2D y la búsqueda del vecino más cercano.

¿Por qué son importantes?

- **En análisis no-lineal**.

Theorem (Godefroy-Kalton, 2003)

Sean X, Y espacios de Banach, con X separable. Supongamos que existe una isometría (no lineal) $f : X \to Y$. Entonces existe una isometría lineal $T : X \to Y$. Además, el resultado es falso para X no separable.

- **En transporte óptimo**. Para un espacio métrico finito M, la norma de un elemento de $\mathcal{F}(M)$ se puede interpretar como el coste de un cierto problema de transporte (Wasserstein-1, Kantorovich-Rubenstein).
- **En teoría de la computación** ("earthmover distance").

Theorem (Naor-Schechtman, 2007)

$\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ no es (linealmente) isomorfo a un subespacio de $L_1 = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Esto proporciona cotas inferiores para el tiempo de computación de ciertos algoritmos relacionados con la semejanza de imágenes 2D y la búsqueda del vecino más cercano.

Problema: ¿Son $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ y $\mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ isomorfos?

¿Cómo se relacionan las propiedades de M y $\mathcal{F}(M)$?

¿Cómo se relacionan las propiedades de M y $\mathcal{F}(M)$?

Theorem (Godefroy-Kalton, 2003)

Un espacio de Banach X tiene la Bounded Approximation Property si y sólo si $\mathcal{F}(X)$ tiene la Bounded Approximation Property.

¿Cómo se relacionan las propiedades de M y $\mathcal{F}(M)$?

Theorem (Godefroy-Kalton, 2003)

Un espacio de Banach X tiene la Bounded Approximation Property si y sólo si $\mathcal{F}(X)$ tiene la Bounded Approximation Property.

Como consecuencia, la BAP es invariante bajo isomorfismos Lipschitz.

¿Cómo se relacionan las propiedades de M y $\mathcal{F}(M)$?

Theorem (Godefroy-Kalton, 2003)

Un espacio de Banach X tiene la Bounded Approximation Property si y sólo si $\mathcal{F}(X)$ tiene la Bounded Approximation Property.

Como consecuencia, la BAP es invariante bajo isomorfismos Lipschitz.

Theorem (Aliaga-Gartland-Petitjean-Procházka, 2021)

Son equivalentes:

i) *$\mathcal{F}(M)$ tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

ii) *$\mathcal{F}(M)$ tiene la propiedad de Schur.*

iii) *M es puramente 1-no rectificable.*

M puramente 1-no rectificable significa que M no contiene ningún *fragmento de curva* ($\gamma\colon K \to M$ embebimiento bi-Lipschitz con $K \subset \mathbb{R}$ compacto con $\lambda(K) > 0$).

¿Cómo se relacionan las propiedades de f y T_f?

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"] & N \arrow[d, "\delta"] \\ \mathcal{F}(M) \arrow[r, "T_f"'] & \mathcal{F}(N) \end{tikzcd}$$

¿Cómo se relacionan las propiedades de f y T_f?

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"] & N \arrow[d, "\delta"] \\ \mathcal{F}(M) \arrow[r, "T_f"'] & \mathcal{F}(N) \end{tikzcd}$$

- f es bi-Lipschitz si y sólo si T_f es isomorfismo sobre su imagen.

¿Cómo se relacionan las propiedades de f y T_f?

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"] & N \arrow[d, "\delta"] \\ \mathcal{F}(M) \arrow[r, "T_f"'] & \mathcal{F}(N) \end{tikzcd}$$

- f es bi-Lipschitz si y sólo si T_f es isomorfismo sobre su imagen.
- f tiene rango denso si y sólo si T_f tiene rango denso.

¿Cómo se relacionan las propiedades de f y T_f?

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"] & N \arrow[d, "\delta"] \\ \mathcal{F}(M) \arrow[r, "T_f"'] & \mathcal{F}(N) \end{tikzcd}$$

- f es bi-Lipschitz si y sólo si T_f es isomorfismo sobre su imagen.
- f tiene rango denso si y sólo si T_f tiene rango denso.
- f es una retracción Lipschitz si y sólo si T_f es una proyección.

¿Cómo se relacionan las propiedades de f y T_f?

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"] & N \arrow[d, "\delta"] \\ \mathcal{F}(M) \arrow[r, "T_f"'] & \mathcal{F}(N) \end{tikzcd}$$

- f es bi-Lipschitz si y sólo si T_f es isomorfismo sobre su imagen.
- f tiene rango denso si y sólo si T_f tiene rango denso.
- f es una retracción Lipschitz si y sólo si T_f es una proyección.
- Existe una caracterización de cuando T_f es un operador (débil) compacto (Jiménez Vargas - Villegas Vallecillos, 2013 + Cabrera Padilla - Jiménez Vargas, 2016 + Abbar-Coine-Petitjean, 2021)

¿Cómo se relacionan las propiedades de f y T_f?

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"] & N \arrow[d, "\delta"] \\ \mathcal{F}(M) \arrow[r, "T_f"'] & \mathcal{F}(N) \end{tikzcd}$$

- f es bi-Lipschitz si y sólo si T_f es isomorfismo sobre su imagen.
- f tiene rango denso si y sólo si T_f tiene rango denso.
- f es una retracción Lipschitz si y sólo si T_f es una proyección.
- Existe una caracterización de cuando T_f es un operador (débil) compacto (Jiménez Vargas - Villegas Vallecillos, 2013 + Cabrera Padilla - Jiménez Vargas, 2016 + Abbar-Coine-Petitjean, 2021)

¿f inyectiva $\Rightarrow$ T_f inyectivo?

¿Cómo se relacionan las propiedades de f y T_f?

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\delta} \\ \mathcal{F}(M) & \xrightarrow[T_f]{} & \mathcal{F}(N) \end{array}$$

- f es bi-Lipschitz si y sólo si T_f es isomorfismo sobre su imagen.
- f tiene rango denso si y sólo si T_f tiene rango denso.
- f es una retracción Lipschitz si y sólo si T_f es una proyección.
- Existe una caracterización de cuando T_f es un operador (débil) compacto (Jiménez Vargas - Villegas Vallecillos, 2013 + Cabrera Padilla - Jiménez Vargas, 2016 + Abbar-Coine-Petitjean, 2021)

¿f inyectiva $\Rightarrow$ T_f inyectivo?

Equivalentemente, considera $T_f^* = C_f\colon \mathrm{Lip}_0(N) \to \mathrm{Lip}_0(M)$ con $g \mapsto g \circ f$.

¿f inyectiva $\Rightarrow$ C_f tiene rango débil*-denso?

Contraejemplos

Existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que $T_f\colon \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ no es inyectivo.

Contraejemplos

Existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que $T_f\colon \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ no es inyectivo.

- Toma $C \subset [0,1]$ un Cantor gordo, $[0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$. Considera

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto |[0,x] \setminus C| = \int_0^x \chi_{[0,1]\setminus C}(t)dt \end{aligned}$$

Contraejemplos

Existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que $T_f\colon \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ no es inyectivo.

- Toma $C \subset [0,1]$ un Cantor gordo, $[0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$. Considera

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto |[0,x] \setminus C| = \int_0^x \chi_{[0,1]\setminus C}(t)dt \end{aligned}$$

f es 1-Lipschitz, inyectiva, $|f(C)| = \int_{f(C)} 1 = \int_C f' = \int_C \chi_{[0,1]\setminus C} = 0$.

Contraejemplos

Existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que $T_f\colon \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ no es inyectivo.

- Toma $C \subset [0,1]$ un Cantor gordo, $[0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$. Considera

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto |[0,x] \setminus C| = \int_0^x \chi_{[0,1]\setminus C}(t)dt \end{aligned}$$

  f es 1-Lipschitz, inyectiva, $|f(C)| = \int_{f(C)} 1 = \int_C f' = \int_C \chi_{[0,1]\setminus C} = 0$.
- Sea $\mu = \delta(1) - \sum_{n=1}^{\infty} \delta(y_n) - \delta(x_n) \neq 0$. **Afirmación:** $T_f(\mu) = 0$.

Contraejemplos

Existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que $T_f\colon \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ no es inyectivo.

- Toma $C \subset [0,1]$ un Cantor gordo, $[0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$. Considera

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto |[0,x] \setminus C| = \int_0^x \chi_{[0,1]\setminus C}(t)dt \end{aligned}$$

f es 1-Lipschitz, inyectiva, $|f(C)| = \int_{f(C)} 1 = \int_C f' = \int_C \chi_{[0,1]\setminus C} = 0$.

- Sea $\mu = \delta(1) - \sum_{n=1}^{\infty} \delta(y_n) - \delta(x_n) \neq 0$. **Afirmación:** $T_f(\mu) = 0$.
- Considera la isometría

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathcal{F}([0,1]) &\to L_1[0,1] \\ \delta(x) &\mapsto \chi_{[0,x]} \end{aligned}$$

Contraejemplos

Existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que $T_f\colon \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ no es inyectivo.

- Toma $C \subset [0,1]$ un Cantor gordo, $[0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n)$. Considera

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto |[0,x] \setminus C| = \int_0^x \chi_{[0,1]\setminus C}(t)dt \end{aligned}$$

f es 1-Lipschitz, inyectiva, $|f(C)| = \int_{f(C)} 1 = \int_C f' = \int_C \chi_{[0,1]\setminus C} = 0$.

- Sea $\mu = \delta(1) - \sum_{n=1}^{\infty} \delta(y_n) - \delta(x_n) \neq 0$. **Afirmación:** $T_f(\mu) = 0$.
- Considera la isometría

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathcal{F}([0,1]) &\to L_1[0,1] \\ \delta(x) &\mapsto \chi_{[0,x]} \end{aligned}$$

- $\Phi(\mu) = \chi_C$ y

$$\begin{aligned} \Phi T_f \Phi^{-1}\colon L_1([0,1]) &\to L_1([0,1]) \\ g &\mapsto g \circ f^{-1} \end{aligned}$$

- Por tanto, $\Phi T_f \Phi^{-1}(\chi_C) = \chi_C \circ f^{-1} = \chi_{f(C)} = 0$. Así que $T_f(\mu) = 0$.

Contraejemplos

Existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que $T_f\colon \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ no es inyectivo.

Podemos modificar este ejemplo para probar:

Contraejemplos

Existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que $T_f\colon \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ no es inyectivo.

Podemos modificar este ejemplo para probar:

- Dado $0 < \alpha \leq 1$, existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon ([0,1], |\cdot|^\alpha) \to [0,1]$ tal que T_f no es inyectivo.

Contraejemplos

Existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que $T_f\colon \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ no es inyectivo.

Podemos modificar este ejemplo para probar:

- Dado $0 < \alpha \leq 1$, existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon ([0,1], |\cdot|^\alpha) \to [0,1]$ tal que T_f no es inyectivo.
- Existe un espacio métrico M compacto, totalmente disconexo y puramente 1-no rectificable, y una función $f\colon M \to [0,1]$ Lipschitz inyectiva tal que T_f no es inyectivo.

Contraejemplos

Existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que $T_f\colon \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ no es inyectivo.

Podemos modificar este ejemplo para probar:

- Dado $0 < \alpha \leq 1$, existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon ([0,1], |\cdot|^\alpha) \to [0,1]$ tal que T_f no es inyectivo.
- Existe un espacio métrico M compacto, totalmente disconexo y puramente 1-no rectificable, y una función $f\colon M \to [0,1]$ Lipschitz inyectiva tal que T_f no es inyectivo.
- Existe un espacio métrico M numerable, discreto y completo, y una función $f\colon M \to [0,1]$ Lipschitz inyectiva tal que T_f no es inyectivo.

Contraejemplos

Existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que $T_f\colon \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ no es inyectivo.

Podemos modificar este ejemplo para probar:

- Dado $0 < \alpha \leq 1$, existe una función Lipschitz inyectiva $f\colon ([0,1], |\cdot|^\alpha) \to [0,1]$ tal que T_f no es inyectivo.
- Existe un espacio métrico M compacto, totalmente disconexo y puramente 1-no rectificable, y una función $f\colon M \to [0,1]$ Lipschitz inyectiva tal que T_f no es inyectivo.
- Existe un espacio métrico M numerable, discreto y completo, y una función $f\colon M \to [0,1]$ Lipschitz inyectiva tal que T_f no es inyectivo.

Esto también muestra que

$$f \text{ inyectiva} + \text{localmente bi-Lipschitz} \not\Rightarrow T_f \text{ inyectiva}$$

Ejemplos positivos

Ejemplos positivos

Toda función biLipschitz!

Ejemplos positivos

Toda función biLipschitz! Uno algo menos trivial...

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = x^2$. Entonces T_f es inyectivo.

Ejemplos positivos

Toda función biLipschitz! Uno algo menos trivial...

Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = x^2$. Entonces T_f es inyectivo.

Dem. Dada la isometría $\Phi\colon \mathcal{F}([0,1]) \to L_1[0,1]$ como antes, tenemos que $\Phi T_f \Phi^{-1}\colon L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ está dado por $g \mapsto g \circ \sqrt{\cdot}$ y por tanto es inyectivo.

Ejemplos positivos

Toda función biLipschitz! Uno algo menos trivial...

Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = x^2$. Entonces T_f es inyectivo.

Dem. Dada la isometría $\Phi\colon \mathcal{F}([0,1]) \to L_1[0,1]$ como antes, tenemos que $\Phi T_f \Phi^{-1}\colon L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ está dado por $g \mapsto g \circ \sqrt{\cdot}$ y por tanto es inyectivo.

Sea $0 < \alpha < 1$ y $Id\colon ([0,1], |\cdot|^\alpha) \to ([0,1], |\cdot|)$ (que es Lipschitz y inyectiva). Entonces T_{Id} es injectivo.

Ejemplos positivos

Toda función biLipschitz! Uno algo menos trivial...

Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = x^2$. Entonces T_f es inyectivo.

Dem. Dada la isometría $\Phi\colon \mathcal{F}([0,1]) \to L_1[0,1]$ como antes, tenemos que $\Phi T_f \Phi^{-1}\colon L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ está dado por $g \mapsto g \circ \sqrt{\cdot}$ y por tanto es inyectivo.

Sea $0 < \alpha < 1$ y $Id\colon ([0,1], |\cdot|^\alpha) \to ([0,1], |\cdot|)$ (que es Lipschitz y inyectiva). Entonces T_{Id} es injectivo.

Idea de la dem.

- $T_{Id}^* = C_{Id}\colon \mathrm{Lip}_0([0,1], |\cdot|) \to \mathrm{Lip}_0([0,1], |\cdot|^\alpha)$.

Ejemplos positivos

Toda función biLipschitz! Uno algo menos trivial...

Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = x^2$. Entonces T_f es inyectivo.

Dem. Dada la isometría $\Phi\colon \mathcal{F}([0,1]) \to L_1[0,1]$ como antes, tenemos que $\Phi T_f \Phi^{-1}\colon L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ está dado por $g \mapsto g \circ \sqrt{\cdot}$ y por tanto es inyectivo.

Sea $0 < \alpha < 1$ y $Id\colon ([0,1], |\cdot|^\alpha) \to ([0,1], |\cdot|)$ (que es Lipschitz y inyectiva). Entonces T_{Id} es injectivo.

Idea de la dem.

- $T_{Id}^* = C_{Id}\colon \mathrm{Lip}_0([0,1], |\cdot|) \to \mathrm{Lip}_0([0,1], |\cdot|^\alpha)$.
- Ejercicio: $T\colon X \to Y$ inyectivo si y sólo si $\overline{T^*(Y^*)}^{w^*} = X^*$.

Ejemplos positivos

Toda función biLipschitz! Uno algo menos trivial...

Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = x^2$. Entonces T_f es inyectivo.

Dem. Dada la isometría $\Phi\colon \mathcal{F}([0,1]) \to L_1[0,1]$ como antes, tenemos que $\Phi T_f \Phi^{-1}\colon L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ está dado por $g \mapsto g \circ \sqrt{\cdot}$ y por tanto es inyectivo.

Sea $0 < \alpha < 1$ y $Id\colon (M, d^\alpha) \to (M, d)$, M acotado (que es Lipschitz y inyectiva). Entonces T_{Id} es injectivo.

Idea de la dem.

- $T_{Id}^* = C_{Id}\colon \text{Lip}_0([0,1], |\cdot|) \to \text{Lip}_0([0,1], |\cdot|^\alpha)$.
- Ejercicio: $T\colon X \to Y$ inyectivo si y sólo si $\overline{T^*(Y^*)}^{w^*} = X^*$.
- Probar que $C_{Id}(\text{Lip}_0([0,1], |\cdot|)$ es normante para $\mathcal{F}([0,1], |\cdot|^\alpha)$.

Espacios métricos donde la inyectividad se conserva

Definición. Decimos que M es **Lip-lin inyectivo** (o *OTOTOTO*) si para cada N y cada $f\colon M \to N$ Lipschitz inyectiva con $f(0) = 0$, se sigue que $T_f\colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ es inyectiva.

Espacios métricos donde la inyectividad se conserva

Definición. Decimos que M es **Lip-lin inyectivo** (o *OTOTOTO*) si para cada N y cada $f\colon M \to N$ Lipschitz inyectiva con $f(0) = 0$, se sigue que $T_f\colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ es inyectiva.

Si M es Lip-lin inyectivo y L se embebe biLipschitz en M, entonces L es Lip-lin inyectivo.

Espacios métricos donde la inyectividad se conserva

Definición. Decimos que M es **Lip-lin inyectivo** (o *OTOTOTO*) si para cada N y cada $f\colon M \to N$ Lipschitz inyectiva con $f(0) = 0$, se sigue que $T_f\colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ es inyectiva.

Si M es Lip-lin inyectivo y L se embebe biLipschitz en M, entonces L es Lip-lin inyectivo.

Dem. Sea $f\colon L \to N$. Extiende f a $\tilde{f}\colon M \to \ell_\infty(N)$. Sea $\rho = \min\{1, d\}$ y

$$\begin{aligned} g\colon M &\to \ell_\infty(N) \times \mathcal{F}(M, \rho) \\ x &\mapsto (\tilde{f}(x), \rho(L, x)\delta(x)) \end{aligned}$$

Se tiene que g es Lipschitz, inyectiva, y $\ker(T_f) \subset \ker(T_g)$.

Espacios métricos donde la inyectividad se conserva

Definición. Decimos que M es **Lip-lin inyectivo** (o *OTOTOTO*) si para cada N y cada $f\colon M \to N$ Lipschitz inyectiva con $f(0) = 0$, se sigue que $T_f\colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ es inyectiva.

Si M es Lip-lin inyectivo y L se embebe biLipschitz en M, entonces L es Lip-lin inyectivo.

Dem. Sea $f\colon L \to N$. Extiende f a $\tilde{f}\colon M \to \ell_\infty(N)$. Sea $\rho = \min\{1, d\}$ y

$$\begin{aligned} g\colon M &\to \ell_\infty(N) \times \mathcal{F}(M, \rho) \\ x &\mapsto (\tilde{f}(x), \rho(L, x)\delta(x)) \end{aligned}$$

Se tiene que g es Lipschitz, inyectiva, y $\ker(T_f) \subset \ker(T_g)$.

Si M es Lip-lin inyectivo, entonces M es puramente 1-no rectificable

Espacios métricos donde la inyectividad se conserva

Definición. Decimos que M es **Lip-lin inyectivo** (o *OTOTOTO*) si para cada N y cada $f\colon M \to N$ Lipschitz inyectiva con $f(0) = 0$, se sigue que $T_f\colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ es inyectiva.

Si M es Lip-lin inyectivo y L se embebe biLipschitz en M, entonces L es Lip-lin inyectivo.

Dem. Sea $f\colon L \to N$. Extiende f a $\tilde{f}\colon M \to \ell_\infty(N)$. Sea $\rho = \min\{1, d\}$ y

$$\begin{aligned} g\colon M &\to \ell_\infty(N) \times \mathcal{F}(M, \rho) \\ x &\mapsto (\tilde{f}(x), \rho(L, x)\delta(x)) \end{aligned}$$

Se tiene que g es Lipschitz, inyectiva, y $\ker(T_f) \subset \ker(T_g)$.

Si M es Lip-lin inyectivo, entonces M es puramente 1-no rectificable

Sin embargo, el recíproco no es cierto.

Espacios métricos donde la inyectividad se conserva

Teorema (G.L-Petitjean-Procházka, 2022)

Los siguientes espacios son Lip-lin inyectivos:

a) M es uniformemete discreto (es decir, $\inf_{x \neq y} d(x, y)$¿0)

b) M es compacto y $\mathcal{H}^1(M) = 0$.

c) M es compacto y existe $\rho > 1$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, M se cubre por una cantidad finita de bolas $B(x_i, r)$ disjuntas dos a dos de radio $r \leq \varepsilon$ (por ejemplo, el polvo de Cantor).

Espacios métricos donde la inyectividad se conserva

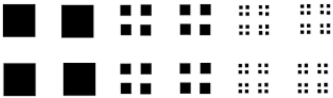
Teorema (G.L-Petitjean-Procházka, 2022)

Los siguientes espacios son Lip-lin inyectivos:

a) M es uniformemete discreto (es decir, $\inf_{x\neq y} d(x,y)$¿0)

b) M es compacto y $\mathcal{H}^1(M) = 0$.

c) M es compacto y existe $\rho > 1$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, M se cubre por una cantidad finita de bolas $B(x_i, r)$ disjuntas dos a dos de radio $r \leq \varepsilon$ (por ejemplo, el polvo de Cantor).



Espacios métricos donde la inyectividad se conserva

Teorema (G.L-Petitjean-Procházka, 2022)

Los siguientes espacios son Lip-lin inyectivos:

a) M es uniformemete discreto (es decir, $\inf_{x \neq y} d(x, y)$¿0)
b) M es compacto y $\mathcal{H}^1(M) = 0$.
c) M es compacto y existe $\rho > 1$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, M se cubre por una cantidad finita de bolas $B(x_i, r)$ disjuntas dos a dos de radio $r \leq \varepsilon$ (por ejemplo, el polvo de Cantor).

Idea para b) and c):

Sea M compacto. Son equivalentes

(i) M es Lip-lin inyectivo y totalmente disconexo.
(ii) Las funciones localmente constantes son débil*-densas en $\mathrm{Lip}_0(M)$.

Espacios métricos donde la inyectividad se conserva

Teorema (G.L-Petitjean-Procházka, 2022)

Los siguientes espacios son Lip-lin inyectivos:

a) M es uniformemete discreto (es decir, $\inf_{x \neq y} d(x, y)$¿0)

b) M es compacto y $\mathcal{H}^1(M) = 0$.

c) M es compacto y existe $\rho > 1$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, M se cubre por una cantidad finita de bolas $B(x_i, r)$ disjuntas dos a dos de radio $r \leq \varepsilon$ (por ejemplo, el polvo de Cantor).

Idea para b) and c):

Sea M compacto. Son equivalentes

(i) M es Lip-lin inyectivo y totalmente disconexo.

(ii) Las funciones localmente constantes son débil*-densas en $\mathrm{Lip}_0(M)$.

Idea para a): considerar el soporte de elementos en $\mathcal{F}(M)$.

Funciones Lipschitz preservando soportes

Aliaga-Pernecká-Petitjean-Procházka, 2020

Dado $0 \neq \mu \in \mathcal{F}(M)$, su **soporte** $\mathrm{supp}\mu$ es la intersección de todos los cerrados $L \subset M$ con $\mu \in \mathcal{F}(L \cup \{0\})$.

Funciones Lipschitz preservando soportes

Aliaga-Pernecká-Petitjean-Procházka, 2020

Dado $0 \neq \mu \in \mathcal{F}(M)$, su **soporte** $\mathrm{supp}\mu$ es la intersección de todos los cerrados $L \subset M$ con $\mu \in \mathcal{F}(L \cup \{0\})$.

$$x \in \mathrm{supp}(\mu) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in \mathrm{Lip}_0(M) : \mathrm{supp} g \subset B(x, \varepsilon), \langle g, \mu \rangle \neq 0$$

Funciones Lipschitz preservando soportes

Aliaga-Pernecká-Petitjean-Procházka, 2020

Dado $0 \neq \mu \in \mathcal{F}(M)$, su **soporte** $\mathrm{supp}\mu$ es la intersección de todos los cerrados $L \subset M$ con $\mu \in \mathcal{F}(L \cup \{0\})$.

$$x \in \mathrm{supp}(\mu) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists g \in \mathrm{Lip}_0(M) : \mathrm{supp} g \subset B(x, \varepsilon), \langle g, \mu \rangle \neq 0$$

Si $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta(x_n)$, $(a_n) \in \ell_1$ y $a_n \neq 0$, entonces $\mathrm{supp}\mu = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Funciones Lipschitz preservando soportes

Aliaga-Pernecká-Petitjean-Procházka, 2020

Dado $0 \neq \mu \in \mathcal{F}(M)$, su **soporte** $\mathrm{supp}\mu$ es la intersección de todos los cerrados $L \subset M$ con $\mu \in \mathcal{F}(L \cup \{0\})$.

$$x \in \mathrm{supp}(\mu) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists g \in \mathrm{Lip}_0(M) : \mathrm{supp} g \subset B(x, \varepsilon), \langle g, \mu \rangle \neq 0$$

Si $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta(x_n)$, $(a_n) \in \ell_1$ y $a_n \neq 0$, entonces $\mathrm{supp}\mu = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Decimos que $f : M \to N$ **conserva soportes** si

$$\mathrm{supp}\, T_f(\mu) = \overline{f(\mathrm{supp}\mu)} \quad \forall \mu \in \mathcal{F}(M)$$

Funciones Lipschitz preservando soportes

Aliaga-Pernecká-Petitjean-Procházka, 2020

Dado $0 \neq \mu \in \mathcal{F}(M)$, su **soporte** $\mathrm{supp}\mu$ es la intersección de todos los cerrados $L \subset M$ con $\mu \in \mathcal{F}(L \cup \{0\})$.

$$x \in \mathrm{supp}(\mu) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in \mathrm{Lip}_0(M) : \mathrm{supp} g \subset B(x, \varepsilon), \langle g, \mu \rangle \neq 0$$

Si $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta(x_n)$, $(a_n) \in \ell_1$ y $a_n \neq 0$, entonces $\mathrm{supp}\mu = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Decimos que $f \colon M \to N$ **conserva soportes** si

$$\mathrm{supp}\, T_f(\mu) = \overline{f(\mathrm{supp}\mu)} \quad \forall \mu \in \mathcal{F}(M)$$

Sea $f \colon M \to N$ Lipschitz con $f(0) = 0$.

- M uniformemente discreto y f inyectiva $\Rightarrow$ f conserva soportes.

Funciones Lipschitz preservando soportes

Aliaga-Pernecká-Petitjean-Procházka, 2020

Dado $0 \neq \mu \in \mathcal{F}(M)$, su **soporte** $\mathrm{supp}\mu$ es la intersección de todos los cerrados $L \subset M$ con $\mu \in \mathcal{F}(L \cup \{0\})$.

$$x \in \mathrm{supp}(\mu) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists g \in \mathrm{Lip}_0(M) : \mathrm{supp} g \subset B(x, \varepsilon), \langle g, \mu \rangle \neq 0$$

Si $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta(x_n)$, $(a_n) \in \ell_1$ y $a_n \neq 0$, entonces $\mathrm{supp}\mu = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Decimos que $f \colon M \to N$ **conserva soportes** si

$$\mathrm{supp}\, T_f(\mu) = \overline{f(\mathrm{supp}\mu)} \quad \forall \mu \in \mathcal{F}(M)$$

Sea $f \colon M \to N$ Lipschitz con $f(0) = 0$.

- M uniformemente discreto y f inyectiva $\Rightarrow$ f conserva soportes.
- f conserva soportes $\Rightarrow$ T_f inyectivo.

Funciones Lipschitz preservando soportes

Aliaga-Pernecká-Petitjean-Procházka, 2020

Dado $0 \neq \mu \in \mathcal{F}(M)$, su **soporte** $\mathrm{supp}\mu$ es la intersección de todos los cerrados $L \subset M$ con $\mu \in \mathcal{F}(L \cup \{0\})$.

$$x \in \mathrm{supp}(\mu) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in \mathrm{Lip}_0(M) : \mathrm{supp} g \subset B(x, \varepsilon), \langle g, \mu \rangle \neq 0$$

Si $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta(x_n)$, $(a_n) \in \ell_1$ y $a_n \neq 0$, entonces $\mathrm{supp}\mu = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Decimos que $f : M \to N$ **conserva soportes** si

$$\mathrm{supp}\, T_f(\mu) = \overline{f(\mathrm{supp}\mu)} \quad \forall \mu \in \mathcal{F}(M)$$

Sea $f : M \to N$ Lipschitz con $f(0) = 0$.

- M uniformemente discreto y f inyectiva $\Rightarrow$ f conserva soportes.
- f conserva soportes $\Rightarrow$ T_f inyectivo.
- M es acotado y T_f inyectivo $\Rightarrow$ f conserva soportes.

Funciones Lipschitz preservando soportes

Aliaga-Pernecká-Petitjean-Procházka, 2020

Dado $0 \neq \mu \in \mathcal{F}(M)$, su **soporte** $\mathrm{supp}\mu$ es la intersección de todos los cerrados $L \subset M$ con $\mu \in \mathcal{F}(L \cup \{0\})$.

$$x \in \mathrm{supp}(\mu) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in \mathrm{Lip}_0(M) : \mathrm{supp} g \subset B(x, \varepsilon), \langle g, \mu \rangle \neq 0$$

Si $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta(x_n)$, $(a_n) \in \ell_1$ y $a_n \neq 0$, entonces $\mathrm{supp}\mu = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Decimos que $f : M \to N$ **conserva soportes** si

$$\mathrm{supp}\, T_f(\mu) = \overline{f(\mathrm{supp}\mu)} \quad \forall \mu \in \mathcal{F}(M)$$

Sea $f : M \to N$ Lipschitz con $f(0) = 0$.

- M uniformemente discreto y f inyectiva $\Rightarrow$ f conserva soportes.
- f conserva soportes $\Rightarrow$ T_f inyectivo.
- M es acotado y T_f inyectivo $\Rightarrow$ f conserva soportes.

La prueba se basa en la débil*-débil*-continuidad de los operadores de multiplicación $M_\omega(f) = \omega \cdot f$.

Funciones Lipschitz preservando soportes

Aliaga-Pernecká-Petitjean-Procházka, 2020

Dado $0 \neq \mu \in \mathcal{F}(M)$, su **soporte** $\mathrm{supp}\mu$ es la intersección de todos los cerrados $L \subset M$ con $\mu \in \mathcal{F}(L \cup \{0\})$.

$$x \in \mathrm{supp}(\mu) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists g \in \mathrm{Lip}_0(M) : \mathrm{supp} g \subset B(x, \varepsilon), \langle g, \mu \rangle \neq 0$$

Si $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta(x_n)$, $(a_n) \in \ell_1$ y $a_n \neq 0$, entonces $\mathrm{supp}\mu = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Decimos que $f : M \to N$ **conserva soportes** si

$$\mathrm{supp}\, T_f(\mu) = \overline{f(\mathrm{supp}\mu)} \quad \forall \mu \in \mathcal{F}(M)$$

Sea $f : M \to N$ Lipschitz con $f(0) = 0$.

- M uniformemente discreto y f inyectiva $\Rightarrow$ f conserva soportes.
- f conserva soportes $\Rightarrow$ T_f inyectivo.
- M es acotado y T_f inyectivo $\Rightarrow$ f conserva soportes.

La prueba se basa en la débil*-débil*-continuidad de los operadores de multiplicación $M_\omega(f) = \omega \cdot f$.

¿Qué ocurre para M no acotado?

¡Gracias por vuestra atención!