Tema 1. Procesos Estacionarios

Curso de doctorado: Series Temporales

Antonio Montañés Bernal

Universidad de Zaragoza

Marzo 2008

1. Introducción

- Objetivo
  - Estudiar las propiedades temporales de las variables macroeconómicas.
- ¿Por qué es interesante estudiar dichas propiedades?
  - Conocer el PGD nos facilita, por ejemplo, la predicción.
  - Van a determinar el tipo de herramientas que vamos a aplicar en la modelización econométrica
- ¿Por qué menciono variables macroeconómicas y no de otro tipo?

ESQUEMA

1. Conceptos Básicos

ESQUEMA

1. Conceptos Básicos
2. Ejemplos

1. Introducción

ESQUEMA

1. Conceptos Básicos
2. Ejemplos
3. Extensiones

2. Conceptos básicos

Definition

Denominamos **proceso estocástico** a una sucesión de variables aleatorias ordenadas en el tiempo. $\{y_t\}$, $t = -\infty, ..., -2, \ -1, \ 0, 1, 2, ..., \infty$.

Cada una de estas variables tiene su propia función de distribución. Existen muchos tipos de procesos estocásticos. Pongamos algunos ejemplos

2. Conceptos básicos

Definition

Se llama **ruido blanco** a un proceso estocástico que se distribuye con media 0, varianza constante y finita y la distribución es independiente.

$$E\left(u_t\right) = 0$$

$$Var\left(u_t\right) = \sigma^2$$

$$E\left(u_i\, u_j\right) = 0, \;\; \forall i \neq j$$

Definition

Un **paseo aleatorio** es un proceso estocástico distribuido de la siguiente manera:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

siendo ε_t un ruido blanco.

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t = y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

donde, sin perdida de generalidad, hemos supuesto que $y_o = 0$.
El valor de y_t no es sino una acumulación de los valores de las perturbaciones aleatorias de ahí el nombre de paseo aleatorio.

- Persistencia

Definition

Un **paseo aleatorio con deriva** se define

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2}$$

donde ε_t es un ruido blanco y μ es un parámetro constante

- En qué se diferencia esenciamente del proceso anterior: en la presencia de una tendencia

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t = \mu + (\mu + y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= y_{t-2} + 2\mu + \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i = \mu\, t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \end{aligned} \tag{3}$$

Definition

Un proceso estocástico es **estacionario en sentido estricto** si se cumple que:

$$F\left(y_1, y_{2,} ..., y_m\right) = F\left(y_{k+1}, y_{k+2,} ..., y_{k+m}\right)$$

donde m y k son sendos enteros.

2. Conceptos básicos

Definition

Un proceso estocástico $\{y_t\}$ es **estacionario en sentido débil** si se cumple que:

$$E\left(y_t\right) = \mu \quad \forall t$$

$$Var\left(y_t\right) = \sigma^2 \quad \forall t$$

$$Cov\left(y_i, y_j\right) = Cov\left(y_{k+i}, y_{k+j}\right) = \gamma\left(i-j\right) = \gamma\left(j-i\right), \ \forall i \neq j$$

siendo μ y σ^2 sendos parámetros y siendo k un número entero

2. Conceptos básicos

Existe una relación directa entre ambos conceptos de estacionariedad. Así, si imponemos la restricción de que el proceso es generado por una distribución normal, entonces resulta inmediatio verificar que la estacionariedad débil implica estacionariedad fuerte.

$$\left.\begin{array}{c}\text{ESTACIONARIEDAD DÉBIL}\\ +\\ \text{NORMALIDAD}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ESTACIONARIEDAD FUERTE}$$

¿Por qué?

Definition

Un **proceso ARMA(p,q)** se define de la siguiente manera:

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + ... + \theta_q u_{t-q}$$

siendo u un ruido blanco.

De forma compacta el modelo anterior se puede expresar como:

$$\left(1 - \phi_1 L - ... - \phi_p L^p\right) y_t = \delta + \left(1 + \theta_1 L + ... + \theta_q L^p\right) u_t$$

donde L es el operador matemático de retardos, tal que $L^d x_t = x_{t-d}$

1. Casos particulares de interés.

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso MA(1) $y_t = \delta + \ u_t + \theta_1 u_{t-1}$

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso MA(1) $y_t = \delta + u_t + \theta_1 u_{t-1}$
3. Es estacionario
   $E(y_t) = \delta$
   $Var(y_t) = (1 + \theta_1^2)\ \sigma_u^2 = \gamma(0)$
   La función de autocovarianzas es igual a $\gamma(1) = \theta_1\ \sigma_u^2$ y 0 para el resto

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso MA(1) $y_t = \delta + u_t + \theta_1 u_{t-1}$
3. Es estacionario
   $E(y_t) = \delta$
   $Var(y_t) = (1 + \theta_1^2)\ \sigma_u^2 = \gamma(0)$
   La función de autocovarianzas es igual a $\gamma(1) = \theta_1\ \sigma_u^2$ y 0 para el resto
4. Sólo es invertible si $|\theta_1| < 1$

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso MA(1) $y_t = \delta + u_t + \theta_1 u_{t-1}$
3. Es estacionario
   $E(y_t) = \delta$
   $Var(y_t) = (1 + \theta_1^2)\ \sigma_u^2 = \gamma(0)$
   La función de autocovarianzas es igual a $\gamma(1) = \theta_1\ \sigma_u^2$ y 0 para el resto
4. Sólo es invertible si $|\theta_1| < 1$

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso MA(1) $y_t = \delta + u_t + \theta_1 u_{t-1}$
3. Es estacionario
   $E(y_t) = \delta$
   $Var(y_t) = (1 + \theta_1^2)\ \sigma_u^2 = \gamma(0)$
   La función de autocovarianzas es igual a $\gamma(1) = \theta_1\ \sigma_u^2$ y 0 para el resto
4. Sólo es invertible si $|\theta_1| < 1$

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?
- ¿Tiene sentido económico? ¿Para qué valores del parámetro θ_1?

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso AR(1) $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \; u_t$

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso AR(1) $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \; u_t$
3. No siempre es estacionario, sólo si $|\phi_1| < 1$.Bajo este supuesto de estacionariedad
   $E(y_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1}$
   $Var(y_t) = \frac{\sigma_u^2}{1-\phi_1^2} = \gamma(0)$
   $Cov(y_t, y_{t-i}) = \phi_1^i \gamma(0)$

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso AR(1) $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \; u_t$
3. No siempre es estacionario, sólo si $|\phi_1| < 1$.Bajo este supuesto de estacionariedad
   $E(y_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1}$
   $Var(y_t) = \frac{\sigma_u^2}{1-\phi_1^2} = \gamma(0)$
   $Cov(y_t, y_{t-i}) = \phi_1^i \gamma(0)$

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso AR(1) $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \; u_t$
3. No siempre es estacionario, sólo si $|\phi_1| < 1$.Bajo este supuesto de estacionariedad
   $E(y_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1}$
   $Var(y_t) = \frac{\sigma_u^2}{1-\phi_1^2} = \gamma(0)$
   $Cov(y_t, y_{t-i}) = \phi_1^i \gamma(0)$

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?
- ¿Tiene sentido económico?

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso $y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t$. Si $\phi_1 > 1$, ¿qué sucede entonces?

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso $y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t$. Si $\phi_1 > 1$, ¿qué sucede entonces?

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \; u_t$. Si $\phi_1 > 1$, ¿qué sucede entonces?

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?
- ¿Tiene sentido económico?

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \; u_t$. Si $\phi_1 = 1$, entonces
   $E(yt) = \delta t$
   $Var(y_t) = t \; \sigma_u^2$

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \; u_t$. Si $\phi_1 = 1$, entonces
   $E(yt) = \delta t$
   $Var(y_t) = t \; \sigma_u^2$

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \ u_t$. Si $\phi_1 = 1$, entonces
   $E(yt) = \delta t$
   $Var(y_t) = t \ \sigma_u^2$

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?
- ¿Tiene sentido económico?

2. Conceptos básicos

Definition

Un proceso es integrado de orden d cuando es necesario diferenciarlo d veces para que sea estacionario. Esto se representa como $y_t \sim I(d)$.

De acuerdo con esta definición, si tenemos una variable y_t integrada de orden d, entonces la variable $z_t = (1 - L)^d y_t$ será estacionaria

- Relación con el concepto de raíz unitaria:

$$y_t = \delta + y_{t-1} + u_t \Rightarrow (1 - L)y_t = \delta + u_t$$

- Si tomamos el polinomio como una ecuación, ¿cuál es su solución característica?

$$(1 - L^*) = 0 \Rightarrow L^* = 1$$

- Orden de integración$\equiv$número de raíces unitarias.

Definition

Un **proceso ARIMA(p,d,q)** se define de la siguiente manera:

$$(1-L)^d \; y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + ... + \phi_p \, y_{t-p} + \; u_t + \theta_1 \, u_{t-1} + \; ... + \theta_q \, u_{t-q}$$

siendo u un ruido blanco.

De forma compacta el modelo anterior se puede expresar como:

$$\left(1 - \phi_1 \, L - ... - \phi_p \, L^p\right) (1-L)^d \, y_t = \delta + \; (1 + \theta_1 L + ... + \theta_q L^q) \, u_t$$

donde $(1-L)^d$ es el operador matemático de diferencias, tal que $(1-L)x_t = x_t - x_{t-1}$

El polinomio $\left(1 - \phi_1 \, L - ... - \phi_p \, L^p\right)$ tiene sus raíces fuera círculo unidad

El polinomio $(1 + \theta_1 L + ... + \theta_q L^q)$ tiene sus raíces fuera círculo unidad

Otro proceso que puede ser de gran interés es el siguiente:

$$y_t = \mu + \beta \; t + u_t$$

donde u_t sigue un proceso ARMA estacionario e invertible.
Este proceso...

- presenta tendencia lineal de naturaleza determinista (TS)
- es no estacionario
- guarda ciertas similitudes con un paseo aleatorio con deriva... ¿Pero son realmente tan parecidos?

2. Conceptos básicos

	DS	TS
¿Cuanto dura el efecto de un shock?	Permanente	Transitorio
Estacionario	No	No
Integrado	Sí	No
Como se hace estacionario	Diferenciando	Quitando tendencia
Se anula la FAC	∞	∞
Cambian las propiedades MCO	Sí	Esencialmente no

2. Ejemplos

Estudiar las propiedades temporales de las variables del primer fichero

Estudiar las propiedades temporales de las variables del fichero caso12

Los modelos ARCH se utilizan para captar la volatilidad de las variables
De forma analítica se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t \ h_t \\ h_t^2 &= \alpha_o + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \ y_{t-i}^2, \alpha_o \geq 0, \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \leq 1 \end{aligned}$$

siendo ε_t un ruido blanco tal que $E(\varepsilon_t) = 0$ y $Var(\varepsilon_t) = 1$.
Resulta inmediato comprobar que $E(y_t) = 0$ y $Var(y_t) = \frac{\alpha_o}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i}$.
Pero, tambien es cierto que: $Var(y_t / \Im_{t-1}, \Im_{t-2} \ldots) = h_t^2$

Los modelos ARCH se utilizan para captar la volatilidad de las variables
De forma analítica se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t \; h_t \\ h_t^2 &= \alpha_o + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \; y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \; h_{t-i}^2, \quad \alpha_o \geq 0, \; \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \leq 1 \end{aligned}$$

siendo ε_t un ruido blanco tal que $E(\varepsilon_t) = 0$ y $Var(\varepsilon_t) = 1$.
Resulta inmediato comprobar que $E(y_t) = 0$ y $Var(y_t) = \frac{\alpha_o}{1-\sum_{i=1}^{p} \alpha_i - \sum_{i=1}^{q} \beta_i}$.
Pero, tambien es cierto que: $Var(y_t / \Im_{t-1}, \Im_{t-2} \ldots) = h_t^2$

De forma analítica se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t \ h_t \\ h_t^2 &= \alpha_o + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \ y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \ h_{t-i}^2, \quad \alpha_o \geq 0, \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i = 1 \end{aligned}$$

siendo ε_t un ruido blanco tal que $E(\varepsilon_t) = 0$ y $Var(\varepsilon_t) = 1$.

- La varianza no tiene media definida

De forma analítica se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t \ h_t \\ h_t^2 &= \alpha_o + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \ y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \ h_{t-i}^2, \quad \alpha_o \geq 0, \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i = 1 \end{aligned}$$

siendo ε_t un ruido blanco tal que $E(\varepsilon_t) = 0$ y $Var(\varepsilon_t) = 1$.

- La varianza no tiene media definida
- El proceso global sí que es estacionario y ergódico.

Un EGARCH(1,1) se puede representar de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \varepsilon_t \; h_t \\
\ln h_t^2 &= \alpha_o + \beta_1 \ln \; h_{t-1}^2 + \delta \; \varepsilon_{t-1} + \theta \; \left(| \; \varepsilon_{t-1} | - \sqrt{2/\pi} \right)
\end{aligned}
$$

siendo ε_t un ruido blanco tal que $E(\varepsilon_t) = 0$ y $Var(\varepsilon_t) = 1$.

- Las perturbaciones no tienen ahora un comportamiento simétrico

Un EGARCH(1,1) se puede representar de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \varepsilon_t \; h_t \\
\ln h_t^2 &= \alpha_o + \beta_1 \ln \; h_{t-1}^2 + \delta \; \varepsilon_{t-1} + \theta \; \left(| \; \varepsilon_{t-1} | - \sqrt{2/\pi} \right)
\end{aligned}
$$

siendo ε_t un ruido blanco tal que $E(\varepsilon_t) = 0$ y $Var(\varepsilon_t) = 1$.

- Las perturbaciones no tienen ahora un comportamiento simétrico
- El parametro β_1 mide la persistencia en la volatilidad

Un EGARCH(1,1) se puede representar de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \varepsilon_t \; h_t \\
\ln h_t^2 &= \alpha_o + \beta_1 \ln \; h_{t-1}^2 + \delta \; \varepsilon_{t-1} + \theta \; \left(| \; \varepsilon_{t-1} | - \sqrt{2/\pi} \right)
\end{aligned}
$$

siendo ε_t un ruido blanco tal que $E(\varepsilon_t) = 0$ y $Var(\varepsilon_t) = 1$.

- Las perturbaciones no tienen ahora un comportamiento simétrico
- El parametro β_1 mide la persistencia en la volatilidad
- El parametro δ mide la importancia de los shocks sobre la volatilidad (δ <0).

En ocasiones podemos pensar que los rendimientos de un producto estén correlacionados con su riesgo, de ahí que podamos emplear esta última para explicar aquella.
Un ejemplo es el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} y_t &= \delta \; h_t^2 + \varepsilon_t \\ h_t^2 &= \alpha_o + \alpha_1 \; \varepsilon_{t-1}^2 \end{aligned}$$

siendo ε_t un proceso que sigue un $ARCH(1)$.

- El parametro δ mide la importancia del riesgo sobre el rendimiento.

Un proceso SETAR (Self Exciting Threshold Autoregressive Model) se define de la siguiente manera:

$$y_t = \phi_o^{(i)} + \phi_1^{(i)} y_{t-1} + \ldots + \phi_p^{(i)} y_{t-p} + \varepsilon_t^{(i)}, \; i = 1, 2, \ldots N_r$$

- donde $\varepsilon_t^{(i)} \sim ID(0, \sigma^{2(i)})$
- N_r es el número de regímenes
- Los parámetros con superíndice (i) pueden variar entre regímenes
- La variable y está en el i-ésimo regimen siempre que $r_{i-1} \leq y_{t-d} < r_i$, donde y_{t-d} es continua en $\mathbb{R}$
    - Posibles aplicaciones ?

Un proceso SETAR (Self Exciting Threshold Autoregressive Model) se define de la siguiente manera:

$$y_t = \phi_o^{(i)} + \phi_1^{(i)} y_{t-1} + \dots + \phi_p^{(i)} y_{t-p} + \varepsilon_t^{(i)}, \; i = 1, 2, \dots N_r$$

- donde $\varepsilon_t^{(i)} \sim ID(0, \sigma^{2(i)})$
- N_r es el número de regímenes
- Los parámetros con superíndice (i) pueden variar entre regímenes
- La variable y está en el i-ésimo regimen siempre que $r_{i-1} \leq y_{t-d} < r_i$, donde y_{t-d} es continua en $\mathbb{R}$
  - Posibles aplicaciones ?
  - Posibles extensiones ?

- Markov Switching Autoregressive Models

- Markov Switching Autoregressive Models
- El tamaño importa? TIMA Models

- Markov Switching Autoregressive Models
- El tamaño importa? TIMA Models
- Estacionalidad