

## 1 Introducción

En este tema vamos a realajar uno de los supuestos que se establecen para definir el conocido modelo lineal general. En concreto, en este tema vamos a considerar que los regresores no son determinísticos, sino que tienen una naturaleza estocástica. Efectivamente, a la hora de desarrollar el modelo lineal general hemos supuesto que los regresores tienen naturaleza determinística. Este supuesto simplifica mucho las cosas por cuanto implica que los regresores son fijos, ya que en muestras diferentes, obtendríamos siempre los mismos valores. Además, no siguen ninguna distribución de probabilidad, por lo que es fácil concluir que la matriz  $X'X$  siempre convergerá hacia una matriz finita, lo que facilita la demostración de la consistencia de los estimadores mínimo cuadrático ordinario, por ejemplo.

Sin embargo, en la realidad no siempre es posible mantener este supuesto, más bien al contrario, siempre podemos encontrar ejemplos que hablan en contra del supuesto de determinación de los regresores. Por ejemplo, imaginemos que estamos trabajando con datos de corte transversal procedentes de una encuesta. En este caso, las observaciones pueden estar contaminadas por errores de medida o bien estar representando la media de la variable que realmente queremos utilizar como explicativa. En ambos casos, no podemos asegurar que los regresores sean de tipo determinístico. Sin embargo, es en el análisis con datos de series temporales donde la evidencia en contra de este supuesto es mayor. Para demostrarlo, baste pensar que cuando analizamos series de macroeconómicas medidas como series de tiempo siempre podemos distinguir entre su componente tendencial, que es el que rige la evolución a largo plazo de la serie, y el componente cíclico, de carácter más coyuntural. EN el caso más sencillo, la variable  $y_t$  la podemos expresar de la siguiente manera:

$$y_t = a + bt + u_t$$

donde  $t$  es una tendencia determinística y  $u_t$  es una perturbación aleatoria. El componente tendencial viene determinado por el polinomio  $a + bt$ , mientras que el cíclico nos lo daría la perturbación. Es evidente que la variable  $y_t$  no puede considerarse de tipo determinístico. Dado que este modelo es válido para un número amplio de variables macroeconómicas, el supuesto de determinación de los regresores es bastante discutible en un entorno de datos de series temporales.

No obstante, el caso precedente es un simple ejemplo de regresor estocástico. En realidad, existen múltiples tipos de regresores estocásticos que se ajustan mejor a unas variables que a otras. Por ejemplo, no es lo mismo analizar una macromagnitud como es el consumo, cuya evolución es bastante suave a lo largo del tiempo, que estudiar el comportamiento de las acciones de una empresa determinada. En este último caso, los datos presentan un alto grado de volatilidad por lo que parece más factible representarlos a partir de modelos ARCH o GARCH.

Es necesario poner algún tipo de restricción para que el posible abanico de procesos estocásticos sea razonable. EN este tema vamos a tratar un conjunto de procesos que han sido largamente aplicados en economía. Son los procesos ARMA. En el siguiente capítulo estudiaremos los procesos ARIMA, válidos para variables que pueden no ser estacionarias. Antes de pasar al estudio de los procesos ARMA presentaremos una serie de definiciones que nos ayudarán a la hora de explicar este tipo de procesos.

## 2 Definiciones

Comenzamos esta sección introduciendo algunos conceptos que nos serán útiles a lo largo del presente y de futuros temas.

**Definición 1** *Denominamos proceso estocástico a una sucesión de variables aleatorias ordenadas en el tiempo.  $\{y_t\}$ ,  $t = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$ .*

Debemos señalar que consideramos que  $y_t$  es una sucesión de variables aleatorias. Cada una de ellas puede tener un proceso generador de los datos idéntico, lo que facilitaría las cosas a la hora de trabajar con las mismas, pero es también posible que no siga ningún tipo de patrón de comportamiento común. Dependiendo de cuáles sean las propiedades de estas variables aleatorias el proceso estocástico será de uno u otro tipo. A efectos prácticos, consideraremos conocida una realización del proceso estocástico.

Un ejemplo de proceso estocástico que será utilizado con gran profusión es el siguiente

**Definición 2** *Se llama ruido blanco a un proceso estocástico que se distribuye con media 0, varianza constante y finita y la distribución es independiente. Esto se puede representar así:*

$$E(u_t) = 0 \tag{1}$$

$$\text{Var}(u_t) = \sigma^2 \quad (2)$$

$$E(u_i u_j) = 0, \quad \forall i \neq j \quad (3)$$

Otro ejemplo de proceso estocástico de gran interés desde el punto de vista del análisis de series temporales es el siguiente:

**De nition 3** *Un paseo aleatorio es un proceso estocástico distribuido de la siguiente manera:*

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4)$$

siendo  $\varepsilon_t$  un ruido blanco.

Para comprender el significado del modelo anterior resulta conveniente tener en cuenta que cada componente del proceso depende del retardo más una parte aleatoria. Entonces, podemos expresar un ruido blanco de la siguiente manera:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t = y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

donde, sin pérdida de generalidad, hemos supuesto que  $y_0 = 0$ . Como vemos, el valor de  $y_t$  no es sino una acumulación de los valores de las perturbaciones aleatorias de ahí el nombre de paseo aleatorio.

Un modelo similar al anterior es el siguiente

**De nition 4** *Al proceso estocástico representado como*

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5)$$

donde  $\varepsilon_t$  es un ruido blanco y  $\mu$  es un parámetro constante, se le denomina paseo aleatorio con deriva. El parámetro  $\mu$  suele recibir el nombre de deriva.

Las implicaciones de este nuevo modelo se observa si efectuamos sustituciones sucesivas del retardo de  $y$ . Así, es sencillo probar que:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t = \mu + (\mu + y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = y_{t-2} + 2\mu + \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i = \\ &= \mu t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \end{aligned} \quad (6)$$

A diferencia del paseo aleatorio puro, vemos que el valor del periodo  $t$  no sólo depende que la acumulación de las perturbaciones sino que existe un segundo componente tendencial que es el que controla o guía la evolución del proceso estocástico.

Definición de operador de retardos.

**Definición 5** *Un proceso estocástico es estacionario en sentido estricto si se cumple que*

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) = F(y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_{k+m})$$

donde  $m$  y  $k$  son sendos enteros.

Esto implica que la distribución de probabilidad de un subconjunto  $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  del proceso estocástico no varía si nos desplazamos  $k$  periodos en el tiempo. Esto tiene serias implicaciones para la distribución del proceso estocástico. Así, cuando  $m=1$ , la definición anterior supone que la media poblacional es la misma para todos los componentes del proceso estocástico. De forma similar, cuando  $m = 2$ , la distribución del par  $y_i, y_j$  es la misma que la del par  $y_{k+i}, y_{k+j}$  ( $i \neq j$ ).

Una definición de estacionariedad menos restrictiva es la siguiente:

**Definición 6** *Un proceso estocástico  $\{y_t\}$  es estacionario en sentido débil si se cumple que:*

$$E(y_t) = \mu \quad \forall t$$

$$Var(y_t) = \sigma^2 \quad \forall t$$

$$Cov(y_i, y_j) = Cov(y_{k+i}, y_{k+j}) = \gamma(i - j) = \gamma(j - i), \quad \forall i \neq j$$

siendo  $\mu$  y  $\sigma^2$  sendos parámetros y siendo  $k$  un número entero

Existe una relación directa entre ambos conceptos de estacionariedad. Así, si imponemos la restricción de que el proceso es generado por una distribución normal, entonces resulta inmediato verificar que la estacionariedad débil implica estacionariedad fuerte.

$$\left. \begin{array}{l} \text{ESTACIONARIEDAD DÉBIL} \\ + \\ \text{NORMALIDAD} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ESTACIONARIEDAD FUERTE}$$

Para entender por qué se produce esta relación solamente debemos tener en cuenta que los momentos que definen a una distribución muestral son los de primer y segundo orden. Como el concepto de estacionariedad débil implica que estos son estacionarios, entonces es directo comprobar que cualquier

combinación de momentos será estacionaria, garantizando la existencia de estacionariedad en sentido estricto.

Unos estadísticos que resultan de gran interés para determinar las propiedades de los distintos procesos estocásticos son las funciones de autocovarianza y de autocorrelación. Se definen de la siguiente manera. Dado que estas funciones se utilizan fundamentalmente para procesos estacionarios, en ambas definiciones vamos a asumir que este supuesto se cumple.

**Definición 7** *La función de autocovarianza de un proceso estocástico  $\{y_t\}$  es una función que para cada periodo de tiempo nos ofrece el valor de la covarianza de orden  $k$ . Eso se representa así:*

$$\gamma(k) = \text{Cov}(y_t, y_{t+k}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Muy relacionado con este concepto está el de función de autocorrelación.

**Definición 8** *La función de autocorrelación de un proceso estocástico  $\{y_t\}$  es una sucesión de valores que miden la correlación entre  $y_t$  e  $y_{t+k}$  para distintos valores de  $k$ .*

$$\rho(k) = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t+k})}{\sqrt{\text{Var}(y_t)}\sqrt{\text{Var}(y_{t+k})}} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

El valor para  $k = 0$  es siempre la unidad, por lo que no se suele considerar. Por último, una reparametrización de la función de autocorrelación que nos resulta útil es la función de autocorrelación parcial.

**Definición 9** *La función de autocorrelación parcial de un proceso estocástico  $\{y_t\}$  es una sucesión de valores que miden la correlación entre  $y_t$  e  $y_{t+k}$  ajustada por el efecto de los retardos intermedios  $y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+k-1}$ . A los valores de esta función los denotamos como  $\phi_{kk}$  donde  $k = 1, 2, \dots$*

El valor inicial de la función de autocorrelación y de la función de autocorrelación parcial coinciden.

Las funciones anteriormente definidas son poblacionales, por lo tanto, son valores teóricos y desconocidos. Si queremos estimarlos, podemos hacerlo de la siguiente manera:

$$r(k) = \frac{\sum_{i=1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{i=1}^T (y_t - \bar{y})^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

La función de autocorrelación parcial se puede calcular como

$$\tilde{y}_t = \phi_{1k}\tilde{y}_{t-1} + \phi_{2k}\tilde{y}_{t-2} + \dots + \phi_{kk}\tilde{y}_{t-k} + \varepsilon_t \quad (8)$$

donde  $\tilde{y}_t = y_t - \bar{y}$

Una herramienta que es muy útil de cara a la representación matemática de los modelos dinámicos es el operador de retardos, que denotamos como  $L$ . En virtud del uso de este operador, es cierto que  $x_{t-d} = L^d x_t$ .

Propiedades habituales son las siguientes  $La = a$ , donde  $a$  es una constante. Asimismo, un paseo aleatorio se puede representar de la siguiente manera:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow y_t - y_{t-1} = y_t - Ly_t = (1 - L)y_t = \Delta y_t = \varepsilon_t \quad (9)$$

El operador  $(1 - L)$  es el operador primeras diferencias.

Por último, aunque no son considerados en este tema, es posible que los procesos no sean estacionarios. En este caso del concepto de orden de integración es un elemento de gran utilidad

**Definición 10** *Un proceso es integrado de orden  $d$  cuando es necesario diferenciarlo  $d$  veces para que sea estacionario. Esto se representa como  $y_t \sim I(d)$ .*

De acuerdo con esta definición, si tenemos una variable  $y_t$  integrada de orden  $d$ , entonces la variable  $z_t = (1-L)^d y_t$  será estacionaria

### 3 Procesos Autorregresivos

El primer tipo de proceso estocástico que vamos a considerar es el proceso autorregresivo. Tiene una gran tradición en econometría ya que fueron propuestos en Yule (1926). Se caracterizan porque el valor de la variable en el periodo  $t$  es función de los valores de la propia variable retardados diversos periodos. Así, en general, podemos definir un proceso autorregresivo de orden  $p$  de la siguiente manera:

$$AR(p) : y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t \quad (10)$$

donde  $\delta, \phi_1, \phi_2, \dots$ , y  $\phi_p$  son los parámetros de los que depende el proceso y  $u_t$  es la perturbación aleatoria del modelo.

Una de las primeras características que podemos reseñar de este proceso es que es necesario imponer restricciones adicionales para garantizar su estacionariedad. En concreto, el proceso sólo es estacionario si se cumple que todas las raíces del polinomio autorregresivo de retardos se encuentran fuera del círculo unidad. Para ver lo que esto significa, vamos a analizar el caso más sencillo, aquél en el que  $p = 1$ .

$$AR(1) : y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t \quad (11)$$

Si tenemos en cuenta que  $y_{t-1}$  lo podemos expresar en función de  $y_{t-2}$  y  $u_{t-1}$  resulta que el modelo anterior se puede expresar como:

$$y_t = \delta + \phi_1 (\delta + \phi_1 y_{t-2} + u_{t-1}) + u_t = \delta + \delta \phi_1 + \phi_1^2 y_{t-2} + u_t + \phi_1 u_{t-1} \quad (12)$$

Si este proceso lo repetimos sucesivamente, la variable  $y_t$  se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_t &= \delta (1 + \phi_1 + \phi_1^2 + \dots) + u_t + \phi_1 u_{t-1} + \phi_1^2 u_{t-2} + \dots = \\ &= \phi_1^t y_o + \delta \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i + \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i u_{t-i} \end{aligned} \quad (13)$$

donde asumimos que  $y_o$  es independiente de la perturbación para todo valor de  $t$ . Entonces, los momentos de primer y segundo orden de la variables son los siguientes. En primer lugar, la media poblacional es igual a:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E\left(\phi_1^t y_o + \delta \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i + \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i u_{t-i}\right) = E(\phi_1^t y_o) + E\left(\delta \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i\right) + E\left(\sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i u_{t-i}\right) = \\ &= \phi_1^t E(y_o) + \delta \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i \end{aligned} \quad (14)$$

La varianza poblacional es:

$$\begin{aligned} Var(y_t) &= E\{[y_t - E(y_t)]^2\} = E\left\{\left[y_t - \left(\phi_1^t E(y_o) + \delta \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i\right)\right]^2\right\} = \\ &= E\left\{\left[\phi_1^t (y_o - E(y_o)) + \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i u_{t-i}\right]^2\right\} = \\ &= \phi_1^{2t} Var(y_o) + \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^{2i} Var(u_{t-i}) = \\ &= \phi_1^{2t} Var(y_o) + \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^{2i} \sigma^2 = \\ &= \phi_1^{2t} Var(y_o) + \sigma^2 \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^{2i} = \\ &= \begin{cases} \phi_1^{2t} Var(y_o) + \sigma^2 \frac{1-\phi_1^{2t}}{1-\phi_1^2} & \text{si } |\phi_1| \neq 1 \\ Var(y_o) + \sigma^2 t & \text{si } |\phi_1| = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

donde hemos tenido en cuenta que las perturbación está incorrelacionada tanto temporalmente como con respecto a  $y_0$ . Por último, la covarianza es igual a:

$$\begin{aligned}
Cov(y_t, y_{t+k}) &= E \{ [y_t - E(y_t)] [y_{t+k} - E(y_{t+k})] \} = \\
&= E \left\{ \left[ \phi_1^t (y_0 - E(y_0)) + \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i u_{t-i} \right] \left[ \phi_1^{t+k} (y_0 - E(y_0)) + \sum_{i=0}^{t+k-1} \phi_1^i u_{t+k-i} \right] \right\} = \\
&= \phi_1^t \phi_1^{t+k} E \left[ (y_0 - E(y_0))^2 \right] + E \left[ \left( \sum_{i=0}^{t-1} \phi_1^i u_{t-i} \right) \left( \sum_{i=0}^{t+k-1} \phi_1^i u_{t+k-i} \right) \right] = \\
&= \phi_1^{2t+k} Var(y_0) + \sigma^2 \sum_{i=r}^{t-1} \phi_1^i = \\
&= \begin{cases} \phi_1^{2t+k} Var(y_0) + \sigma^2 \phi_1^k \frac{1-\phi_1^{2t}}{1-\phi_1^2} & \text{si } |\phi_1| \neq 1 \\ Var(y_0) + \sigma^2 t & \text{si } |\phi_1| = 1 \end{cases} \quad (16)
\end{aligned}$$

Como se puede apreciar todos los momentos que hemos calculado dependen de  $t$ . Esto implica que el proceso, tal y como está de nido, no es estacionario. Para garantizar esta propiedad bastaría con considerar que yo sigue una distribución con media 0 y varianza constante y que, además,  $|\phi_1| < 1$ . Con estas condiciones, es inmediato demostrar que:

$$\begin{aligned}
\text{a) } E(y_t) &= \frac{\delta}{1-\phi_1} & \text{si } t \rightarrow \infty \\
\text{b) } Var(y_t) &= \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2} & \text{si } t \rightarrow \infty \\
\text{c) } Cov(y_t, y_{t+k}) &= \sigma^2 \frac{\phi_1^k}{1-\phi_1^2} & \text{si } t \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Es evidente que ahora los momentos no depende de  $t$ , por lo que el proceso es asintóticamente estacionario. Habitualmente el término asintótico no se utiliza, por lo que se asocia la propiedad de estacionariedad al cumplimiento de la restricción  $|\phi_1| < 1$ .

Para ver la relación que tiene entre valor con el concepto de raíz unitaria debemos expresar un modelo AR(1) en función del polinomio de retardos de la parte autorregresiva. Así, resulta que:

$$\begin{aligned}
y_t &= \delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t = \delta + \phi_1 L y_t + u_t \Rightarrow \\
\Rightarrow y_t - \phi_1 L y_t &= (1 - \phi_1 L) y_t = \delta + u_t \quad (17)
\end{aligned}$$

El polinomio autorregresivo de retardos tiene ahora una única solución:

$$1 - \phi_1 L^* = 0 \Rightarrow L^* = \frac{1}{\phi_1} \quad (18)$$

donde  $L^*$  es ahora la solución que anula el polinomio. Como hemos visto, el proceso es estacionario si  $|\phi_1| < 1$ , lo que implica que  $|L^*| > 1$ . De este resultado podemos afirmar que el proceso AR(1) es estacionario sólo en aquellos casos en los que la única raíz del polinomio autorregresivo de retardos es, en valor absoluto, superior a la unidad.

Si este razonamiento lo llevamos al caso general, el proceso será estacionario si todas las raíces del polinomio autorregresivo de retardos son superiores en valor absoluto a la unidad. Esta afirmación no contempla, sin embargo, la posible presencia de raíces complejas. En este caso, debería cumplirse que su módulo fuera superior a la unidad. La conjunción de estas dos premisas desemboca en la necesidad de que las raíces del polinomio estén fuera del círculo unidad.

La posible estacionariedad de los modelos no es la única característica de los procesos autorregresivos. Otra propiedad muy interesante es que se puede resumir el comportamiento de estos modelos a partir del conocimiento de un número reducido de parámetros. Para comprobar este extremo, estudiemos el caso de un AR(1). Para ello resulta conveniente utilizar una transformación del proceso estocástico inicial, a saber,  $\tilde{y}_t = y_t - E(y_t)$ . Esta transformación se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_t &= y_t - E(y_t) = \delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t - \frac{\delta}{1 - \phi_1} = \\ &= \phi_1 y_{t-1} + u_t + \frac{\delta(1 - \phi_1)}{1 - \phi_1} - \frac{\delta}{1 - \phi_1} = \\ &= \phi_1 y_{t-1} + u_t - \phi_1 \frac{\delta}{1 - \phi_1} = \phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t\end{aligned}\quad (19)$$

Esta transformación es muy útil de cara a obtener los distintos componentes de la función de autocovarianza del proceso. Por ejemplo, la varianza se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= Var(y_t) = E\{[y_t - E(y_t)]^2\} = E(\tilde{y}_t^2) = E[\tilde{y}_t(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t)] = \\ &= \phi_1 E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-1}) + E(\tilde{y}_t u_t) = \phi_1 \gamma(1) + \phi_1 E(\tilde{y}_{t-1} u_t) + E(u_t^2) = \\ &= \phi_1 \gamma(1) + \sigma^2\end{aligned}\quad (20)$$

Si queremos calcular el resto de los valores de la función de autocovarianzas podemos realizar el mismo procedimiento:

$$\gamma(1) = Cov(y_t, y_{t-1}) = E\{[y_t - E(y_t)][y_{t-1} - E(y_{t-1})]\} = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= E [(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t) \tilde{y}_{t-1}] = \phi_1 E (\tilde{y}_{t-1}^2) + E (\tilde{y}_{t-1} u_t) = \\
&= \phi_1 \gamma(0)
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(2) &= Cov(y_t, y_{t-2}) = E \{ [y_t - E(y_t)] [y_{t-2} - E(y_{t-2})] \} = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-2}) \\
&= E [(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t) \tilde{y}_{t-2}] = \phi_1 E (\tilde{y}_{t-1} \tilde{y}_{t-2}) + E (\tilde{y}_{t-2} u_t) = \\
&= \phi_1 \gamma(1)
\end{aligned} \tag{23}$$

En el caso general, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\gamma(k) &= Cov(y_t, y_{t-k}) = E \{ [y_t - E(y_t)] [y_{t-k} - E(y_{t-k})] \} = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-k}) = \\
&= E [(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t) \tilde{y}_{t-k}] = \phi_1 E (\tilde{y}_{t-1} \tilde{y}_{t-k}) + E (\tilde{y}_{t-k} u_t) = \\
&= \phi_1 \gamma(k-1)
\end{aligned} \tag{24}$$

Por último, a partir de la función de autocovarianza podemos definir la función de autocorrelación sin más de dividir aquella por la varianza del modelo. Así, tenemos que:

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\phi_1 \gamma(0)}{\gamma(0)} = \phi_1$$

$$\rho(2) = \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} = \frac{\phi_1 \gamma(1)}{\gamma(0)} = \phi_1 \rho(1) = \phi_1^2$$

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \frac{\phi_1 \gamma(k-1)}{\gamma(0)} = \phi_1 \rho(k-1) = \phi_1^k$$

Como se puede apreciar, el conocimiento de un proceso AR(1) se centra en el parámetro  $\phi_1$ . Conocido éste, el resto de las propiedades de este modelo se pueden obtener a partir de este parámetro.

Otro de los resultados que podemos extraer a partir de la función de autocorrelación es que esta función es decreciente y sólo se anula cuando  $k$  tiende hacia infinito. En otro caso, tomaría siempre valores distintos de 0.

### 3.1 Caso general

Tal y como ocurría con los procesos AR(1), los procesos AR(p) no son estacionarios para cualquier valor de los parámetros del polinomio autorregresivo

de retardos. Podemos establecer una condición de estacionariedad para el caso general siguiendo un procedimiento similar al del caso AR(1). Para ello, consideremos las raíces del polinomio autorregresivo de retardos:

$$1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p = 0$$

Dado que el polinomio de retardos tiene ahora  $p$  diferentes raíces. Supongamos que estas las  $p$  raíces son  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ . Entonces, el polinomio anterior lo podemos expresar así:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \dots (1 - \lambda_p L)$$

Es evidente que si una de las raíces es la unidad entonces el proceso no es estacionario. Por el contrario, si todas son mayores que la unidad en valor absoluto, el proceso es estacionario. Sin embargo, existen supuestos que también implican estacionariedad que no tienen cabida si limitamos la condición de estacionariedad a lo anterior. Para verlo, consideremos este ejemplo:

$$y_t = -0.5 y_{t-1} - 0.5 y_{t-2} + u_t$$

El polinomio autorregresivo de retardos toma la forma  $1 + 0.5L + 0.5L^2$ . Las soluciones de este polinomio son  $L_1 = \frac{-0.5 + \sqrt{0.25 - 2}}{1} = -0.5 + \sqrt{1.75}i$  y  $L_2 = \frac{-0.5 - \sqrt{0.25 - 2}}{1} = -0.5 - \sqrt{1.75}i$ . Como vemos, las soluciones del polinomio son números complejos. Entonces, para comprobar si son o no son estacionarios hay que garantizar que todas las raíces del polinomio autorregresivo de retardos deben quedar fuera del círculo unidad o lo que es lo mismo, que su módulo sea superior a la unidad. En este caso, es simple comprobar que  $\text{mod } L_1 = \text{mod } L_2 = \sqrt{1.75} > 1$  por lo que en este caso  $y_t$  es un proceso estacionario.

Asumiendo que es un proceso estacionario, la media y la varianza de este modelo se puede expresar así:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\delta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t) = \delta + \phi_1 E(y_{t-1}) + \\ &\quad + \phi_2 E(y_{t-2}) + \dots + \phi_p E(y_{t-p}) + E(u_t) \end{aligned} \quad (25)$$

Bajo la hipótesis de estacionariedad, entonces es cierto que  $E(y_t) = E(y_{t-1}) = \dots = E(y_{t-p})$ . Introduciendo esta información en la ecuación anterior, resulta que:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= \delta + \phi_1 E(y_t) + \phi_2 E(y_t) + \dots + \phi_p E(y_t) + E(u_t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p) E(y_t) = \delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow E(y_t) = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p} \end{aligned} \quad (26)$$

Para la obtención del primer valor de la función de autocovarianza debemos transformar el proceso anterior en términos similares a lo que hicimos para el caso AR(1). Podemos definir entonces una variable  $\tilde{y}_t$  que no es sino la desviación con respecto a la media poblacional del proceso original. Este nuevo proceso se puede expresar en los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_t &= y_t - E(y_t) = y_t - \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p} + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t - \\
&= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t + \frac{\delta (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p) - \delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p} = \\
&= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t - \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p} \sum_{i=1}^p \phi_i = \\
&= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t - E(y_t) \sum_{i=1}^p \phi_i = \\
&= \phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{y}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + u_t \tag{27}
\end{aligned}$$

Ahora, resulta muy sencillo calcular los valores de la función de autocovarianza. Su primer elemento, la varianza, es igual a:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= E(\tilde{y}_t^2) = E \left[ \tilde{y}_t (\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{y}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + u_t) \right] = \\
&= \phi_1 E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-1}) + \phi_2 E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-2}) + \dots + \phi_p E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-p}) + E(\tilde{y}_t u_t) = \\
&= \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \dots + \phi_p \gamma(p) + \sigma^2 \tag{28}
\end{aligned}$$

donde sólo debemos tener en cuenta que:

$$\begin{aligned}
E(\tilde{y}_t u_t) &= E \left[ (\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{y}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + u_t) u_t \right] = \\
&= \phi_1 E(\tilde{y}_{t-1} u_t) + \phi_2 E(\tilde{y}_{t-2} u_t) + \dots + \phi_p E(\tilde{y}_{t-p} u_t) + E(u_t^2) \\
&= \sigma^2 \tag{29}
\end{aligned}$$

ya que  $E(\tilde{y}_{t-i} u_t) = 0, \forall i \neq 0$ . El resto de los elementos de la función de autocovarianza se obtienen siguiendo un procedimiento similar. Para  $k=1,2$  es sencillo demostrar que:

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-1}) = E \left[ (\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{y}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + u_t) \tilde{y}_{t-1} \right] = \\
&= \phi_1 E(\tilde{y}_{t-1}^2) + \phi_2 E(\tilde{y}_{t-1} \tilde{y}_{t-2}) + \dots + \phi_p E(\tilde{y}_{t-1} \tilde{y}_{t-p}) + E(\tilde{y}_{t-1} u_t) = \\
&= \phi_1 \gamma(0) + \phi_2 \gamma(1) + \dots + \phi_p \gamma(p-1) \tag{30}
\end{aligned}$$



$$\phi = R^{-1}\rho \quad (35)$$

### 3.2 Función de autocorrelación parcial

Como hemos visto, la función de autocorrelación de un proceso autorregresivo tiene como características su descenso progresivo y que sólo se anula en el infinito. La presencia de infinitos valores distintos de 0 para cualquier proceso autorregresivo hace que sea imposible distinguir cuál es el verdadero valor del parámetro  $\rho$  mediante un simple estudio de la función de autocorrelación.

Por ello, en ocasiones es conveniente obtener los coeficientes de la función de autocorrelación parcial. Esta función de autocorrelación mide la correlación entre  $y_{t-k}$  y  $y_t$  ajustado a los valores de los coeficientes correspondientes a los retardos intermedios  $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$ . Para comprender el por qué de su utilidad, consideremos que la variable viene generada por un AR(p). Entonces, el primer coeficiente de la función de autocorrelación parcial ( $\phi_{11}$ ) mide la correlación entre  $y_t$  e  $y_{t-1}$ . Este valor coincide con el primer valor de la función de autocorrelación. El  $k$ -ésimo coeficiente de la función de autocorrelación parcial ( $\phi_{kk}$ ) mide el grado de correlación entre  $y_t$  e  $y_{t-p}$  ajustado por el valor de  $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k}$ . Si se cumple que  $k < p$ , entonces este coeficiente será distinto de 0 ya que  $y_t$  depende de  $y_{t-k}$ , de acuerdo con el proceso generador de los datos. Pero si  $k > p$ , entonces  $\phi_{kk}$  se anulará ya que  $y_t$  no dependerá de él. Por tanto, un proceso autorregresivo de orden  $p$  presenta una función de autocorrelación parcial con tan sólo  $p$  coeficientes distintos de 0. Para el resto de coeficientes ( $k > p$ ), esta función se anula. Esta característica nos puede ayudar a determinar el orden del proceso autorregresivo.

La función de autocorrelación parcial se puede calcular de diversas maneras. Una posibilidad sería mediante la estimación de la siguiente familia de modelos:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_k y_{t-k} + u_t, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

El valor del  $\hat{a}_k$  es el coeficiente  $k$ -ésimo de la función de autocorrelación parcial, lo que se suele representar mediante  $\phi_{kk}$ . El segundo método para calcular los coeficientes de la función de autocorrelación parcial es mediante el uso de las ecuaciones de Yule-Walker. Estas ecuaciones no son sino una aplicación recursiva de la relación expresada en (35) para distintos valores de  $k$ .

Con esto terminamos el estudio de los procesos autorregresivos. A continuación vamos a estudiar el caso de los modelos de Medias Móviles.

## 4 MODELOS DE MEDIAS MÓVILES

Los procesos de Medias móviles fueron inicialmente propuestos en Slutsky (1937) como contrapartida de los procesos autorregresivos analizados en la sección anterior. Un proceso de medias móviles de orden  $q$  se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} MA(q) &: y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q} \\ &= \mu + (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q) u_t \\ &= \mu + \theta_q(L) u_t \end{aligned}$$

donde  $u_t$  es un ruido blanco, siendo  $\mu, \theta_i (i = 1, 2, \dots, q)$  el conjunto de parámetros de los que depende el proceso. Se puede apreciar que, al contrario de los procesos autorregresivos, un proceso de medias móviles se expresa como una suma ponderada de las perturbaciones, donde los parámetros  $\theta_i (i = 1, 2, \dots, q)$  son los que otorgan dicha ponderación. Otra forma de presentar un proceso  $MA(q)$  es la siguiente

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i}$$

donde asumimos que  $\theta_i = 1$ . Tal y como hicimos en el caso de los procesos autorregresivos, vamos a estudiar las características de estos procesos. Para ello, comenzamos por el caso más simple,  $MA(1)$ .

### 4.1 Medias Móviles de primer orden

Un proceso de medias móviles de primer orden se define de la siguiente manera:

$$MA(1): y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} \quad (36)$$

La media poblacional del proceso se obtiene de forma sencilla sin más que aplicar el operador esperanza matemática de esta forma:

$$E(y_t) = E(\mu + u_t + \theta_1 u_{t-1}) = \mu + E(u_t) + \theta_1 E(u_{t-1}) = \mu \quad (37)$$

Del mismo modo, la varianza del proceso es igual a:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \text{Var}(y_t) = E \{ [y_t - E(y_t)]^2 \} = E [ (\mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} - \mu)^2 ] = \\
&= E [ (u_t + \theta_1 u_{t-1})^2 ] = E (u_t^2) + \theta_1^2 E (u_{t-1}^2) + 2\theta_1 E (u_t u_{t-1}) = \\
&= \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 = (1 + \theta_1^2) \sigma^2 \tag{38}
\end{aligned}$$

El resto de los elementos de la función de autocovariana se calculan siguiendo este mismo mecanismo. Así, la covarianza de primer orden es igual a:

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= \text{Cov}(y_t, y_{t-1}) = E \{ [y_t - E(y_t)] [y_{t-1} - E(y_{t-1})] \} = \\
&= E [ (u_t + \theta_1 u_{t-1}) (u_{t-1} + \theta_1 u_{t-2}) ] = \\
&= E (u_t u_{t-1}) + \theta_1 E (u_{t-1}^2) + \theta_1 E (u_t u_{t-2}) + \theta_1^2 E (u_{t-1} u_{t-2}) \\
&= \theta_1 \sigma^2 \tag{39}
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $E(u_t u_{t-i}) = 0, \forall i \neq 0$ . La covarianza de segundo orden es igual a:

$$\begin{aligned}
\gamma(2) &= \text{Cov}(y_t, y_{t-2}) = E \{ [y_t - E(y_t)] [y_{t-2} - E(y_{t-2})] \} = \\
&= E [ (u_t + \theta_1 u_{t-1}) (u_{t-2} + \theta_1 u_{t-3}) ] \\
&= E (u_t u_{t-2}) + \theta_1 E (u_{t-1} u_{t-2}) + \theta_1 E (u_t u_{t-3}) + \theta_1^2 E (u_{t-1} u_{t-3}) \\
&= 0 \tag{40}
\end{aligned}$$

No es difícil probar que el resto de los valores de la función de autocovarianza también se anulan. Sin más que considerar el elemento  $k$ -ésimo de esta función, vemos que:

$$\begin{aligned}
\gamma(k) &= \text{Cov}(y_t, y_{t-k}) = E \{ [y_t - E(y_t)] [y_{t-k} - E(y_{t-k})] \} = \\
&= E [ (u_t + \theta_1 u_{t-1}) (u_{t-k} + \theta_1 u_{t-k+1}) ] = \\
&= E (u_t u_{t-k}) + \theta_1 E (u_{t-1} u_{t-k}) + \theta_1 E (u_t u_{t-k+1}) + \theta_1^2 E (u_{t-1} u_{t-k+1}) = \\
&= 0 \tag{41}
\end{aligned}$$

por lo que esta función tiene un único valor distinto de cero, aquél que corresponde al caso  $k = q = 1$ . En el resto de las ocasiones,  $k > q = 1$ , la función se anula. Con esta información, resulta sencillo comprobar que la función de autocorrelación también es dicotómica: tiene un único valor distinto de 0 cuando  $k = q = 1$  y se anula para  $k > q = 1$ .

$$\gamma(k) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2) \sigma^2 & k = 0 \\ \theta_1 \sigma^2 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases} \quad (42)$$

A partir de esta información, se obtiene de forma inmediata la función de autocorrelación:

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} \frac{\theta_1 \sigma^2}{(1 + \theta_1^2) \sigma^2} = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases} \quad (43)$$

Como vemos, un proceso de medias móviles de primer orden tiene una función de autocorrelación con un único valor distinto de cero. Este valor, que coincide con el coeficiente de correlación de primer orden, depende exclusivamente del parámetro  $\theta_1$ . Por último, otra característica de estos procesos es que ni la media, ni la varianza poblacional dependen del período de tiempo en el que nos situamos. Si además tenemos en cuenta que se cumple la restricción  $\gamma(j) = \gamma(-j)$ ,  $\forall j$  podemos afirmar que un proceso de medias móviles de primer orden es siempre estacionario.

Como vemos, la forma de la función de autocorrelación es muy sencilla en el caso de un medias móviles de primer orden. Sin embargo, podemos encontrar situaciones en las que no seamos capaces de identificar correctamente cuál es el proceso generador de los datos. Para ilustrar este punto, reformulemos el proceso de medias móviles de la siguiente manera:

$$y_t = \mu + (1 + xL) u_t$$

Por simple analogía con el caso anteriormente estudiado, la función de autocorrelación de este proceso tiene un único valor distinto de cero cuando  $k=1$  y 0 en el resto de los casos. Para  $k=1$ , el coeficiente de autocorrelación es igual a  $\frac{x}{1+x^2}$ . Es evidente que si  $x = \theta_1$ , entonces tenemos el caso estudiado con anterioridad. Consideremos ahora que el caso  $x = \frac{1}{\theta_1}$ . Entonces, el coeficiente de autocorrelación es igual a:

$$\rho(1) = \frac{x}{1+x^2} = \frac{\frac{1}{\theta_1}}{1 + \left(\frac{1}{\theta_1}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\theta_1}}{1 + \frac{1}{\theta_1^2}} = \frac{\frac{1}{\theta_1}}{\frac{1 + \theta_1^2}{\theta_1^2}} = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

dado que el resto de los valores de la función de autocorrelación son 0 tenemos dos valores procesos de medias móviles distintos que generan una misma función de autocorrelación. En consecuencia, si no imponemos restricciones sobre los parámetros del polinomio de medias móviles vamos a tener problemas de identificación.

Otra punto de vista que también exige la imposición de restricciones sobre estos parámetros es la representación autorregresiva in nita de estos modelos. Al estudiar los procesos autorregresivos vimos que, si son estacionarios, se pueden expresar como medias móviles de orden in nito. Parece apropiado que un medias móviles se pueda expresar de forma recíproca como un  $AR(\infty)$ . Para ver cómo podemos lograrlo vamos a trabajar con el polinomio de retardos de la parte media móvil.

$$y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} = \mu + (1 + \theta_1 L) u_t = (1 - \eta_1 L) u_t$$

donde, por sencillez, hemos realizado la transformación  $\eta_1 = -\theta_1$ . Si suponemos que  $|\theta_1| = |\eta_1| < 1$ , entonces existe el polinomio  $(1 - \eta_1 L)^{-1}$ , lo que permite expresar el proceso de medias móviles como:

$$\frac{y_t}{(1 - \eta_1 L)} = \frac{\mu}{(1 - \eta_1 L)} + u_t$$

siendo:

$$\frac{y_t}{(1 - \eta_1 L)} = y_t + \eta_1 y_{t-1} + \eta_1^2 y_{t-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_1^i y_{t-i}$$

Luego, podemos expresar el proceso de medias móviles como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \eta_1^i y_{t-i} &= \frac{\mu}{1 - \eta_1} + u_t \Rightarrow \\ \Rightarrow y_t + \eta_1 y_{t-1} + \eta_1^2 y_{t-2} + \dots &= \frac{\mu}{1 - \eta_1} + u_t \\ \Rightarrow y_t = -\eta_1 y_{t-1} - \eta_1^2 y_{t-2} - \dots &+ \frac{\mu}{1 - \eta_1} + u_t \\ \Rightarrow y_t = \theta_1 y_{t-1} + \theta_1^2 y_{t-2} + \dots &+ \frac{\mu}{1 + \theta_1} + u_t \\ \Rightarrow y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_1^i y_{t-i} + \frac{\mu}{1 + \theta_1} &+ u_t \end{aligned}$$

Como vemos, hemos expresado el valor de  $y_t$  en función de in nitos retardos, más una término independiende más una perturbación aleatoria. Para que podamos considerar que tiene una representación  $AR(\infty)$ , basta con incluir la restricción  $|\theta_1| < 1$ .

Entonces, diremos que un proceso de medias móviles es invertible que se pueda representar como un proceso autorregresivo estacionario de orden in nito. En el caso de un proceso de medias móviles de primer orden, la restricción de invertibilidad es  $|\theta_1| < 1$ .

## 4.2 Caso general

Vamos a verificar a continuación si estas propiedades son igualmente válidas en el caso general, aquél en el que la variable es una combinación de los  $q$  retardos de la perturbación. Tal y como hemos realizado con anterioridad, comenzamos el estudio por la obtención de la media poblacional del proceso. Si tenemos en cuenta que  $E(u_{t-i}) = 0 \forall i = 0, 1, \dots$  resulta sencilla obtener esta media poblacional:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}) = \\ &= \mu + \sum_{i=0}^q \theta_i E(u_{t-i}) = \mu \end{aligned} \quad (44)$$

De igual manera, la varianza es igual a:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \text{Var}(y_t) = E\{[y_t - E(y_t)]^2\} = E\left[\left(\mu + \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i} - \mu\right)^2\right] = \\ &= E\left[\left(\sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i}\right)^2\right] = E\left(\sum_{i=0}^q \theta_i^2 u_{t-i}^2\right) + E\left(\sum_{i \neq j}^q \theta_i \theta_j u_{t-i} u_{t-j}\right) = \\ &= \sum_{i=0}^q \theta_i^2 E(u_{t-i}^2) + 0 = \sigma^2 \sum_{i=0}^q \theta_i^2 \end{aligned} \quad (45)$$

El resto de los valores de la función de autocovarianza se obtiene siguiendo una mecánica similar:

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= E\{[y_t - E(y_t)][y_{t-1} - E(y_{t-1})]\} = E\left[\left(\sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i}\right)\left(\sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-1}\right)\right] \\ &= E\left(u_t \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-1}\right) + \theta_1 E\left(u_{t-1} \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-1}\right) + \\ &\quad + \dots + \theta_{q-1} E\left(u_{t-q+1} \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-1}\right) + \theta_q E\left(u_{t-q} \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-1}\right) \\ &= 0 + \theta_1 E(u_{t-1}^2) + \theta_1 \theta_2 E(u_{t-2}^2) + \dots + \theta_{q-1} \theta_q E(u_{t-q+1}^2) + 0 = \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^q \theta_i \theta_{i+1} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\gamma(2) = E\{[y_t - E(y_t)][y_{t-2} - E(y_{t-2})]\} = E\left[\left(\sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i}\right)\left(\sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-2}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
&= E\left(u_t \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-2}\right) + \theta_1 E\left(u_{t-1} \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-2}\right) + \theta_2 E\left(u_{t-2} \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-2}\right) \\
&\quad + \dots + \theta_{q-2} E\left(u_{t-q-2} \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-2}\right) + \theta_{q-1} E\left(u_{t-q-1} \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-2}\right) \\
&\quad + \theta_q E\left(u_{t-q} \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-2}\right) \\
&= 0 + 0 + \theta_0 \theta_2 E\left(u_{t-2}^2\right) + \theta_1 \theta_3 E\left(u_{t-3}^2\right) + \dots + \theta_{q-2} \theta_q E\left(u_{t-q-2}^2\right) \\
&= \sigma^2 \sum_{i=0}^q \theta_i \theta_{i+2} \tag{47}
\end{aligned}$$

El término general es un poco más complejo ya que, como hemos visto, las autocovarianzas se anulan siempre que  $k > q$ . Entonces, asumiendo que  $k < q$ , entonces se cumple que:

$$\begin{aligned}
\gamma(k) &= E\{[y_t - E(y_t)][y_{t-k} - E(y_{t-k})]\} = E\left[\left(\sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i}\right) \left(\sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-k}\right)\right] \\
&= E\left(u_t \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-k}\right) + \dots + \theta_k E\left(u_{t-k} \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-k}\right) + \\
&\quad \theta_{k+1} E\left(u_{t-k-1} \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-k}\right) + \dots + \theta_{q-k} E\left(u_{t-q-k} \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-k}\right) \\
&\quad + \dots + \theta_q E\left(u_{t-q} \sum_{i=0}^q \theta_i u_{t-i-k}\right) \\
&= 0 + \dots + \theta_0 \theta_k E\left(u_{t-k}^2\right) + \theta_1 \theta_{k+1} E\left(u_{t-k-1}^2\right) + \dots + \theta_{q-k} \theta_k E\left(u_{t-q-k}^2\right) \\
&= \sigma^2 \sum_{i=0}^q \theta_i \theta_{i+k} \tag{48}
\end{aligned}$$

Por otro lado, en el caso en el que  $k > q$ , se cumple siempre que  $\gamma(k) = 0$ .

A partir de estos resultados, la función de autocorrelación es muy sencilla de obtener.:

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} \frac{\sigma^2 \sum_{i=0}^q \theta_i \theta_{i+k}}{\sigma^2 \sum_{i=0}^q \theta_i^2} = \frac{\sum_{i=0}^q \theta_i \theta_{i+k}}{\sum_{i=0}^q \theta_i^2} & k \leq q \\ 0 & k > q \end{cases} \tag{49}$$

La función de autocorrelación tan sólo depende de los valores de los parámetros  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ .

## 5 Procesos Mixtos Autorregresivos-Medias Móviles

Los dos tipos que hemos visto con anterioridad tienen características plenamente diferentes, lo que les hace ser en la práctica competidores. Habitualmente, a estos modelos se les conoce con el nombre de autorregresivos o medios móviles puros. No obstante, es posible que el proceso generador de una variable incluya un comportamiento tanto autorregresivo como de Media móvil. Este tipo de procesos se les conoce como procesos mixtos y fueron propuestos por primera vez en Wold (1938). Un proceso ARMA (1,1) se define de la siguiente manera:

$$ARMA(1,1) : y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} \quad (50)$$

Como se puede apreciar, el proceso incluye tanto un retardo de la variable como un retardo de la perturbación. Por tanto, combina los elementos propios de un AR(1) y de un MA(1).

Dada la especificación propia de estos procesos, las características son una combinación de las propiedades de los procesos autorregresivos y medios móviles. Así, un proceso ARMA(1,1) solamente es estacionario si las raíces del polinomio de retardos de la parte autorregresiva están fuera del círculo unidad. Esto implica que si  $|\phi_1| < 1$ , el proceso es estacionario, mientras que el proceso no es estacionario en otro caso.

Debemos realizar un supuesto adicional. Si expresamos un proceso ARMA en función de sus polinomios de retardos, resulta que:

$$\begin{aligned} y_t &= \delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} \\ \Rightarrow (1 - \phi_1 L) y_t &= \delta + (1 + \theta_1 L) u_t \\ \Rightarrow \phi(L) y_t &= \delta + \theta(L) u_t \end{aligned} \quad (51)$$

Entonces, que sucedería si  $\phi_1 = -\theta_1$ . Resulta sencillo demostrar que la expresión anterior quedaría como sigue:

$$(1 - \phi_1 L) y_t = \delta + (1 - \phi_1 L) u_t$$

por lo que a ambos lados de la igualdad tenemos el mismo polinomio de retardos. Esta expresión la podemos simplificar dividiendo en ambas partes de la igualdad por  $(1 - \phi_1 L)$ :

$$y_t = \frac{\delta}{(1 - \phi_1 L)} + u_t = \frac{\delta}{1 - \phi_1} + u_t$$

Por lo que, en realidad, lo que tenemos no es un proceso ARMA(1,1), sino la suma de un término independiente más un ruido blanco. Una forma de evitar la presencia de este tipo de cuestiones es introducir el supuesto adicional de que no existen factores comunes en los polinomios  $\phi(L)$  y  $\theta(L)$ . Esto supone la imposibilidad de que estos polinomios se cancelen total o parcialmente entre sí.

Una vez que hemos incluido estos supuesto, podemos conocer los momentos del proceso. Como hemos venido realizando hasta ahora, vamos a comenzar estudiando el comportamiento de la media poblacional del proceso. Para lo cual, resulta conveniente recordar que asumimos que los parámetros del polinomio autorregresivo de retardos cumplen la restricción de estacionariedad. Bajo este supuesto, resulta fácil probar que:

$$\begin{aligned}
 E(y_t) &= \mu = E(\delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1}) = \delta + \phi_1 E(y_{t-1}) + E(u_t) + \theta_1 E(u_{t-1}) \\
 &= \delta + \phi_1 E(y_t) \Rightarrow E(y_t) - \phi_1 E(y_t) = (1 - \phi_1) E(y_t) = \delta \Rightarrow \\
 &\Rightarrow E(y_t) = \mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1}
 \end{aligned}$$

Para obtener la varianza del proceso, y tal como hicimos al estudiar el comportamiento de los procesos autorregresivos puros, es conveniente comenzar por transformar la variable  $y_t$  en sus diferencias con respecto a la media poblacional

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_t &= y_t - E(y_t) = y_t - \mu = \delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} - \frac{\delta}{1 - \phi_1} \\
 &= \phi_1 y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \frac{\delta(1 - \phi_1) - \delta}{1 - \phi_1} \\
 &= \phi_1 y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} - \frac{\delta}{1 - \phi_1} \phi_1 \tag{52}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \phi_1 y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} - \phi_1 E(y_t) \\
 &= \phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} \tag{53}
 \end{aligned}$$

La varianza del proceso se puede obtener de una manera sencilla sin más que considerar que:

$$\begin{aligned}
 \gamma(0) &= \text{Var}(y_t) = E\{[y_t - E(y_t)]^2\} = E(\tilde{y}_t^2) \\
 &= E[(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1})^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi_1^2 E(\tilde{y}_{t-1}^2) + E(u_t^2) + \theta_1^2 E(u_{t-1}^2) + 2\phi_1 E(\tilde{y}_{t-1}u_t) \\
&\quad + 2\phi_1\theta_1 E(\tilde{y}_{t-1}u_{t-1}) + 2\theta_1 E(u_t u_{t-1}) \\
&= \phi_1^2 \gamma(0) + \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 + 0 + 2\phi_1\theta_1 \sigma^2 + 0 \\
&= \phi_1^2 \gamma(0) + (1 + \theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1) \sigma^2
\end{aligned} \tag{54}$$

donde hemos tenido en cuenta que en este tipo de procesos  $E(\tilde{y}_{t-1}u_t) = 0$  y que  $E(\tilde{y}_{t-1}u_{t-1}) = \sigma^2$ . Como  $\gamma(0)$  aparece en ambas partes de la igualdad, podemos simplificar la anterior expresión, con lo que la varianza del proceso queda como sigue

$$\gamma(0) = \frac{(1 + \theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1) \sigma^2}{1 - \phi_1^2} \tag{55}$$

El resto de la función de autocovarianza se obtiene de forma similar:

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= Cov(y_t y_{t-1}) = E\{[y_t - E(y_t)][y_{t-1} - E(y_{t-1})]\} = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-1}) \\
&= E[(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1}) \tilde{y}_{t-1}] \\
&= \phi_1 E(\tilde{y}_{t-1}^2) + E(\tilde{y}_{t-1}u_t) + \theta_1 E(\tilde{y}_{t-1}u_{t-1}) \\
&= \phi_1 \gamma(0) + 0 + \theta_1 \sigma^2 = \\
&= \phi_1 \frac{(1 + \theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1) \sigma^2}{1 - \phi_1^2} + \theta_1 \sigma^2 \\
&= \frac{(1 + \phi_1\theta_1)(\phi_1 + \theta_1) \sigma^2}{1 - \phi_1^2}
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(2) &= Cov(y_t y_{t-2}) = E\{[y_t - E(y_t)][y_{t-2} - E(y_{t-2})]\} = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-2}) \\
&= E[(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1}) \tilde{y}_{t-2}] \\
&= \phi_1 E(\tilde{y}_{t-1} \tilde{y}_{t-2}) + E(\tilde{y}_{t-2} u_t) + \theta_1 E(\tilde{y}_{t-2} u_{t-1}) \\
&= \phi_1 \gamma(1) + 0 + 0 \\
&= \phi_1 \gamma(1)
\end{aligned} \tag{57}$$

En general, siempre  $k > 2$ , la función de autocovarianza adopta esta función:

$$\begin{aligned}
\gamma(k) &= Cov(y_t y_{t-k}) = E\{[y_t - E(y_t)][y_{t-k} - E(y_{t-k})]\} = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-k}) \\
&= E[(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1}) \tilde{y}_{t-k}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi_1 E(\tilde{y}_{t-1} \tilde{y}_{t-k}) + E(\tilde{y}_{t-k} u_t) + \theta_1 E(\tilde{y}_{t-k} u_{t-1}) \\
&= \phi_1 \gamma(k-1) + 0 + 0 \\
&= \phi_1 \gamma(k-1)
\end{aligned} \tag{58}$$

Por tanto, la función de autocorrelación se define como

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} \frac{\frac{(1+\phi_1\theta_1)(\phi_1+\theta_1)\sigma^2}{1-\phi_1^2}}{\frac{(1+\theta_1^2+2\phi_1\theta_1)\sigma^2}{1-\phi_1^2}} = \frac{(1+\phi_1\theta_1)(\phi_1+\theta_1)}{(1+\theta_1^2+2\phi_1\theta_1)} & k = 1 \\ \frac{\phi_1\gamma(k-1)}{\gamma(0)} = \phi_1\rho(k-1) & k > 1 \end{cases} \tag{59}$$

Como se observa, la función de autocorrelación presenta dos comportamientos diferenciados. Siempre que el orden del coeficiente de autocorrelación sea inferior o igual al orden de la parte de medias móviles, la función de autocorrelación combina los efectos de sus dos componentes. En cambio, en el momento en el que el orden de la función de autocorrelación supera el orden de la parte de medias móviles, la función de autocorrelación sigue el patrón de comportamiento típico de los procesos autorregresivos. En consecuencia, la función de autocorrelación presenta infinitos valores distintos de 0.

## 5.1 Caso general

Un proceso  $ARMA(p, q)$  se define como sigue:

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \dots + \theta_q u_{t-q} \tag{60}$$

Este proceso se puede expresar en función de sus respectivos polinomios de retardos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
y_t &= \delta + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \dots + \theta_q u_{t-q} \\
&\Rightarrow (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) y_t = \delta + (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q) u_t \\
&\Rightarrow \phi_p(L) y_t = \delta + \theta_q(L) u_t
\end{aligned}$$

En la medida en la que este proceso tiene parte autorregresiva, para que este proceso sea estacionario deben imponerse ciertas restricciones sobre los parámetros  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ . En concreto, el proceso es estacionario siempre que las raíces características del polinomio autorregresivo de retardos estén fuera del círculo unidad. Al mismo tiempo, este proceso será invertible si las

raíces del polinomio de retardos de la parte de medias móviles están todas fuera del círculo unidad. Por último, también imponemos la restricción de que no existen factores comunes entre los dos polinomios de retardos  $\phi_p(L)$  y  $\theta_q(L)$

Si imponemos las condiciones de estacionariedad, la obtención de los momentos del proceso es una tarea sencilla, aunque un poco tediosa. Para calcular la media poblacional del proceso basta con considerar que todas las medias poblacionales coinciden

$$\begin{aligned}
E(y_t) &= E(\delta + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \dots + \theta_q u_{t-q}) \\
&= \delta + \phi_1 E(y_{t-1}) + \dots + \phi_p E(y_{t-p}) + E(u_t) + \theta_1 E(u_{t-1}) \\
&\quad + \dots + \theta_q E(u_{t-q}) \\
&= \delta + \phi_1 E(y_t) + \dots + \phi_p E(y_t)
\end{aligned}$$

con lo que ahora resulta inmediato probar que:

$$E(y_t) = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p} = \frac{\delta}{\phi_p(1)}$$

Por el contrario, los elementos de la función de autocovarianza de un ARMA(p,q) no son tan sencillos de obtener por cuanto dependen de los valores concretos de p y q. Tan sólo podemos afirmar que, mientras el orden del elemento de la función de autocovarianza no supone el valor del parámetro q, la función de autocovarianza depende tanto de  $\phi_i \forall i = 1, 2, \dots, p$  como de  $\theta_i \forall i = 1, 2, \dots, q$ .

El modo de obtener estos valores de la función de autocovarianza es el siguiente. En primer lugar debemos transformar (60) en términos de sus desviaciones con respecto a la media poblacional. Con unas sencillas operaciones resulta inmediato que:

$$\tilde{y}_t = \phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \dots + \theta_q u_{t-q} \quad (61)$$

Entonces, la varianza del proceso será:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= Var(y_t) = E\{[y_t - E(y_t)]^2\} = E(\tilde{y}_t^2) \\
&= E\left[\left(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \dots + \theta_q u_{t-q}\right) \tilde{y}_t\right] \\
&= \sum_{i=1}^p \phi_i E(\tilde{y}_{t-i} \tilde{y}_t) + \sum_{i=0}^q \theta_i E(u_{t-i} \tilde{y}_t) \\
&= \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma(i) + \sum_{i=0}^q \theta_i E(u_{t-i} \tilde{y}_t) \quad (62)
\end{aligned}$$

Donde la forma exacta de la varianza depende del elemento  $E(u_{t-i} \tilde{y}_t) \forall i = 0, 1, 2, \dots, q$  que claramente varía con los valores exactos de  $p$  y  $q$ .

El resto de las covarianzas se obtienen de forma similar. Así, para los casos en los que  $k \leq q$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
\gamma(k) &= \text{Var}(y_t) = E\{[y_t - E(y_t)][y_{t-k} - E(y_{t-k})]\} = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-k}) \\
&= E\left[\left(\phi_1 \tilde{y}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{y}_{t-p} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \dots + \theta_q u_{t-q}\right) \tilde{y}_{t-k}\right] \\
&= \sum_{i=1}^p \phi_i E(\tilde{y}_{t-i} \tilde{y}_{t-k}) + \sum_{i=0}^q \theta_i E(u_{t-i} \tilde{y}_{t-k}) \\
&= \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma(i-k) + \sum_{i=0}^q \theta_i E(u_{t-i} \tilde{y}_{t-k}) \tag{63}
\end{aligned}$$

donde de nuevo, la forma concreta de la función de autocovarianzas depende del valor de la esperanza matemática  $E(u_{t-i} \tilde{y}_{t-k})$ . Por el contrario, si consideramos que  $k > q$ , entonces el término  $\sum_{i=0}^q \theta_i E(u_{t-i} \tilde{y}_{t-k})$  se anula.

A partir de este resultado vemos que la función de autocorrelación va a tener un comportamiento dicotómico. Si  $k \leq q$  los coeficientes de la función de autocorrelación son iguales al cociente entre (63) y (62). Si es cierto que  $k > q$ , el comportamiento relacionado con la parte de medias móviles y desaparece y los coeficientes de la función de autocorrelación adoptan la forma típica de un autorregresivo de orden  $p$ , es decir  $\rho(k) = \sum_{i=1}^p \phi_i \rho(i-k) \forall k > q$ . En todo caso, los coeficientes de esta función sólo se anulan en el infinito.

Por último, la función de autocorrelación parcial también presenta infinitos valores distintos de 0. Para comprender por qué se produce este resultado, debemos tener en cuenta que al ser el modelo invertible, la parte de medias móviles tiene una representación  $\text{AR}(\infty)$ . De ahí, que los coeficientes de la función de autocorrelación parcial sólo se anulen en el infinito.

## 6 Función generatriz de autocovarianzas

Una herramienta que nos puede ayudar notablemente al cálculo de la función de autocovarianzas para las distintas combinaciones de procesos  $\text{ARMA}(p, q)$  es la función generatriz de autocovarianzas. Esta función se define de la siguiente manera:

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) z^k$$

Para comprender como se pueden obtener las autocovarianzas de un proceso estocástico a partir de esta función, vamos a expresarla de una manera

alternativa. Para ello, comencemos por suponer que tenemos un proceso estocástico de orden infinito que admite la siguiente representación:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \varepsilon_{t-i}$$

donde  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ . Esta relación también se puede expresar en función de un polinomio de retardos como  $y_t = \varphi(L) \varepsilon_t$ . La función de autocovarianzas de este proceso se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= E(y_t y_{t+|k|}) \\ &= E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_i \varphi_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+|k|-j}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_i \varphi_j E(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+|k|-j}) \end{aligned}$$

la esperanza matemática  $E(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+|k|-j})$  será igual a cero siempre que  $i \neq j + k$ , mientras que será  $\sigma_\varepsilon^2$  si se cumple la restricción anterior. En consecuencia, resulta cierto que

$$\gamma(k) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \varphi_{i+|k|}$$

Si sustituimos esta ecuación en la definición de la función de autocovarianzas, resulta que:

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) z^k = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \varphi_{i+|k|} z^k$$

pero si tenemos en cuenta que  $\varphi_i = 0, \forall i < 0$ , entonces tenemos que

$$G(z) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=-i}^{\infty} \varphi_i \varphi_{i+|k|} z^k$$

Si consideramos ahora que  $h = i + k$ , podemos transformar la ecuación anterior de forma que

$$\begin{aligned} G(z) &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \varphi_i \varphi_h z^{h-i} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \left( \sum_{h=0}^{\infty} \varphi_h z^h \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i z^{-i} \right) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \varphi(z) \varphi(z^{-1}) \end{aligned}$$

por lo que la función generatriz de autocovarianzas es igual a la varianza de la perturbación multiplicada por el producto de dos polinomios de retardos. Para ilustrar como se pueden obtener las autocovarianzas, consideremos que tenemos un proceso de medias móviles de primer orden, que lo expresamos en función de su polinomio de retardos;  $y_t = (1 + \theta_1 L) u_t = \theta(L) u_t$ . Por sencillez, asumimos que el proceso no tiene componente determinístico, aunque esto no alteraría los resultados. Entonces, la función generatriz de autocovarianzas se define como:

$$\begin{aligned} G(L) &= \sigma^2 \theta(L) \theta(L^{-1}) \\ &= \sigma^2 (1 + \theta_1 L) (1 + \theta_1 L^{-1}) \\ &= \sigma^2 (1 + \theta_1 L + \theta_1 L^{-1} + \theta_1^2) \end{aligned}$$

Entonces la varianza coincide con aquellos elementos de la función de autocovarianzas en los que aparece  $L^0$ , es decir, aquellos en los que no aparece el operador de retardos

$$\gamma(0) = G(0) = \sigma^2 (1 + \theta_1^2)$$

Del mismo modo, la autocovarianza de primer orden coincide con los elementos asociados al término  $L$  o, dada la simetría de esta función,  $L^{-1}$ . Esto nos conduce a que  $\gamma(1) = \sigma^2 \theta_1$ . Por último, ya que no existen términos en  $L^k, \forall k > 1$ , concluimos que la función de autocovarianzas se anula para todo orden superior a la unidad.

Si en lugar de pensar en un proceso de medias móviles consideramos un proceso autorregresivo, los resultados no son tan directos como en el caso precedente, aunque sigue siendo sencillo obtener la función de autocovarianzas. Para comprobarlo, supongamos el caso de un proceso autorregresivo de primer orden. Entonces, como ya hemos visto, lo podemos expresar como un proceso de medias móviles de orden infinito sin más que imponer la condición de estacionariedad

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i u_{t-i} = (1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \dots) u_t = \phi(L) u_t$$

Entonces la función generatriz de autocovarianzas adopta la siguiente forma:

$$G(z) = \sigma^2 \phi(z) \phi(z^{-1})$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 (1 + \phi_1 z + \phi_1^2 z^2 + \dots) (1 + \phi_1 z^{-1} + \phi_1^2 z^{-2} + \dots) \\
&= \sigma^2 \left[ (1 + \phi_1 z^{-1} + \phi_1^2 z^{-2} + \dots) + \phi_1 (L + \phi_1 + \phi_1^2 z^{-1} + \dots) \right. \\
&\quad \left. + \phi_1^2 (z^2 + \phi_1 z + \phi_1^2 z + \dots) + \dots \right] \\
&= \sigma^2 \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i z^{-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{i+1} z^{-i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{i+2} z^{-i+2} + \dots \right] \\
&= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{i+j} z^{-i+j}
\end{aligned}$$

Si queremos ahora obtener la varianza del proceso, debemos tomar aquellos valores que anula el exponente de  $z$  en la expresión anterior. Es obvio que en este caso eso se logra siempre que  $i=j$ , por lo que la varianza queda como sigue:

$$\gamma(0) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$$

del mismo modo, la autovarianza de primer orden se obtendrá a partir de los elementos que acompañen a  $z$ , lo que supone que  $i=j+1$ . Entonces este valor es igual a:

$$\gamma(1) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i+1} = \sigma^2 \phi_1 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2} \phi_1 = \phi_1 \gamma(0)$$

y, en general, el  $k$ -ésimo valor de esta función será:

$$\gamma(k) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i+k} = \sigma^2 \phi_1^k \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2} \phi_1^k = \phi_1^k \gamma(0)$$

Tal y como demostramos cuando estudiamos el proceso AR(1).

## 7 Procesos ARMA estacionales

Hasta el momento solamente hemos considerado procesos estocásticos que no contenía un componente estacional. Sin embargo, es posible que las variables sometidas análisis se hayan medido como datos de frecuencia inferior al año y, en consecuencia, son susceptibles de presentar un componente estacional que tenga un comportamiento propio. En este apartado vamos a analizar este tipo de modelos considerando que el proceso contiene sólo componente estacional. No es el caso más habitual desde el punto de vista empírico, pero sí que tiene interés desde el punto de vista teórico, en especial de cara a

ofrecer una mejor comprensión de aquellos procesos que combinan un comportamiento estacional con otro no estacional. Al igual que hemos realizado en los casos precedentes, vamos a comenzar analizando el caso autorregresivo para, a continuación, estudiar los procesos de medias móviles y, finalmente, los procesos mixtos. A lo largo de las subsiguientes secciones consideraremos que disponemos datos de frecuencia inferior al año, en general  $s$ , tal que  $s=2,4,12$  se interpreta como datos de frecuencia bi-mensual, trimestral o mensuales, respectivamente

## 7.1 Procesos autorregresivos estacionales

Un proceso autorregresivo estacional de orden  $P$  se define de la siguiente manera:

$$AR(p)_s : y_t = \delta + \Phi_1 y_{t-s} + \Phi_2 y_{t-2s} + \dots + \Phi_P y_{t-Ps} + u_t \quad (64)$$

donde  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, P$ ) y  $\delta$  son los parámetros del modelo y asumimos que  $u_t$  es un ruido blanco. Este proceso lo podemos expresar en función de un polinomio autorregresivo de retardos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_t &= \delta + \Phi_1 y_{t-s} + \Phi_2 y_{t-2s} + \dots + \Phi_P y_{t-Ps} + u_t \\ \Rightarrow y_t - \Phi_1 y_{t-s} - \Phi_2 y_{t-2s} - \dots - \Phi_P y_{t-Ps} &= \delta + u_t \\ \Rightarrow (1 - \Phi_1 L^s - \Phi_2 L^{2s} - \dots - \Phi_P L^{Ps}) y_t &= \delta + u_t \\ \Rightarrow \Phi_P(L^s) y_t &= \delta + u_t \end{aligned}$$

donde  $\Phi_P(L^s) = (1 - \Phi_1 L^s - \Phi_2 L^{2s} - \dots - \Phi_P L^{Ps})$ . Como vemos existen grandes similitudes entre un autorregresivo estacional y los modelos autorregresivos de la parte regular. La diferencia principal reside en el hecho de que aquí las correlaciones no se presentan entre un periodo y el inmediatamente anterior, sino entre un periodo y  $s$  periodos atrás.

Dadas estas semejanzas los resultados van a ser similares entre sí. Por ejemplo, la primera cuestión que debemos dilucidar es si el proceso autorregresivo estacional es estacionario o no. Tomando como referencia un proceso autorregresivo regular, podemos decir que un proceso autorregresivo estacional será estacionario siempre que las raíces del polinomio de retardos  $\Phi_P(L^s)$  estén todas fuera del círculo unidad.

Una vez impuesta la condición de estacionariedad, el cálculo de los momentos del proceso es similar a lo que hicimos con anterioridad para el proceso  $AR(p)$ . Así la media poblacional del proceso es:

$$\begin{aligned}
E(y_t) &= E(\delta + \Phi_1 y_{t-s} + \Phi_2 y_{t-2s} + \dots + \Phi_p y_{t-ps} + u_t) \\
&= \delta + \Phi_1 E(y_{t-s}) + \Phi_2 E(y_{t-2s}) + \dots + \Phi_p E(y_{t-ps}) + E(u_t) \\
&\Rightarrow (1 - \Phi_1 - \Phi_2 - \dots - \Phi_p) E(y_t) = \delta \\
&\Rightarrow E(y_t) = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 - \Phi_2 - \dots - \Phi_p} = \frac{\delta}{\Phi(1)}
\end{aligned}$$

Resultado cualitativamente similar al expuesto para un autorregresivo de orden  $p$  no estacional.

La función de autocovarianzas tiene características similares a la de un autorregresivo regular. Primero, tiene infinitos valores distintos de 0, no se anula nunca. Además, los coeficientes son decrecientes, en valor absoluto. Tomando como referencia un proceso autorregresivo estacional de primer orden, es directo comprobar que:

$$y_t = \sum_{i=0}^{t-1} \Phi_1^i + \sum_{i=0}^{t-1} \Phi_1^i u_{t-i}$$

asumiendo que  $y_0 = 0$ . La función de autocovarianzas para este proceso se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sigma^2 \Phi(z) \Phi(z^{-1}) \\
&= \sigma^2 (1 + \Phi_1 z^s + \Phi_1^2 z^{2s} + \dots) (1 + \Phi_1 z^{-s} + \Phi_1^2 z^{-2s} + \dots) \\
&= \sigma^2 \left[ (1 + \Phi_1 z^s + \Phi_1^2 z^{2s} + \dots) + \Phi_1 (z^s + \Phi_1 + \Phi_1^2 z^{-s} + \dots) \right. \\
&\quad \left. + \Phi_1^2 (z^{2s} + \Phi_1 z + \Phi_1^2 + \dots) + \dots \right] \\
&= \sigma^2 \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^i z^{-is} + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{i+1} z^{-(i+1)s} + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{i+2} z^{-(i+2)s} + \dots \right] \\
&= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_1^{i+j} z^{-(i+j)s}
\end{aligned}$$

Entonces, los valores de la autocovarianza se obtienen cuando  $i = j$ , lo que supone que

$$G(0) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} = \frac{\sigma^2}{1 - \Phi_1^2}$$

sin más que tener en cuenta la restricción de estacionariedad. Para obtener el resto de los valores de la función, debemos tener en cuenta que en

la función generatriz de autocovarianzas aparece  $z^{(-i+j)s}$ . En consecuencia, sólomente serán distintos de 0 aquellos coeficientes de la función múltiplos de  $s$ . Es decir,  $\gamma(k s)$  será distinta de 0 para  $k=0, 1, 2, \dots$ , mientras que el resto de los valores serán 0. Así, cuando  $k=1$ , se cumple que:

$$\gamma(s) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i+1} = \sigma^2 \Phi_1 \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} = \frac{\sigma^2}{1 - \Phi_1^2} \Phi_1 = \Phi_1 \gamma(0)$$

y, en general, el valor de esta función será:

$$\begin{aligned} \gamma(k s) &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i+k} = \sigma_1^2 \Phi_1^k \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} = \frac{\sigma^2}{1 - \Phi_1^2} \Phi_1^k \\ &= \Phi_1^k \gamma(0), \text{ para todo } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Lo que con rma que el proceso autorregresivo estacional tiene un comportamiento similar al de un autorregresivo regular. A partir de aquí, se puede entender que la función de autocorrelación de este proceso tiene un aspecto similar a de un AR(1), con la única diferencia que los coeficientes distintos de 0 están asociados a los múltiplos del valor de  $s$ . Por ejemplo, si tenemos datos trimestrales, la función de autocorrelación tomará valores distintos de 0 en los coeficientes 4, 8, 12, ..., mientras que si tenemos datos mensuales, 12, 24, 48, .... En ambos casos, el resto de los coeficientes se anula.

Por otro lado, la función de autocorrelación parcial presenta un único valor distinto de 0 en el periodo  $s$  y se anula para el resto de los casos.

La extensión al caso general se hace en los mismos términos que para un AR(1).

## 7.2 Procesos estacionales de medias móviles

Un proceso medias móviles estacional de orden  $Q$  se define de la siguiente manera:

$$MA(Q)_s : y_t = \mu + u_t + \Theta_1 u_{t-s} + \Theta_2 u_{t-2s} + \dots + \Theta_Q u_{t-Qs} \quad (65)$$

donde  $\mu$  y  $\Theta_i (i = 1, 2, \dots, Q)$ , siendo  $u_t$  un ruido blanco. Este proceso se puede expresar en función de un polinomio de retardos así:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + u_t + \Theta_1 u_{t-s} + \Theta_2 u_{t-2s} + \dots + \Theta_Q u_{t-Qs} \\ &= \mu + u_t + \Theta_1 L^s u_t + \Theta_2 L^{2s} u_t + \dots + \Theta_Q L^{Qs} u_t \\ &= \mu + \left( 1 + \Theta_1 L^s + \Theta_2 L^{2s} + \dots + \Theta_Q L^{Qs} \right) u_t \\ &= \mu + \Theta_Q(L^s) u_t \end{aligned}$$

donde  $\Theta_Q(L^s) = (1 + \Theta_1 L^s + \Theta_2 L^{2s} + \dots + \Theta_Q L^{Qs})$ . Como todo proceso que sólo tiene parte de medias móviles, este proceso será siempre estacionario. No será, por el contrario, siempre invertible. Para que cumpla esta característica es necesario imponerle una condición similar a la de los procesos de medias móviles regulares. Así, un proceso estacional de medias móviles será invertible cuando las raíces del polinomio autorregresivo de retardos estén todas fuera del círculo unidad.

El análisis de los momentos de este proceso se hace de forma similar a como lo hemos venido realizando. En primer lugar, la media poblacional del proceso se obtiene como:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\mu + u_t + \Theta_1 u_{t-s} + \Theta_2 u_{t-2s} + \dots + \Theta_Q u_{t-Qs}) \\ &= E(\mu) + E(u_t) + \Theta_1 E(u_{t-s}) + \Theta_2 E(u_{t-2s}) + \dots + \Theta_Q E(u_{t-Qs}) \\ &= \mu \end{aligned}$$

tal y como ocurría en los procesos regulares de medias móviles. Para el cálculo de la función de autocovarianza vamos a hacer uso de la función generatriz de autocovarianzas. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sigma^2 \Theta(z) \Theta(z^{-1}) \\ &= \sigma^2 (1 + \Theta_1 z^s + \Theta_2 z^{2s} + \dots + \Theta_Q z^{Qs}) (1 + \Theta_1 z^{-s} + \Theta_2 z^{-2s} + \dots + \Theta_Q z^{-Qs}) \\ &= \sigma^2 \left[ (1 + \Theta_1 z^{-s} + \Theta_2 z^{-2s} + \dots + \Theta_Q z^{-Qs}) \right. \\ &\quad + \Theta_1 (z^s + \Theta_1 + \Theta_2 z^{-s} + \dots + \Theta_Q z^{-Qs+1}) \\ &\quad + \Theta_2 (z^{2s} + \Theta_1 z^s + \Theta_2 + \dots + \Theta_Q z^{-Qs+2}) + \dots \\ &\quad \left. + \Theta_Q (z^{Qs} + \Theta_1 z^{(Q-1)s} + \Theta_2 + \dots + \Theta_Q) \right] \\ &= \sigma^2 \left[ \sum_{i=0}^Q \Theta_i \sum_{j=0}^Q \Theta_j z^{(i-j)s} \right] \end{aligned}$$

Para obtener el valor de la varianza debemos considerar los elementos que acompañan a  $z^0$ . Esto implica que debemos seleccionar aquellos casos en los que se cumple la igualdad  $i = j$ . Esto nos lleva al siguiente resultado:

$$\gamma(0) = \sigma^2 \left( \sum_{i=0}^Q \Theta_i^2 \right)$$

Para calcular el resto de los coeficientes de la función de autocovarianza debemos tener en cuenta que al multiplicar los dos polinomios, tan sólo van

a aparecer coeficientes asociados a exponentes múltiplos de  $s$ , es decir,  $z^s, z^{2s}, z^{3s}, z^{4s}, \dots, z^{Qs}$ . Por tanto, los únicos elementos distintos de 0 serán  $\gamma(s), \gamma(2s), \gamma(3s), \dots, \gamma(Qs)$ . Fuera de estos, la función de autocovarianza se va a anular. Entonces, la autocovarianza de primer orden se obtiene analizando los elementos que acompañan a  $z^s$ , lo que implica que imponer la restricción  $i = j + 1$ , por tanto:

$$\gamma(s) = \sigma^2 \left( \sum_{i=0}^{Q-1} \Theta_i \Theta_{i+1} \right) = \sigma^2 \left( \sum_{i=1}^Q \Theta_i \Theta_{i-1} \right)$$

Finalmente, la covarianza de orden  $ks$  toma dos posibles valores. Si  $k \leq Q$ , entonces debemos tomar en cuenta aquellos elementos asociados a  $z^{ks}$ , lo que supone centrarnos en aquellos casos en los que se cumple la restricción  $i = j + k$ . Entonces, el término genérico de la autocovarianza es igual a:

$$\gamma(ks) = \sigma^2 \left( \sum_{i=0}^{Q-1} \Theta_i \Theta_{i+k} \right) = \sigma^2 \left( \sum_{i=k}^Q \Theta_i \Theta_{i-k} \right)$$

Si  $k > Q$ , entonces la función de autocovarianza se anula.

Esto nos lleva a que la función de autocorrelación de un proceso estacional de medias móviles adopta la siguiente forma:

$$\rho(ks) = \frac{\gamma(ks)}{\gamma(0)} = \begin{cases} \frac{\sigma^2(\sum_{i=1}^Q \Theta_i \Theta_{i-1})}{\sigma^2(\sum_{i=0}^Q \Theta_i^2)} = \frac{\sum_{i=1}^Q \Theta_i \Theta_{i-1}}{\sum_{i=0}^Q \Theta_i^2} & k \leq q \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (66)$$

Por lo tanto, podemos concluir que la función de autocorrelación de un proceso estacional de medias móviles tiene un comportamiento similar al de un proceso regular de medias móviles, pero con la particularidad de que esta función tan solo muestra valores distintos de 0 en las frecuencias estacionales, esto es, para  $s = 1, 2, \dots, Q$ . El resto de los coeficientes de la función se anulan.

### 7.3 Procesos estacionales mixtos autorregresivos-medias móviles

Finalmente, dentro de los procesos estacionales puros, tenemos que analizar aquel caso en el que se combina un comportamiento autorregresivo con otro de medias móviles. Este es el caso de los procesos mixtos autorregresivos-medias móviles. Un proceso ARMA(P,Q) se define como sigue:

$$y_t = \delta + \Phi_1 y_{t-s} + \Phi_2 y_{t-2s} + \dots + \Phi_p y_{t-ps} + u_t + \Theta_1 u_{t-s} + \Theta_2 u_{t-2s} \\ + \dots + \Theta_q u_{t-Qs}$$

lo que en notación matricial se representa como sigue:

$$\Phi_P(L^s) y_t = \delta + \Theta_Q(L^s) u_t$$

donde  $\Phi_P(L^s)$  y  $\Theta_Q(L^s)$  son sendos polinomios de retardos que fueron de nidos con anterioridad. Tal y como efectuamos en el caso de procesos estacionales autorregresivos, hemos de imponer la restricción de que todas las raíces del polinomio  $\Phi_P(L^s)$  estén fuera del círculo unidad para asegurar que el proceso es estacionario. Igualmente, suponemos que todas las raíces del polinomio  $\Theta_Q(L^s)$  están fuera del círculo unidad para admitir que este proceso es invertible. Por último, suponemos que los dos polinomios de retardos no tienen factores comunes entre sí.

Bajo estas condiciones, podemos expresar el proceso de la siguiente manera:

$$y_t = \frac{\delta}{\Phi_P(L^s)} + \frac{\Theta_Q(L^s)}{\Phi_P(L^s)} u_t = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 - \Phi_2 - \dots - \Phi_P} + \Psi(L^s) u_t$$

donde  $\Psi(L^s) = \frac{\Theta_Q(L^s)}{\Phi_P(L^s)}$  es un polinomio de retardos de orden infinito. La media poblacional del proceso es muy sencilla de calcular ahora ya que:

$$E(y_t) = E\left(\frac{\delta}{1 - \Phi_1 - \Phi_2 - \dots - \Phi_P} + \Psi(L^s) u_t\right) \\ = E\left(\frac{\delta}{1 - \Phi_1 - \Phi_2 - \dots - \Phi_P}\right) + \Psi(L^s)E(u_t) \\ = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 - \Phi_2 - \dots - \Phi_P} = \frac{\delta}{\Phi_P(1)}$$

Obtener la expresión genérica de la función de autocovarianzas no resulta sencillo, aunque existen algunos rasgos característicos que sí es posible reseñar. A partir de la función generatriz de autocovarianzas, sabemos que:

$$G(z) = \sigma^2 \Psi(z) \Psi(z^{-1}) = \sigma^2 \frac{\Theta_Q(z)}{\Phi_P(z)} \frac{\Theta_Q(z^{-1})}{\Phi_P(z^{-1})}$$

Dado que  $\frac{1}{\Phi_P(z)}$  es un polinomio de retardos de orden infinito, esto asegura que la función de autocovarianzas tendrá infinitos valores distintos de

0. Además, como todas las raíces del polinomio  $\Phi_P(L^s)$  están fuera del círculo unidad, podemos afirmar también que la función de autocovarianzas tiende hacia 0. Otra de las peculiaridades de esta función de autocovarianzas es el hecho de que la parte de medias móviles sólo interviene en la forma que adopta esta función hasta el  $Qs$ -ésimo coeficiente de la función. Para ordenes de covarianza superiores, la función de autocovarianzas tan sólo depende del proceso autorregresivo. Para comprender este extremo basta con tener en cuenta que el producto de los polinomios  $\Theta_Q(z)\Theta_Q(z^{-1})$  es igual a  $\sum_{i=0}^Q \Theta_i \sum_{j=0}^Q \Theta_j z^{(i-j)s}$ . Por tanto, tenemos un polinomio de orden  $z^{Qs}$ , lo que implica que los términos de  $z^k$ ,  $k > Qs$  no aparecen en el polinomio.

A modo de ejemplo, vamos a estudiar el caso de un proceso  $ARMA(1, 1)_s$ . Este proceso se define así:

$$y_t = \delta + \Phi_1 y_{t-s} + u_t + \Theta_1 u_{t-s}$$

lo que supone que los polinomios de retardos toman la forma  $\Phi_P(L^s) = (1 - \Phi_1 L^s)$  y  $\Theta_Q(L^s) = (1 + \Theta_1 L^s)$ . Entonces, la función generatriz de autocovarianzas es igual a:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sigma^2 \frac{\Theta_Q(z) \Theta_Q(z^{-1})}{\Phi_P(z) \Phi_P(z^{-1})} = \sigma^2 \Phi_P^{-1}(z) \Phi_P^{-1}(z^{-1}) \Theta_Q(z) \Theta_Q(z^{-1}) \\ &= \sigma^2 \left(1 + \Phi_1 z^s + \Phi_1^2 z^{2s} + \dots\right) \left(1 + \Phi_1 z^{-s} + \Phi_1^2 z^{-2s} + \dots\right) \\ &\quad \times \left(1 + \Theta_1 z^s\right) \left(1 + \Theta_1 z^{-s}\right) \\ &= \sigma^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_1^{i+j} z^{(-i+j)s}\right) \left(1 + \Theta_1 z^s + \Theta_1 z^{-s} + \Theta_1^2\right) \end{aligned}$$

La varianza del proceso se obtiene a partir de los coeficientes asociados a los términos de  $z$  que tiene exponente 0. Estos términos se obtienen directamente en el segundo paréntesis. En el primer paréntesis cuando  $i=j$  también aparecen términos en  $z^0$ . Adicionalmente, debemos tener en cuenta que los términos en  $z^{-s}$  del primer paréntesis al multiplicarse por los términos  $z^s$  del segundo, resultan en términos en  $z^0$ , por lo que han de considerarse a la hora de calcular la varianza del proceso. Con toda esta información, podemos transformar la función generatriz de autocovarianzas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} G(z) &= \sigma^2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} + \Phi_1 z^s \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} + \Phi_1 z^{-s} \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} + \dots \right) \\ &\quad \times \left(1 + \Theta_1 z^s + \Theta_1 z^{-s} + \Theta_1^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \left[ (1 + \Theta_1^2) \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} + \Phi_1 \Theta_1 \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} + \Phi_1 \Theta_1 \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} \right] + \text{resto de } \dots \text{ términos} \\
&= \sigma^2 \left[ (1 + \Theta_1^2) + 2\Phi_1 \Theta_1 \right] \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} + \text{resto de } \dots \text{ términos}
\end{aligned}$$

Entonces, es sencillo probar que la varianza poblacional es igual a:

$$\gamma(0) = \sigma^2 \left[ (1 + \Theta_1^2) + 2\Phi_1 \Theta_1 \right] \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} = \sigma^2 \frac{1 + \Theta_1^2 + 2\Phi_1 \Theta_1}{1 - \Phi_1^2}$$

Para obtener la covarianza de primer orden debemos buscar los términos que acompañan a  $z$ . Para ello debemos considerar todos los términos en  $z_0$ ,  $z_1$  y  $z_2$  del polinomio autorregresivo. Transformando la función generatriz, esta queda ahora de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sigma^2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^2 \Phi_1^{2i+|j|} z^{js} + \text{resto de } \dots \text{ términos} \right) (1 + \Theta_1 z^s + \Theta_1 z^{-s} + \Theta_1^2) \\
&= \sigma^2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} \Theta_1 z + (1 + \Theta_1^2) \Phi_1 \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} z + \Phi_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} z^2 \Theta_1 z^{-1} \right) \\
&\quad \left| + \text{resto de } \dots \text{ términos} \right) \\
&= \sigma^2 \left( \Theta_1 \Phi_1^2 + (1 + \Theta_1^2) \Phi_1 + \Theta_1 \right) \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} z + \text{resto de } \dots \text{ términos}
\end{aligned}$$

A partir de este resultado, resulta inmediato comprobar que la autocovarianza de primer orden es igual a:

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= \sigma^2 \left[ \Theta_1 \Phi_1^2 + (1 + \Theta_1^2) \Phi_1 + \Theta_1 \right] \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^{2i} \\
&= \sigma^2 \frac{\Theta_1 \Phi_1^2 + (1 + \Theta_1^2) \Phi_1 + \Theta_1}{1 - \Phi_1^2} \\
&= \sigma^2 \frac{(1 + \Theta_1 \Phi_1) (\Theta_1 + \Phi_1)}{1 - \Phi_1^2}
\end{aligned}$$

resultado que es similar al que obtuvimos para el caso no estacional.

## 8 Procesos multiplicativos

En las dos secciones anteriores hemos considerado aquellos casos en los que los procesos estocásticos seguían unas pautas de comportamiento en la parte

regular o en la parte estacional. No teníamos en cuenta que es posible que la parte regular y la parte estacional pueden estar condicionando el proceso al mismo tiempo. Para permitirlo, en esta sección vamos a presentar un nuevo tipo de procesos estocásticos que engloba como casos particulares a todos los que hemos estudiado con anterioridad. Un proceso  $ARMA(p, q) \times ARMA(P, Q)_s$  multiplicativo se define de la siguiente manera:

$$\Phi_P(L^s) \phi_p(L) y_t = \delta + \Theta_Q(L^s) \theta_q(L^s) u_t$$

donde  $\Phi_P(L^s)$ ,  $\Phi_p(L)$ ,  $\Theta_Q(L^s)$  y  $\Theta_q(L^s)$  son los diferentes polinomios de retardos que hemos analizado en las secciones precedentes.  $\delta$  es un parámetro y  $u_t$  es un ruido blanco. Asumimos todas las restricciones impuestas sobre los modelos anteriores, por lo que todas las raíces de los polinomios de retardos se sitúan fuera del círculo unidad. Por tanto, el proceso es estacionario e invertible tanto en la parte regular como en la estacional.

El proceso se puede reparametrizar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{\delta}{\Phi_P(L^s) \phi_p(L)} + \frac{\Theta_Q(L^s) \theta_q(L^s)}{\Phi_P(L^s) \phi_p(L)} u_t = \\ &= \frac{\delta}{\Phi_P(1) \Phi_p(1)} + \Upsilon(L) u_t \end{aligned}$$

siendo  $\Upsilon(L) = \frac{\Theta_Q(L^s) \theta_q(L^s)}{\Phi_P(L^s) \phi_p(L)}$ . Ahora, la media poblacional del proceso es sencilla de obtener:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E\left(\frac{\delta}{\Phi_P(1) \Phi_p(1)} + \Upsilon(L) u_t\right) \\ &= \frac{\delta}{\Phi_P(1) \Phi_p(1)} + \Upsilon(L) E(u_t) = \frac{\delta}{\Phi_P(1) \Phi_p(1)} \\ &= \frac{\delta}{(1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p)(1 - \Phi_1 - \Phi_2 - \dots - \Phi_P)} \end{aligned}$$

por lo que esta media solo depende del término independiente del proceso y de los parámetros de los dos polinomios autorregresivos.

El cálculo de la función de autocovarianza y de la función de autocorrelación puede ser una tarea bastante complicada, por lo tediosa. NO vamos a incluirlas aquí. Simplemente, señalar que en Peña (1979) se intenta aproximar una función que nos permita calcular los valores de la función de autocorrelación para un modelo multiplicativo general. Esta aproximación viene dada por:

$$\rho_\tau^T \simeq \rho_\tau + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{si}^s (\rho_{\tau+si} + \rho_{si-\tau})$$

donde  $\rho_j^T$ ,  $\rho_j$  y  $\rho_{ji}^s$  representan el j-ésimo coeficiente de autocorrelación de un proceso  $ARMA(p, q) \times ARMA_s(P, Q)$ , de proceso  $ARMA(p, q)$  y de un proceso  $ARMA_s(P, Q)$ , respectivamente.

Sin embargo, en este trabajo también se reconoce que los patrones de comportamiento de la función de autocorrelación de un modelo multiplicativo son bastante difíciles de determinar, sobre todo cuando el proceso tiene parte autorregresiva. Mucho más sencillo es el caso en el que sólo aparece comportamiento de medias móviles. En este caso, a partir de la función generatriz es mucho más sencillo establecer cuál es la función de autocovarianzas. Así, si suponemos que tenemos un modelo  $MA(1) \times MA(1)$ , que se puede representar así:

$$y_t = \delta + (1 + \Theta_1 L^s)(1 + \theta_1 L) u_t$$

La función generatriz de autocovarianzas queda definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sigma^2 (1 + \Theta_1 z^s)(1 + \theta_1 z)(1 + \Theta_1 z^{-s})(1 + \theta_1 z^{-1}) \\ &= \sigma^2 (1 + \Theta_1 z^s + \theta_1 z + \theta_1 \Theta_1 z^{s+1})(1 + \Theta_1 z^{-s} + \theta_1 z^{-1} + \theta_1 \Theta_1 z^{-(s+1)}) \\ &= \sigma^2 (1 + \Theta_1 z^s + \theta_1 z + \theta_1 \Theta_1 z^{s+1} \\ &\quad + \Theta_1 z^s + \Theta_1^2 + \Theta_1 \theta_1 z^{s-1} + \theta_1 \Theta_1^2 z^{-1} \\ &\quad + \theta_1 z + \theta_1 \Theta_1 z^{-s+1} + \theta_1^2 + \theta_1^2 \Theta_1 z^{-s} \\ &\quad + \theta_1 \Theta_1 z^{s+1} + \theta_1 \Theta_1^2 z + \theta_1^2 \Theta_1 z^s + \theta_1^2 \Theta_1^2) \end{aligned}$$

A partir de esta expresión, la función de autocovarianzas es igual a:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \sigma^2 (1 + \Theta_1^2 + \theta_1^2 + \theta_1^2 \Theta_1^2) = \sigma^2 [1 + \theta_1^2 + \Theta_1^2 (1 + \theta_1^2)] = \\ &= \sigma^2 (1 + \theta_1^2)(1 + \Theta_1^2) \end{aligned}$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 (\theta_1 + \theta_1 \Theta_1^2) = \sigma^2 \theta_1 (1 + \Theta_1^2)$$

$$\gamma(s-1) = \sigma^2 \Theta_1 \theta_1$$

$$\gamma(s) = \sigma^2 \Theta_1 (1 + \theta_1^2)$$

$$\gamma(s+1) = \sigma^2 \Theta_1 \theta_1$$

Por tanto, la función de autocorrelación adopta la siguiente forma:

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} \frac{\sigma^2 \theta_1 (1 + \Theta_1^2)}{\sigma^2 (1 + \theta_1^2) (1 + \Theta_1^2)} = \frac{\theta_1}{(1 + \theta_1^2)} & k = 1 \\ \frac{\sigma^2 \Theta_1 (1 + \theta_1^2)}{\sigma^2 (1 + \theta_1^2) (1 + \Theta_1^2)} = \frac{\Theta_1}{(1 + \Theta_1^2)} & k = s \\ \frac{\sigma^2 \Theta_1 \theta_1}{\sigma^2 (1 + \theta_1^2) (1 + \Theta_1^2)} = \frac{\Theta_1 \theta_1}{(1 + \theta_1^2) (1 + \Theta_1^2)} & k = |s - 1| \\ = \rho(1) \rho(s) & \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Para otro tipo de modelos la forma de proceder es idéntica. También se puede utilizar la fórmula de Peña (1979)

## REFERENCIAS

Aznar, A. y F. J. Trávez (1993). Métodos de predicción en economía. Ed. Ariel.

Peña, D. (1979). Interacción en la identificación de los modelos ARIMA univariantes. Cuadernos Económicos del ICE, 11-12, 9-35.

Peña, D. (1989) Estadística: Modelos y métodos. Ed. Alianza Universidad Textos.

Slutsky.

Uriel, E. (1985). Análisis de Series Temporales. Modelos ARIMA. Ed. Paraninfo. Madrid.

Wold, H. (1938). A Study in the Analysis of Stationary Time Series. Almqvist and Wicksell. Upsala

Yule, G.U. (1921). On the time-correlation problems with special reference to the variate difference correlation method. Journal of Royal Statistical Society 84, 497-526.