

# COMPRENSIÓN DEL ENFOQUE FRECUENCIAL DE LA PROBABILIDAD POR ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

## Understanding of the frequentist approach to probability by secondary school students

Begué, N.<sup>a</sup>, Batanero, C.<sup>a</sup>, Gea, M.M.<sup>a</sup> y Beltrán-Pellicer, P.<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Universidad de Granada, <sup>b</sup>Universidad de Zaragoza

### Resumen

*Se presenta un estudio de evaluación de la comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en una muestra de 302 estudiantes de segundo y cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria. Analizamos las respuestas a una tarea en que se pide la estimación de la frecuencia de un resultado en cuatro repeticiones de un experimento. El análisis estadístico de las cuatro estimaciones sugiere una buena percepción del valor esperado y una percepción incorrecta de la variabilidad de los resultados. Se observan también el sesgo de equiprobabilidad y la heurística de la representatividad en una parte de los estudiantes, mejorando los resultados en el curso superior.*

**Palabras clave:** *probabilidad, aproximación frecuencial, valor esperado, variabilidad*

### Abstract

*We present an assessment study of 302 secondary students' understanding of the frequentist perspective of probability. We analyse their answers to a task where students are asked to estimate the frequency of a result in four different repetitions of the same experiment. The statistical analysis of the four estimations suggests a suitable perception of the expected value in contrast to the perception of variability. The results of the study also suggest the equiprobability bias and the representativeness heuristics, especially within the younger group.*

**Keywords:** *probability, frequentist approach, average, variability*

## INTRODUCCIÓN

Desde sus inicios, la probabilidad ha recibido diferentes significados que actualmente todavía se utilizan en diferentes aplicaciones, de modo que un conocimiento completo de la probabilidad no puede reducirse a uno de estos enfoques (Batanero, 2005). Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado siempre presente en los currículos españoles de secundaria, la nueva legislación (MECD, 2015) sugiere complementar el significado clásico de la probabilidad con el significado frecuencial, en el que la probabilidad se concibe como el límite teórico de la frecuencia relativa en una serie larga de experimentos. Dicho enfoque permite conectarla estadística y la probabilidad, pues la estimación de una probabilidad se debe realizar a partir de datos empíricos (Batanero, 2005). Más concretamente, en el currículo básico (MECD, 2015) se incluyen los contenidos relacionados con este tema que se presentan en la Tabla 1.

El enfoque frecuencial de la probabilidad se presenta también en los libros de texto, incluso desde la educación primaria (Gómez, Contreras y Batanero, 2015). Será entonces importante asegurar que los alumnos comprenden este enfoque y ayudarles a corregir posibles sesgos en su razonamiento que les dificulten poner en relación los diversos significados de la probabilidad.

Aunque la investigación en probabilidad tiene ya una amplia tradición, las investigaciones relacionadas con la comprensión del significado frecuencial son todavía escasas (Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016). Para contribuir a completar estos estudios, el objetivo de investigación que se define en nuestro trabajo se corresponde con evaluar y analizar la comprensión tanto de la relación entre el valor de una proporción en la población y la frecuencia relativa esperada, como del efecto del tamaño de la muestra sobre dicha variabilidad. Para lo cual se define un instrumento de evaluación dirigido a una de alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). También se desea comparar la comprensión mostrada sobre los dos puntos anteriores en los estudiantes de 2º y 4º curso de la ESO, para evaluar la posible mejora con la edad e instrucción recibida por estos últimos.

Tabla 1. Contenidos relacionados con el enfoque frecuencial en el currículo de secundaria

Curso	Contenidos
1º y 2º	Fenómenos deterministas y aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables (MECD, 2015, p.413).
3º curso Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas	Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos (MECD, 2015, p.394).
4º curso Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas	Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Experiencias aleatorias compuestas. Probabilidad condicionada. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística (MECD, 2015, p.398).
4º curso Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas	Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión. Azar y probabilidad. Frecuencia de un suceso aleatorio. Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes (MECD, 2015, p.403).

## ANTECEDENTES

La investigación sobre el significado frecuencial de la probabilidad, que la caracteriza como el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa bajo la repetición del fenómeno en idénticas condiciones, se ha centrado en analizar la capacidad de estimar una probabilidad teórica a partir de datos de frecuencias. De acuerdo a Ben-Zvi, Bakker y Makar (2015), la ley de los grandes números garantiza que las muestras de tamaño suficiente representan adecuadamente a la población de la que fueron tomadas, de modo que los estadísticos asociados a la muestra están próximos a los valores de los parámetros de la población. Como consecuencia, se puede utilizar la frecuencia relativa de un cierto resultado en estas muestras para estimar la probabilidad teórica de dicho resultado en la población. Esta estimación irá aumentando en precisión con el mayor tamaño de la muestra. En otras palabras, la ley de los grandes números sirve de soporte al significado frecuencial de la probabilidad.

Una de las primeras investigaciones en esta línea fue la realizada por Green (1983) con 2930 niños ingleses (de 11 a 16 años), a los que propone (entre otros) un ítem sobre la comprensión de la estimación frecuencial de la probabilidad asociada a un experimento con sucesos no equiprobables. El experimento consistía en el lanzamiento de 100 chinchetas al aire, para determinar cuántas caen con la punta hacia arriba o hacia abajo. En el ítem, Green proporciona los datos obtenidos en la realización de un experimento, donde 68 de 100 chinchetas caen con la punta hacia arriba. El autor esperaba que

los niños den un resultado parecido, pero no idéntico. No obstante, los resultados revelaron que el 64% de los niños mostraron el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), consistente en asumir que los diferentes resultados de cualquier experimento aleatorio son equiprobables. Estos niños, proporcionaron respuestas en las que la mitad de las chinchetas, aproximadamente, caerían hacia arriba, sin tener en cuenta la información frecuencial. Por otro lado, otros niños que mostraron una preferencia a obtener punta hacia arriba (correcta o parcialmente correcta), dieron una cantidad muy alejada de la esperada. Únicamente el 17% de la muestra dio una estimación correcta de la probabilidad en el experimento propuesto.

Este mismo ítem fue propuesto por Cañizares (1997) a 253 niños españoles (de entre 10 a 14 años). La autora indica que el 64,1% de los alumnos muestran el sesgo de equiprobabilidad, mientras que sólo el 15% responde correctamente. Además, se observa un aumento no significativo con la edad en la consideración del principio de equiprobabilidad. En relación con este estudio, la revisión del currículo oficial, donde algunos contenidos de probabilidad son contemplados desde los primeros cursos de primaria, nos incita a esperar una mejora en los resultados de nuestra investigación.

Más recientemente, Gómez, Batanero y Contreras (2014) elaboran un cuestionario constituido por cuatro ítems para evaluar algunas componentes del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial de futuros profesores de Educación Primaria. El primer ítem está dirigido a evaluar el conocimiento común del contenido (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001), y es una adaptación del propuesto por Green (1983). Dicho ítem, que usaremos en nuestro estudio, demanda a los participantes pensar cuatro resultados probables, si se repite el experimento. Los resultados se desprenden desde el análisis de la media de los cuatro valores y su variabilidad. Los autores encuentran que solo una tercera parte aproximadamente de la muestra tiene una intuición simultánea de la convergencia al valor esperado y de la variabilidad muestral. Por tanto, los sujetos presentan pobres intuiciones sobre los experimentos aleatorios. Por otro lado, los participantes presentan diferentes sesgos como la equiprobabilidad, la heurística de la representatividad, o piensan que no es posible realizar la predicción.

Estos resultados coinciden con las investigaciones de Green (1983) y Cañizares (1997), aunque evidencian una mejora en el razonamiento probabilístico. Gómez et al. (2014) señalan que la adaptación del ítem proporciona información sobre la comprensión de la variabilidad, por lo que los resultados muestran que una parte relevante de los sujetos produce muestras de variabilidad extrema o de patrón determinista. En nuestro trabajo utilizamos el ítem adaptado por Gómez et al. (2014), realizando un análisis más detallado de las respuestas, tanto en lo que concierne a la comprensión del valor esperado, como en lo que se refiere a la comprensión de la variabilidad. Además, se propone a estudiantes de Educación Secundaria, y se comparan dos grupos de estudiantes.

## **METODOLOGÍA**

Se trata de un estudio exploratorio de evaluación, básicamente cuantitativo puesto que nuestras conclusiones se deducen del análisis estadístico de los resultados. Dicho análisis es descriptivo y se reduce a la elaboración e interpretación de tablas, gráficos y algunos estadísticos resumen.

La muestra está constituida por un total de 302 alumnos, de los cuales 157 son de 2º de ESO (13-14 años) y 145 de 4º de ESO (15-16 años). El número de grupos distintos de alumnos que participaron fue 9 grupos de 2º de ESO, y 8 grupos de 4º de ESO, de los cuales 6 grupos (en total 108 alumnos, el 75% de los alumnos de este nivel educativo) corresponden a la opción B, orientada a los alumnos que pretenden continuar el Bachillerato. El resto de los alumnos de 4º siguen la opción A recomendada a los estudiantes que piensan continuar la formación profesional. Los participantes que configuran la muestra pertenecen a dos institutos (centros públicos) que se localizan en la ciudad de Huesca. Aunque los estudiantes provienen de dos centros distintos, las diferencias debidas a este hecho no son relevantes, puesto que diversos factores como la situación socio-económica de las familias es muy similar en ambos institutos.

Los alumnos de 2º de ESO que forman parte de la muestra no habían recibido instrucción previa sobre contenidos de probabilidad y estadística en los centros en que se pasó el estudio, aparte de los conocimientos que pudieran haber obtenido en la educación primaria, donde en el último curso hay algunas ideas intuitivas sobre sucesos aleatorios y probabilidad simple. Algunos de los alumnos de los grupos de 4º de ESO recibieron instrucción sobre probabilidad desde el significado clásico de la misma o nociones de estadística descriptiva en los cursos anteriores, independientemente de la modalidad que estaban cursando. En los demás grupos, la ausencia de enseñanza de dichos contenidos responde a factores como el tiempo, que imposibilita a los profesores poder llevar al aula todos los contenidos del currículo. En el caso de la enseñanza de la probabilidad y la combinatoria, dichos contenidos se presentan al final del temario, lo cual conduce a la observación citada anteriormente; es decir, a que dichos contenidos no sean tratados.

Los datos se recogieron por escrito, en la clase de matemáticas, como una actividad de la citada clase, explicándoles el fin de la evaluación y resolviendo las dudas sobre la forma de completarlo. En el cuestionario se propone a los estudiantes la siguiente tarea, que fue resuelta con interés por los alumnos:

**Ítem 1.** Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba 🍌 y 32 caen hacia abajo 🍌.

Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño vacía una caja de 100 chinchetas y obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo. Escribe en la siguiente tabla un resultado que te parezca probable para cada niño:

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Este ítem, como se ha indicado, se ha tomado de Gómez et al. (2014), quien lo adaptó de otro anterior de Green (1983). El fenómeno aleatorio descrito se corresponde con el lanzamiento de chinchetas, y la distribución del número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba se puede modelizar con un modelo binomial,  $B(n, p)$ , donde  $n$  es el tamaño de la muestra y es la probabilidad de que una chincheta caiga con la punta hacia arriba, siendo esta probabilidad desconocida. La comprensión de la distribución binomial ha sido analizada por Sánchez, García y Medina (2014) en estudiantes de Bachillerato, indicando que los sujetos de su muestra tienen dificultad en describir el rango de la variable y presentan el sesgo de equiprobabilidad.

En nuestro caso, si  $X$  es el número de chinchetas que caen hacia arriba en un total de 100 ( $n = 100$ ), y  $p$  es la probabilidad de que una chincheta caiga con la punta hacia arriba, esta probabilidad se puede estimar a partir de los datos dados en el enunciado, los cuales permiten también una estimación tanto del valor esperado en los 100 ensayos:  $np$ , como de su desviación típica:

Con los datos de la tarea, la probabilidad estimada es de 0,68 y el valor esperado de chinchetas hacia arriba es de 68, con una desviación típica de 4,7. Por tanto, se puede considerar que el sujeto presenta una buena concepción o intuición del valor esperado si el valor medio de las cuatro respuestas que proporciona es cercano a 68. A este respecto, se considerarán cercanas aquellas respuestas cuyos valores, para el número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba, se localicen dentro del intervalo (63,73), que se calcula al determinar la media más/menos una desviación típica. Este es el intervalo de valores que contiene el 68% de las observaciones más probables en la distribución normal (la distribución binomial en este caso se aproxima bien por la normal, debido al tamaño de la muestra). El alumno que proporcione estimaciones en este rango, debe también reconocer la ausencia de equiprobabilidad, por la asimetría física del dispositivo (puesto que la cabeza pesa más, es más probable que la chincheta caiga con la punta hacia arriba).

Para analizar la comprensión que muestran los estudiantes de la variabilidad de la frecuencia relativa y el valor esperado en diferentes muestras, se estudia el rango de los cuatro valores proporcionados en la respuesta a la tarea, es decir, se calcula la diferencia entre el valor máximo y el mínimo proporcionados. Como se ha indicado, la desviación típica en este experimento es aproximadamente igual a 5; por lo tanto, el intervalo obtenido sumando y restando a la media dos veces la desviación típica y que contiene el 95% de los valores, corresponde a las estimaciones de entre 58 y 78 chinchetas con la punta hacia arriba, que corresponde a un rango de amplitud de 20. Siguiendo a Gómez et al. (2014), asumiremos que la percepción de la variabilidad es adecuada cuando el rango de las estimaciones dadas por los estudiantes se encuentre en un intervalo entre dos y cuatro desviaciones típicas, esto es, aproximadamente entre 10 y 20. Si está entre cuatro y seis veces la desviación típica (entre 20 y 30) se considera alta, pero aceptable, y si es mayor excesiva. Si es menor que 10 se considera demasiada concentración y quiere decir que no se comprende la variabilidad muestral.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para analizar la estimación del número esperado de chinchetas que caen con la punta hacia arriba realizada por los alumnos se calculó, en primer lugar, el valor medio de las cuatro estimaciones para cada alumno. Seguidamente se analizó la distribución estadística del conjunto de valores medios calculados por este procedimiento, que se representa gráficamente en la Figura 1a. La media global de dicha distribución arrojó un valor de 57,9, muy similar al obtenido en el trabajo de Gómez et al. (2014), que obtuvo un valor medio de 57,7 para dicha distribución. En los dos estudios este valor es inferior al valor medio esperado, que es 68 (línea vertical señalada la Figura 1a). Ello se explica porque un grupo de estudiantes proporcionan una estimación del número medio de chinchetas que caen hacia arriba sesgada hacia el valor 50, debido a que no tienen en cuenta la información frecuencial.

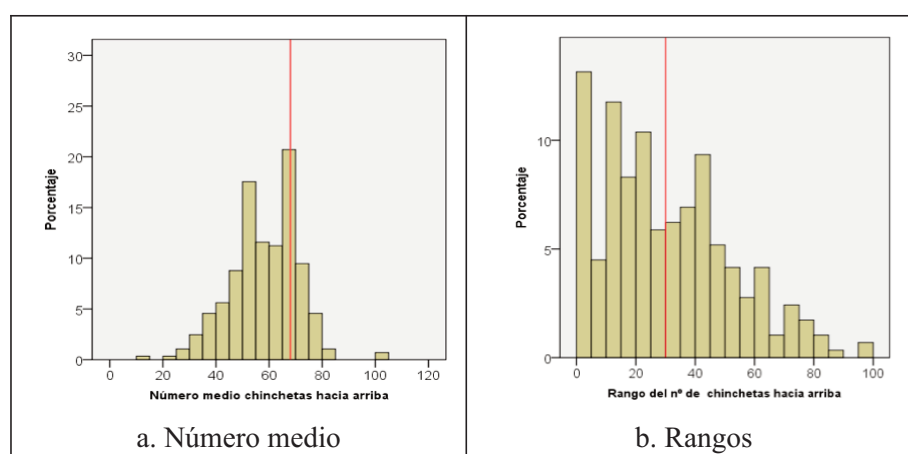


Figura 1. Distribución del número medio y rango de estimaciones de chinchetas con la punta hacia arriba

Además, se observan claramente dos intervalos con alta frecuencia en la distribución. Por un lado, el 24,5% de la muestra proporciona valores medios que se localizan en el intervalo (45, 55). Estos estudiantes presentan el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), consistente en considerar como equiprobables resultados de un experimento aleatorio que claramente no lo son, como el caso de la chincheta. Entre ellos, se incluye un 3,9% de respuestas en las que existe ausencia de variabilidad total; es decir, escriben la cuaterna (50, 50, 50, 50), respuesta que también aparece en el trabajo de Gómez et al. (2014). Por otro lado, si analizamos la frecuencia de los valores medios próximos al valor esperado (63,73), observamos que el 32,4% de estudiantes proporcionan una buena estimación del valor esperado en el experimento. Otros alumnos (13,9%) muestran una tendencia a dar valores medios más bajos del 50%, es decir, consideran que el número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba es menor. Esta tendencia se traduce en la intención de compensar el resultado dado en el enunciado, mostrando la heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982).

Por otro lado, la Figura 1b muestra la distribución estadística de los rangos asociados al conjunto de las cuatro respuestas de cada alumno, la cual permite analizar la comprensión de la variabilidad del muestreo en estos estudiantes. Como se ha indicado anteriormente, y siguiendo a Gómez et al. (2014), se considera adecuada la variabilidad cuando el rango se encuentra entre dos y cuatro desviaciones típicas, aproximadamente entre 10 y 20; alta, pero aceptable, si está entre 20 y 30; y en caso de ser mayor que 30, excesiva y si es menor que 10, se considera demasiada concentración. Observamos que la mayoría de los estudiantes produce una variabilidad excesiva (superior al valor 30, marcado con una línea en el gráfico). En concreto, el 40,4% de los estudiantes de la muestra proporcionan respuestas con una dispersión muy alta (mayor que 30). Además, el 20,8% de los alumnos proporcionan datos con apenas variabilidad (pues el rango de las cuatro estimaciones dadas es menor que 10); mientras el resto, dan una variabilidad adecuada o alta, pero razonable. Por tanto, son muchos los estudiantes que no comprenden el efecto del tamaño de muestra sobre la variabilidad del muestreo, en línea con las investigaciones de Serrano (1996).

### Comparación por curso

A continuación se analizan las respuestas según el curso participante, a través de los dos gráficos presentados en la Figura 2. Dicha información se complementa con las Tablas 2 y 3, que presentan la frecuencia y porcentaje de alumnos que proporcionan algunas respuestas que consideramos sesgadas, tanto para el estudio del valor medio como del rango.

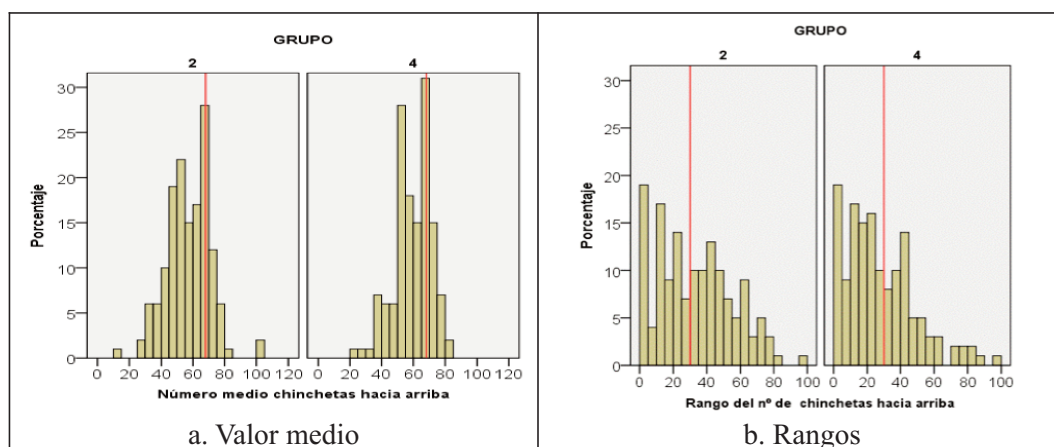


Figura 2. Distribuciones del número medio y rango de estimaciones de chinchetas con la punta hacia arriba según el curso

En primer lugar se comparan las distribuciones de los valores medios en las cuatro estimaciones en los dos grupos de estudiantes (Figura 1a), cuyo análisis evidencia que en ambos grupos hay alumnos que no identifican la diferente probabilidad de los resultados del experimento, puesto que en ambos gráficos hay dos intervalos de alta frecuencia, uno de ellos asociado a la probabilidad teórica (en torno a 69 chinchetas con la punta hacia arriba) y el otro asociado a la equiprobabilidad (50 con la punta hacia arriba).

La media global de dicha distribución en el grupo de 2ºESO (56,9) es menor que el de 4ºESO (58,9), lo que puede corresponderse tanto a la presencia del sesgo de equiprobabilidad como de la heurística de la representatividad, citados anteriormente.

Para analizar este punto presentamos la Tabla 2, donde clasificamos las estimaciones de los estudiantes en diferentes categorías, bien correctas o aceptables o que muestren diferentes sesgos. En otros casos se engloban tanto las respuestas de los alumnos que son incorrectas por diferentes razones, como aquellos alumnos que no responden al ítem. Los sesgos de equiprobabilidad y la heurística de la representatividad, también hallados en las muestras de sujetos que participan en la investigación de Gómez et

al. (2014) y de Serrano (1996) se presentan con frecuencia apreciable, sobre todo el primero. Observamos que la proporción de sesgos, así como de respuestas inadecuadas o en blanco (otros casos en la tabla) es mayor en 2º curso, aunque con pequeñas diferencias respecto al 4º curso. También la frecuencia de estimaciones correctas es inferior en 2º curso que en 4º curso.

Tabla 2. Frecuencia y porcentaje de alumnos según intervalo en que se sitúa la media de los valores dados

	2ºESO		4ºESO	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Hasta 45-Representatividad	26	16,5	16	11,0
45-55. Equiprobabilidad	40	25,5	34	23,5
63-73 Correcto	46	29,3	52	35,9
Otros valores aceptables	35	22,3	36	24
Otros casos	10	6,4	7	4,8

En segundo lugar, analizamos la comprensión de la variabilidad del valor esperado por los estudiantes, a partir del rango de las cuatro estimaciones que aportan. Para ello, en la Figura 2b se representa la distribución de dicho rango según el curso, donde se observa que ambos grupos de estudiantes conceden una variabilidad extrema a las estimaciones proporcionadas. De hecho, aproximadamente el 50% de los alumnos de 2ºESO que participan en el estudio muestran una comprensión pobre acerca de la variabilidad asociada mostrando una variabilidad excesiva en sus estimaciones, siendo este porcentaje menor en el otro grupo estudiado.

En los dos cursos el grupo mayor de estudiantes se sitúa entre los que proporcionan estimaciones con una variabilidad excesiva. Además, en 2º curso el segundo grupo más numeroso lo forman aquellos alumnos cuyas estimaciones tienen un rango menor que 10, lo cual implica una concentración elevada de los valores estimados para el número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba, que también ocurre en un alto porcentaje de estudiantes en 4º curso. Por tanto, se repiten las dificultades con la idea de variabilidad observada en las investigaciones de Orta y Sánchez (2013) y Sánchez, García y Medina (2014). Son minoría en los dos grupos los estudiantes que proporcionan estimaciones con una variabilidad adecuada o bien alta pero aceptable.

Para completar el análisis, presentamos en la Figura 3 los gráficos de caja de las distribuciones del valor medio y el rango de las cuatro estimaciones proporcionadas por cada alumno en los dos grupos. El diagrama de caja asociado al valor medio en cada grupo (Figura 3a) indica, por un lado, que la mediana es algo más baja en los alumnos de segundo. Este resultado, junto a los descriptos anteriormente se debe a que estos alumnos dan valores cercanos al 50% con mayor frecuencia que en 4º curso. Son los alumnos que conciben que los dos resultados son equiprobables, en vez de usar la información frecuencial aportada en la tarea.

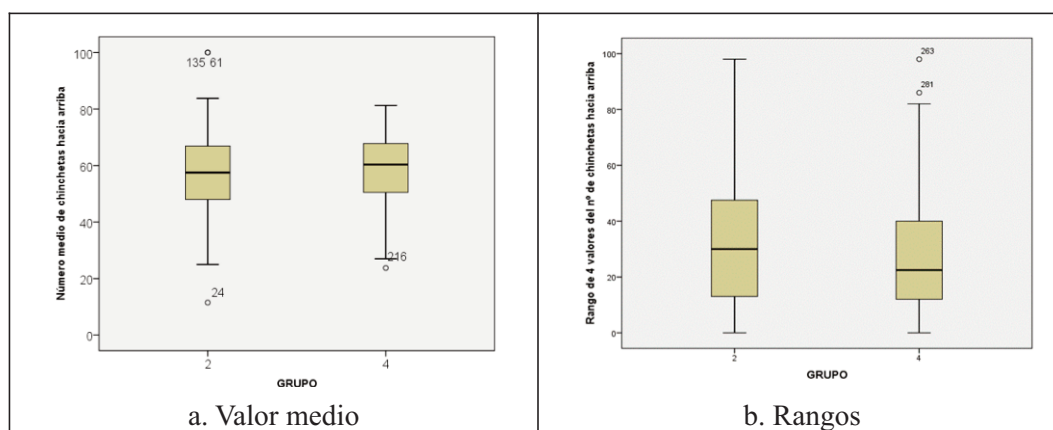


Figura 3. Diagramas de caja del número medio y rango de estimaciones de chinchetas con la punta hacia arriba.

Por otro lado, la dispersión mostrada en este gráfico (variabilidad del valor medio de las cuatro estimaciones) es similar en los dos grupos, aunque levemente mayor en 2º curso, siendo las gráficas relativamente simétricas, aunque algo sesgadas inferiormente. Aparecen algunos valores atípicos, que se corresponden con respuestas cuyos valores para el número de chinchetas se sitúa en los extremos del rango de respuestas posibles, como se observa en las siguientes respuestas de los estudiantes: A61 y A135: (100, 100, 100, 100), A24: (22, 0, 8, 16) y A216: (20, 40, 20, 15), siendo A61 el alumno 61 que responde al cuestionario. Como señala Gómez et al. (2014), estos dos últimos resultados pueden indicar una creencia en la compensación entre los resultados, mostrando la heurística de la representatividad ya comentada.

En la Figura 3b se presenta la distribución de los rangos de las cuatro estimaciones proporcionadas por los estudiantes, en la que se muestra menor mediana y menor tercer cuartil en el grupo de alumnos de 4º de la ESO, confirmando que es mayor la proporción de estudiantes en este curso que conceden menor variabilidad a las estimaciones, comprendiendo, por tanto que dicha variabilidad no debe ser muy alta en muestras grandes. Análogamente, en dichas gráficas se identifican algunos valores atípicos, entre los que destaca la respuesta de A263: (99, 1, 50, 60). Dicho estudiante muestra una concepción errónea de la variabilidad del valor esperado, puesto que no tiene en cuenta el efecto del tamaño de la muestra, lo que conduce a la aceptación, como una respuesta probable, de cualquier respuesta que se localice en el rango de valores posibles (0-100).

Tabla 3. Frecuencia y porcentaje de alumnos que son casos extremos por la ausencia de variabilidad

Caso extremo. Ausencia de variabilidad	2ºESO		4ºESO	
	Frec.	% (respecto al total de alumnos de 2ºESO)	Frec.	% (respecto al total de alumnos de 4ºESO)
(50, 50, 50, 50)	7	4,5	5	3,4
(68, 68, 68, 68)	6	3,8	1	0,7
(70, 70, 70, 70),(80, 80, 80, 80)	1	0,6	2	1,4
(100, 100, 100, 100)	2	1,3		
Total	16	10,2	8	5,5

Para finalizar nuestro estudio, en la Tabla 3 se presenta la frecuencia y porcentaje de estudiantes que responden a la tarea con una cuaterna constituida por valores con variabilidad nula. Constituyen el 10% de estudiantes en 2º de ESO y el 5% en 4º de ESO, una proporción aceptable si se tiene en cuenta que estos estudiantes están interpretando el experimento aleatorio en forma determinista, lo que podría ser indicativo del enfoque en el resultado aislado (Konold, 1991). El profesor debiera estar alerta de estos sesgos si desea lograr un aprendizaje significativo a partir del enfoque frecuencial de la probabilidad.

## CONCLUSIONES E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Tras la aplicación del cuestionario y el análisis de los datos, es relevante reflexionar sobre los resultados obtenidos, ya que el análisis de los documentos curriculares (MECD, 2015) muestra que se debería considerar la introducción de las ideas necesarias para la comprensión adecuada y profunda de la probabilidad en el enfoque frecuencial. Sin embargo, en nuestra experiencia, solamente una parte de los grupos participantes mostró un aprendizaje significativo de la probabilidad desde este enfoque. Aunque los datos se recogieron el primer año de la aplicación de la LOMCE, los contenidos de probabilidad del Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2007) eran casi idénticos, por lo que la omisión de su enseñanza no se justifica por el cambio curricular y sea posiblemente debido a la falta de tiempo, debido a la extensión de los contenidos curriculares.

El análisis de los datos muestra una gran proporción de respuestas incorrectas en la estimación de los resultados a la tarea propuesta. Además, el análisis de los datos revela que la muestra de alumnos presenta tanto el sesgo de equiprobabilidad como los derivados de la heurística de la representatividad. Esta última se identifica en aquellos casos en los que el alumno trata de compensar los resultados,



proporcionando muestras en las que el número de chinchetas que caen con la punta hacia abajo sea mayor, al igual que ocurrió en el estudio de Gómez et al. (2014). Esta heurística conduce a la estimación errónea de la frecuencia esperada.

Por otro lado, el estudio realizado refleja que la mayoría de los alumnos tiene una comprensión insuficiente de la variabilidad intrínseca al proceso de muestreo, que se ha puesto de manifiesto en el ítem propuesto para este estudio con muestras cuyo tamaño es grande ( $n = 100$ ). En este ítem, la mayoría de las respuestas de los estudiantes presentan muestras cuyos valores quedan caracterizados por una variabilidad excesiva. Por tanto, se confirma una mayor dificultad en la idea de variabilidad, como ocurre también en la investigación de Orta y Sánchez (2013) en problemas relacionados con el contexto de riesgo y en la de Sánchez, García y Medina (2014) sobre la distribución binomial. También encontramos la presencia de respuestas en la que se identifica una ausencia total de la variabilidad.

A pesar de que se esperaba que los alumnos de 4ºESO obtuvieran mejores resultados, debido a factores tales como la mayor edad y su conocimiento, el análisis de las respuestas apenas revela diferencias entre los dos cursos escolares, aunque los participantes de 4ºESO han obtenido mejores resultados. En síntesis, los resultados ponen en relieve la desconexión existente entre los contenidos descritos en los documentos curriculares y el conocimiento que los estudiantes muestran sobre dichos contenidos matemáticos. Además, los resultados obtenidos coinciden con las investigaciones previas, por tanto se subraya la necesidad de iniciar una instrucción sobre los conceptos asociados al muestreo con la finalidad de favorecer su comprensión. En este sentido, el proceso de enseñanza y aprendizaje debería comenzar desde los primeros cursos de la secundaria, de modo que se fortalezcan y desarrollen de manera gradual los contenidos asociados con el bloque de estadística y probabilidad. Por otro lado, es relevante la puesta en marcha de investigaciones que no solamente se preocupen en la identificación de sesgos o las dificultades del alumnos, sino también en el diseño de materiales que favorezcan una mejora para el aprendizaje del alumno.

**Agradecimientos:** Proyecto EDU2016-74848-P (FEDER, AEI) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

## Referencias

- Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. New York: Springer.
- Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 291-303.
- Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, C. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema*, 28(48), 209-229.
- Gómez, E., Contreras, J.M. y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 73-87). Alicante: SEIEM.
- Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol.2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.

- Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.
- MEC (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.
- MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
- Orta, J. A. y Sánchez, E. (2013). Interpretación de la dispersión de datos en contexto de riesgo por estudiantes de secundaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, 422-430.
- Sánchez, E., García, J. y Medina, M. (2014). Niveles de razonamiento y abstracción de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6, 5-23.
- Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). New York: Cambridge University Press.