Tema 3. Métodos paramétricos:Tendencias y ciclos

4^o LADE

Antonio Montañés Bernal

Universidad de Zaragoza

Noviembre 2008

1. Introducción

- Hasta ahora hemos utilizado diversas técnicas de predicción, pero en ningún caso nos hemos preocupado de la estructura que existía detras de las variables analizadas.
- ¿Es interesante hacerlo?
- La respuesta es que sí... siempre que seamos capaces de especificar correctamente el modelo o la estructura que gobierna el comportamiento de las variables que vamos a analizar.

1. Introducción

- ¿Por qué es interesante determinar la estructura que hay detrás de las variables?
  - Si queremos predecir, parece aconsejable intentar aproximarnos al verdadero PGD
  - Desde el punto de vista económico podemos llegar a interpretaciones radicalmente distintas sobre la evolución de una variable atendiendo a sus propiedades temporales.
  - Al asumir que las variables siguen ciertas distribuciones, podemos realizar contrastes de hipótesis, incluso realizar predicciones por intervalo.
- ¿Qué tipo de estructuras vamos a considerar? De momento, vamos a continuar con el supuesto de que las variables pueden contener componente tendecial, cíclico, estacional e irregular. El problema es que, ahora, cada uno de estos componentes se puede modelizar de diversas maneras, por lo que nos vamos a enfrentar a diversos modelos competitivos entre sí y habrá que seleccionarlos.

1. Introducción

ESQUEMA

1. Introducción

ESQUEMA

1. Introducción
2. Conceptos Básicos
   Estacionariedad, ARMA
   Orden de integración
   Ciclo-Tendencia

ESQUEMA

1. Introducción
2. Conceptos Básicos
   - Estacionariedad, ARMA
   - Orden de integración
   - Ciclo-Tendencia
3. Tendencias deterministas vs. estocásticas

1. Introducción

ESQUEMA

1. Introducción
2. Conceptos Básicos
   Estacionariedad, ARMA
   Orden de integración
   Ciclo-Tendencia
3. Tendencias deterministas vs. estocásticas
4. Contrastes de raiz unitaria
   Dickey-Fuller
   Phillips-Perron

ESQUEMA

1. Introducción
2. Conceptos Básicos
   - Estacionariedad, ARMA
   - Orden de integración
   - Ciclo-Tendencia
3. Tendencias deterministas vs. estocásticas
4. Contrastes de raiz unitaria
   - Dickey-Fuller
   - Phillips-Perron
5. Predicción

Definition

Denominamos **proceso estocástico** a una sucesión de variables aleatorias ordenadas en el tiempo. $\{y_t\}$, $t = -\infty, ..., -2,\ -1,\ 0, 1, 2, ..., \infty$.

Cada una de estas variables tiene su propia función de distribución. Existen muchos tipos de procesos estocásticos. Pongamos algunos ejemplos

2. Conceptos básicos

Definition

Se llama **ruido blanco** a un proceso estocástico que se distribuye con media 0, varianza constante y finita y la distribución es independiente.

$$E\left(u_t\right) = 0$$

$$Var\left(u_t\right) = \sigma^2$$

$$E\left(u_i\, u_j\right) = 0, \;\; \forall i \neq j$$

Definition

Un **paseo aleatorio** es un proceso estocástico distribuido de la siguiente manera:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

siendo ε_t un ruido blanco.

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t = y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

donde, sin perdida de generalidad, hemos supuesto que $y_o = 0$.
El valor de y_t no es sino una acumulación de los valores de las perturbaciones aleatorias de ahí el nombre de paseo aleatorio.

- Persistencia

Definition

Un **paseo aleatorio con deriva** se define

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2}$$

donde ε_t es un ruido blanco y μ es un parámetro constante

- ¿En qué se diferencia esenciamente del proceso anterior ? en la presencia de una tendencia

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t = \mu + (\mu + y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= y_{t-2} + 2\mu + \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i = \mu\, t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \end{aligned} \tag{3}$$

Definition

Un proceso estocástico es **estacionario en sentido estricto** si se cumple que:

$$F\left(y_1, y_{2,} \dots, y_m\right) = F\left(y_{k+1}, y_{k+2,} \dots, y_{k+m}\right)$$

donde m y k son sendos enteros.

2. Conceptos básicos

Definition

Un proceso estocástico $\{y_t\}$ es **estacionario en sentido débil** si se cumple que:

$$E\left(y_t\right) = \mu \quad \forall t$$

$$Var\left(y_t\right) = \sigma^2 \quad \forall t$$

$$Cov\left(y_i, y_j\right) = Cov\left(y_{k+i}, y_{k+j}\right) = \gamma\left(i-j\right) = \gamma\left(j-i\right), \ \forall i \neq j$$

siendo μ y σ^2 sendos parámetros y siendo k un número entero

Existe una relación directa entre ambos conceptos de estacionariedad. Así, si imponemos la restricción de que el proceso es generado por una distribución normal, entonces resulta inmediatio verificar que la estacionariedad débil implica estacionariedad fuerte.

$$\left.\begin{array}{c}\text{ESTACIONARIEDAD DÉBIL}\\ + \\ \text{NORMALIDAD}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ESTACIONARIEDAD FUERTE}$$

¿Por qué?

2. Conceptos básicos

Definition

Un **proceso ARMA(p,q)** se define de la siguiente manera:

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + ... + \theta_q u_{t-q}$$

siendo u un ruido blanco.

De forma compacta el modelo anterior se puede expresar como:

$$\left(1 - \phi_1 L - ... - \phi_p L^p\right) y_t = \delta + \left(1 + \theta_1 L + ... + \theta_q L^p\right) u_t$$

donde L es el operador matemático de retardos, tal que $L^d x_t = x_{t-d}$

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso MA(1) $y_t = \delta + u_t + \theta_1 u_{t-1}$

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso MA(1) $y_t = \delta + u_t + \theta_1 u_{t-1}$
3. Es estacionario
   $E(y_t) = \delta$
   $Var(y_t) = (1 + \theta_1^2)\, \sigma_u^2 = \gamma(0)$
   La función de autocovarianzas es igual a $\gamma(1) = \theta_1\, \sigma_u^2$ y 0 para el resto

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso MA(1) $y_t = \delta + u_t + \theta_1 u_{t-1}$
3. Es estacionario
   $E(y_t) = \delta$
   $Var(y_t) = (1 + \theta_1^2)\ \sigma_u^2 = \gamma(0)$
   La función de autocovarianzas es igual a $\gamma(1) = \theta_1\ \sigma_u^2$ y 0 para el resto
4. Sólo es invertible si $|\theta_1| < 1$

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso MA(1) $y_t = \delta + \; u_t + \theta_1 u_{t-1}$
3. Es estacionario
   $E(y_t) = \delta$
   $Var(y_t) = (1+\theta_1^2)\ \sigma_u^2 = \gamma(0)$
   La función de autocovarianzas es igual a $\gamma(1) \; = \theta_1 \ \sigma_u^2$ y 0 para el resto
4. Sólo es invertible si $|\theta_1| < 1$

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso MA(1) $y_t = \delta + \ u_t + \theta_1 u_{t-1}$
3. Es estacionario
   $E(y_t) = \delta$
   $Var(y_t) = (1 + \theta_1^2)\ \sigma_u^2 = \gamma(0)$
   La función de autocovarianzas es igual a $\gamma(1)\ = \theta_1\ \sigma_u^2$ y 0 para el resto
4. Sólo es invertible si $|\theta_1| < 1$

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?
- ¿Tiene sentido económico? ¿Para qué valores del parámetro θ_1?

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso AR(1) $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \; u_t$

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso AR(1) $y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t$
3. No siempre es estacionario, sólo si $|\phi_1| < 1$.Bajo este supuesto de estacionariedad
   $E(y_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1}$
   $Var(y_t) = \frac{\sigma_u^2}{1-\phi_1^2} = \gamma(0)$
   $Cov(y_t, y_{t-i}) = \phi_1^i \gamma(0)$

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso AR(1) $y_t = \delta + \phi_1\, y_{t-1} + \ u_t$
3. No siempre es estacionario, sólo si $|\phi_1| < 1$.Bajo este supuesto de estacionariedad
   $E(y_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1}$
   $Var(y_t) = \frac{\sigma_u^2}{1-\phi_1^2} = \gamma(0)$
   $Cov(y_t, y_{t-i}) = \phi_1^i \gamma(0)$

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso AR(1) $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \; u_t$
3. No siempre es estacionario, sólo si $|\phi_1| < 1$.Bajo este supuesto de estacionariedad
   $E(y_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1}$
   $Var(y_t) = \frac{\sigma_u^2}{1-\phi_1^2} = \gamma(0)$
   $Cov(y_t, y_{t-i}) = \phi_1^i \gamma(0)$

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?
- ¿Tiene sentido económico?

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \; u_t$. Si $\phi_1 > 1$, ¿qué sucede entonces?

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \; u_t$. Si $\phi_1 > 1$, ¿qué sucede entonces?

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso $y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t$. Si $\phi_1 > 1$, ¿qué sucede entonces?

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?
- ¿Tiene sentido económico?

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso $y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t$. Si $\phi_1 = 1$, entonces
   $E(yt) = \delta t$
   $Var(y_t) = t\ \sigma_u^2$

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \; u_t$. Si $\phi_1 = 1$, entonces
   $E(yt) = \delta t$
   $Var(y_t) = t \; \sigma_u^2$

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?

2. Conceptos básicos

1. Casos particulares de interés.
2. Proceso $y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \, u_t$. Si $\phi_1 = 1$, entonces
   $E(yt) = \delta t$
   $Var(y_t) = t \, \sigma_u^2$

- ¿Cuál es el efecto de un shock? ¿Cuánto tiempo dura?
- ¿Tiene sentido económico?

2. Conceptos básicos

Definition

Un proceso es integrado de orden d cuando es necesario diferenciarlo d veces para que sea estacionario. Esto se representa como $y_t \sim I(d)$.

De acuerdo con esta definición, si tenemos una variable y_t integrada de orden d, entonces la variable $z_t = (1 - L)^d y_t$ será estacionaria

2. Conceptos básicos

- Relación con el concepto de raíz unitaria:

$$y_t = \delta + y_{t-1} + u_t \Rightarrow (1 - L)y_t = \delta + u_t$$

- Si tomamos el polinomio como una ecuación, ¿cuál es su solución característica?

$$(1 - L^*) = 0 \Rightarrow L^* = 1$$

- Orden de integración≡número de raíces unitarias.

2. Conceptos básicos

Definition

Un **proceso ARIMA(p,d,q)** se define de la siguiente manera:

$$(1-L)^d \; y_t = \delta + \phi_1 \, y_{t-1} + \ldots + \phi_p \, y_{t-p} + \; u_t + \theta_1 \, u_{t-1} + \; \ldots + \theta_q \, u_{t-q}$$

siendo u un ruido blanco.

De forma compacta el modelo anterior se puede expresar como:

$$\left(1 - \phi_1 \, L - \ldots - \phi_p \, L^p\right) (1-L)^d \, y_t = \delta + \; (1 + \theta_1 L + \ldots + \theta_q L^q) \, u_t$$

donde $(1-L)^d$ es el operador matemático de diferencias, tal que $(1-L)x_t = x_t - x_{t-1}$

El polinomio $\left(1 - \phi_1 \, L - \ldots - \phi_p \, L^p\right)$ tiene sus raíces fuera círculo unidad

El polinomio $(1 + \theta_1 L + \ldots + \theta_q L^q)$ tiene sus raíces fuera círculo unidad

Otro proceso que puede ser de gran interés es el siguiente:

$$y_t = \mu + \beta \ t + u_t$$

donde u_t sigue un proceso ARMA estacionario e invertible.
Este proceso...

- presenta tendencia lineal de naturaleza determinista (TS)
- es no estacionario
- guarda ciertas similitudes con un paseo aleatorio con deriva... ¿Pero son realmente tan parecidos?

3. Tendencia determinista vs. estocástica

	DS	TS
¿Cuanto dura el efecto de un shock?	Permanente	Transitorio
Estacionario	No	No
Integrado	Sí	No
Como se hace estacionario	Diferenciando	Quitando tendencia
Se anula la FAC	∞	∞
Cambian las propiedades MCO	Sí	Esencialmente no

En el caso más sencillo, el estadístico de Dickey-Fuller se obtiene a partir de la estimación del modelo:

$$y_t = \rho\, y_{t-1} + u_t \tag{4}$$

Asumimos que u es un ruido blanco.
La hipótesis nula de interés es H$_o$:$\rho = 1$
Podemos utilizar dos tipos de estadísticos:

- El pseudo t-ratio $\tau = \frac{\hat{\rho}-1}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}}$
- El estimador normalizado: $T\left(\hat{\rho}-1\right)$

Ninguno de ellos converge hacia una distriución estándar

El estadístico anterior converge hacia:

$$\tau = \frac{\hat{\rho} - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}} \Rightarrow \frac{\int_0^1 W(r)\ dW(r)}{\sqrt{\int_0^1 W(r)^2\ dr}} = \frac{\frac{1}{2}\ \left[W(1)^2 - 1\right]}{\sqrt{\int_0^1 W(r)^2\ dr}} \tag{5}$$

donde W(r) es un proceso de Wiener.
Qué es esto?

- ¿ Es la única especificación para determinar la presencia de una raíz unitaria ?

- ¿ Es la única especificación para determinar la presencia de una raíz unitaria ?
- $$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + u_t$$

- ¿ Es la única especificación para determinar la presencia de una raíz unitaria ?
- $$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + u_t$$
- Modelo bajo la hipótesis nula: $y_t = y_{t-1} + u_t$

- ¿ Es la única especificación para determinar la presencia de una raíz unitaria ?
- $$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + u_t$$
- Modelo bajo la hipótesis nula: $y_t = y_{t-1} + u_t$
- Modelo bajo la hipótesis alternativa: $y_t = \mu + v_t$, v_t es un ARMA invertible y estacionario.

- ¿ Es la única especificación para determinar la presencia de una raíz unitaria ?
- $$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + u_t$$
- Modelo bajo la hipótesis nula: $y_t = y_{t-1} + u_t$
- Modelo bajo la hipótesis alternativa: $y_t = \mu + v_t$, v_t es un ARMA invertible y estacionario.
- Podemos contrastar la hipótesis nula H_o; $\rho = 1$, $\tau_\mu = \frac{\hat{\rho}-1}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}}$

- ¿ Es la única especificación para determinar la presencia de una raíz unitaria ?
- $$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + u_t$$
- Modelo bajo la hipótesis nula: $y_t = y_{t-1} + u_t$
- Modelo bajo la hipótesis alternativa: $y_t = \mu + v_t$, v_t es un ARMA invertible y estacionario.
- Podemos contrastar la hipótesis nula H_o; $\rho = 1$, $\tau_\mu = \frac{\hat{\rho}-1}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}}$
- $$\tau_\mu \Rightarrow \frac{\int_0^1 W^*(r)\, dW^*(r)}{\sqrt{\int_0^1 W^*(r)^2\, dr}}$$
  donde W^* representa la proyección de un proceso de Wiener sobre el espacio $\{1\}$

- ¿ Es la única especificación para determinar la presencia de una raíz unitaria ?

- ¿ Es la única especificación para determinar la presencia de una raíz unitaria ?
- $$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + \beta\ t + u_t$$

- ¿ Es la única especificación para determinar la presencia de una raíz unitaria ?
- $$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + \beta\ t + u_t$$
- Modelo bajo la hipótesis nula: $y_t = \mu + \ y_{t-1} + u_t$

- ¿ Es la única especificación para determinar la presencia de una raíz unitaria ?
- $$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + \beta\ t + u_t$$
- Modelo bajo la hipótesis nula: $y_t = \mu + \ y_{t-1} + u_t$
- Modelo bajo la hipótesis alternativa:
  $y_t = \mu + \beta\ t + v_t, \quad v_t$ es un ARMA invertible y estacionario.

4. Contrastes de raíz unitaria

4.1. Dickey-Fuller

- ¿ Es la única especificación para determinar la presencia de una raíz unitaria ?
- $$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + \beta\ t + u_t$$
- Modelo bajo la hipótesis nula: $y_t = \mu + \ y_{t-1} + u_t$
- Modelo bajo la hipótesis alternativa:
  $y_t = \mu + \beta\ t + v_t,\quad v_t$ es un ARMA invertible y estacionario.
- Podemos contrastar la hipótesis nula H_o: $\rho\ = 1$, $\tau_\tau = \frac{\hat{\rho}-1}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}}$

- ¿ Es la única especificación para determinar la presencia de una raíz unitaria ?
- $$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + \beta\ t + u_t$$
- Modelo bajo la hipótesis nula: $y_t = \mu + y_{t-1} + u_t$
- Modelo bajo la hipótesis alternativa:
  $y_t = \mu + \beta\ t + v_t$, v_t es un ARMA invertible y estacionario.
- Podemos contrastar la hipótesis nula H$_o$: $\rho = 1$, $\tau_\tau = \frac{\hat{\rho}-1}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}}$
- $$\tau_\tau \Rightarrow \frac{\int_0^1 \tilde{W}(r)\ d\tilde{W}(r)}{\sqrt{\int_0^1 \tilde{W}(r)^2\ dr}}$$
  donde $\tilde{W}$ representa la proyección de un proceso de Wiener sobre el espacio {1,t}

1. ¿Cómo podemos elegir entre las tres especificaciones ?
$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + \beta\, t + u_t$
$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + u_t$
$y_t = \rho\, y_{t-1} + u_t$

- Existe pseudo t y F-ratios para contrastar la significatividad de los parámetros de los elementos deterministas.

1. ¿Cómo podemos elegir entre las tres especificaciones ?
   $y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + \beta\ t + u_t$
   $y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + u_t$
   $y_t = \rho\, y_{t-1} + u_t$

- Existe pseudo t y F-ratios para contrastar la significatividad de los parámetros de los elementos deterministas.
- ¿Qué dice la teoría económica sobre esa variable?

1. ¿Cómo podemos elegir entre las tres especificaciones ?
$$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + \beta\ t + u_t$$
$$y_t = \mu + \rho\, y_{t-1} + u_t$$
$$y_t = \rho\, y_{t-1} + u_t$$

- Existe pseudo t y F-ratios para contrastar la significatividad de los parámetros de los elementos deterministas.
- ¿Qué dice la teoría económica sobre esa variable?
- Ejemplo: PIB, tipo de cambio real, tipo de interés....

Qué pasa si la variable no sigue sigue un AR(1), sino otro de orden superior

- El pseudo t-ratio no converge hacia la distribución que hemos calculado
- El estimador normalizado hay que redefinirlo
- En síntesis, debemos adaptar los estadísticos a la nueva situación. ¿Cómo?

- Supongamos que la variable y_t sigue un proceso, por ejemplo, autorregresivo de orden 2.

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi_1\, y_{t-1} + \phi_2\, y_{t-2} + u_t \\
&= \phi_1\, y_{t-1} + \phi_2\, y_{t-2} + \phi_2 \Delta y_{t-1} - \phi_2 \Delta y_{t-1} + u_t \\
&= (\phi_1 + \phi_2)\ y_{t-1} + (-\phi_2)\, \Delta y_{t-1} + u_t \ \Rightarrow \\
y_t &= \rho\, y_{t-1} + \varphi_1\, \Delta y_{t-1} + u_t
\end{aligned}
$$

- Sólo debemos añadir un término $(\varphi_1\, \Delta y_{t-1})$ a la especificación inicial.
- Si el proceso es AR(p), entonces tenemos que estimar el modelo:

$$y_t = \rho\, y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \varphi_i\, \Delta y_{t-i} + u_t$$

- el pseudo t-ratio converge a la misma distribución

- ¿Si la perturbación tiene parte MA, entonces qué hacemos?

- ¿Si la perturbación tiene parte MA, entonces qué hacemos?
- Como un MA(q) invertible tiene representación AR(∞), entonces podemos estimar

$$y_t = \rho\, y_{t-1} + \sum_{i=1}^{\ell} \varphi_i\, \Delta y_{t-i} + u_t$$

- ¿Si la perturbación tiene parte MA, entonces qué hacemos?
- Como un MA(q) invertible tiene representación AR(∞), entonces podemos estimar

$$y_t = \rho\, y_{t-1} + \sum_{i=1}^{\ell} \varphi_i\, \Delta y_{t-i} + u_t$$

- La cuestión ahora es seleccionar un valor del parámetro ℓ razonable.

- ¿Si la perturbación tiene parte MA, entonces qué hacemos?
- Como un MA(q) invertible tiene representación AR(∞), entonces podemos estimar

$$y_t = \rho\, y_{t-1} + \sum_{i=1}^{\ell} \varphi_i\, \Delta y_{t-i} + u_t$$

- La cuestión ahora es seleccionar un valor del parámetro ℓ razonable.
- ¿Qué métodos podemos emplear para ello?

Sabed señora que ademas de una hora,
las siete y media es un juego
Un juego vil, vive Dios
que si juegas mil veces, mil
la mil ves febril que te pasas o no llegas.
Y el no llegar da dolor,
porque implica que mal tasas
y eres del otro deudor.
Mas ay de ti si te pasas,
Si te pasas es peor...

(La venganza de D. Mendo, P. Muñoz Seca)

- Said y Dickey proponen usar $\ell = \sqrt[3]{T}$

- Said y Dickey proponen usar $\ell = \sqrt[3]{T}$
- Schwert sugiere $\ell = Int\left[c\left(\frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{d}}\right]$ donde $c = 12$ y $d = 4$.

- Said y Dickey proponen usar $\ell = \sqrt[3]{T}$
- Schwert sugiere $\ell = Int\left[c\left(\frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{d}}\right]$ donde $c = 12$ y $d = 4$.
- Akaike, $\quad \text{AIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{2k}{T}$

- Said y Dickey proponen usar $\ell = \sqrt[3]{T}$
- Schwert sugiere $\ell = Int\left[c\left(\frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{d}}\right]$ donde $c = 12$ y $d = 4$.
- Akaike, $\mathrm{AIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{2k}{T}$
- Schwarz, $\mathrm{SBIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{k}{T}\ln T$

- Said y Dickey proponen usar $\ell = \sqrt[3]{T}$
- Schwert sugiere $\ell = Int\left[c\left(\frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{d}}\right]$ donde $c = 12$ y $d = 4$.
- Akaike, $\text{AIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{2k}{T}$
- Schwarz, $\text{SBIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{k}{T}\ln T$
- Procedimiento k(t) (Campbell y Perron, 1991)

- Said y Dickey proponen usar $\ell = \sqrt[3]{T}$
- Schwert sugiere $\ell = Int\left[c\left(\frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{d}}\right]$ donde $c = 12$ y $d = 4$.
- Akaike, $\quad \text{AIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{2k}{T}$
- Schwarz, $\quad \text{SBIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{k}{T}\ln T$
- Procedimiento k(t) (Campbell y Perron, 1991)

1. Considerar un valor ℓ_{max}

- Said y Dickey proponen usar $\ell = \sqrt[3]{T}$
- Schwert sugiere $\ell = Int\left[c\left(\frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{d}}\right]$ donde $c = 12$ y $d = 4$.
- Akaike, $\quad \text{AIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{2k}{T}$
- Schwarz, $\quad \text{SBIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{k}{T}\ln T$
- Procedimiento k(t) (Campbell y Perron, 1991)

1. Considerar un valor $\ell_{\max}$
2. Estimar el modelo y comprobar la significatividad del último retardo

- Said y Dickey proponen usar $\ell = \sqrt[3]{T}$
- Schwert sugiere $\ell = Int \left[c \left(\frac{T}{100} \right)^{\frac{1}{d}} \right]$ donde $c = 12$ y $d = 4$.
- Akaike, $\quad AIC = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{2k}{T}$
- Schwarz, $\quad SBIC = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{k}{T} \ln T$
- Procedimiento k(t) (Campbell y Perron, 1991)

1. Considerar un valor ℓ_{max}
2. Estimar el modelo y comprobar la significatividad del último retardo
3. Si es individualmente significativo, deberíamos comenzar el proceso con un valor superior de ℓ_{max}

- Said y Dickey proponen usar $\ell = \sqrt[3]{T}$
- Schwert sugiere $\ell = Int\left[c\left(\frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{d}}\right]$ donde $c = 12$ y $d = 4$.
- Akaike, $AIC = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{2k}{T}$
- Schwarz, $SBIC = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{k}{T}\ln T$
- Procedimiento k(t) (Campbell y Perron, 1991)

1. Considerar un valor ℓ_{max}
2. Estimar el modelo y comprobar la significatividad del último retardo
3. Si es individualmente significativo, deberíamos comenzar el proceso con un valor superior de ℓ_{max}
4. El proceso termina cuando hemos eliminado todos aquellos retardos no significativos

- Said y Dickey proponen usar $\ell = \sqrt[3]{T}$
- Schwert sugiere $\ell = Int\left[c\left(\frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{d}}\right]$ donde $c = 12$ y $d = 4$.
- Akaike, $\quad AIC = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{2k}{T}$
- Schwarz, $\quad SBIC = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{k}{T}\ln T$
- Procedimiento k(t) (Campbell y Perron, 1991)

1. Considerar un valor ℓ_{max}
2. Estimar el modelo y comprobar la significatividad del último retardo
3. Si es individualmente significativo, deberíamos comenzar el proceso con un valor superior de ℓ_{max}
4. El proceso termina cuando hemos eliminado todos aquellos retardos no significativos
5. Resulta aconsejable utilizar un nivel de significación algo permisivo (10%).

- Ng y Perron han propuesto versiones modificadas de los anteriores estadísticos MIC

- Ng y Perron han propuesto versiones modificadas de los anteriores estadísticos MIC
- Modified Akaike, $\quad \text{MIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{2}{T}(k+\omega)$

- Ng y Perron han propuesto versiones modificadas de los anteriores estadísticos MIC
- Modified Akaike, $\mathrm{MIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{2}{T}(k+\omega)$
- Modified Schwarz, $\mathrm{MBIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{\ln T}{T}(k+\omega)$

- Ng y Perron han propuesto versiones modificadas de los anteriores estadísticos MIC
- Modified Akaike, $\text{MIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{2}{T}(k+\omega)$
- Modified Schwarz, $\text{MBIC} = \ln(\tilde{\sigma}^2) + \frac{\ln T}{T}(k+\omega)$
- donde ω se obiene a partir de la estimacion

  de $\triangle y_t = b_o \; y_{t-1} + \sum\limits_{i=1}^{k} b_i \triangle y_{t-i} + e_t$

$$\omega = \hat{b}_o^2 \frac{\sum y_{t-i}^2}{\sigma_e^2}$$

- La anterior corrección es de tipo paramétrico.
- Corregimos los problemas de autocorrelación mediante la inclusión de una serie de retardos que capten la estructura temporal que sigue la perturbación.
- No es la única solución posible.
- Por ejemplo, podemos modificar el pseudo t-ratio de forma que el nuevo estadístico resultante converga hacia la distribución qye hemos calculado con anterioridad.
- Para ello necesitamos conocer la distribución del pseudo t-ratio en presencia de autocorrelación.
- Tambien es posible usar el estimador normalizado.

- Phillips (1986) demuestra que:

$$\tau \Rightarrow \frac{\sigma_u \int_0^1 W(r)\ dW(r)}{\sigma\sqrt{\int_0^1 W(r)^2\ dr}} = \frac{\frac{1}{2}\left[W(1)^2-1\right] + \lambda\ \sigma^{-2}}{\sqrt{\int_0^1 W(r)^2\ dr}} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[W(1)^2-1\right]}{\sqrt{\int_0^1 W(r)^2\ dr}} + \frac{\lambda\ \sigma^{-2}}{\sqrt{\int_0^1 W(r)^2\ dr}}$$

donde $\lambda = \frac{\sigma^2-\sigma_u^2}{2}, \sigma_u^2 = \lim_{T\to\infty} T^{-1}\sum_{i=1}^{T} E\left(e_i^2\right)$ y

$$\sigma^2 = \lim_{T\to\infty} T^{-1} E\left[\left(\sum_{i=1}^{T} e_i\right)^2\right]$$

- Resulta entonces directo demostrar que el estadístico $\tau - \dfrac{\lambda \ \sigma^{-2}}{\sqrt{\int_0^1 W(r)^2 \ dr}}$ converge hacia la distribución del Dickey.Fuller en el caso de no autocorrelación.
- Necesitamos sustituir los valores muestrales anteriores por valores muestrales que convergan hacia ellos.

Phillips-Perron (1988) proponen los siguientes estadísticos
a) Para el caso del modelo (M)

$$Z_t = \frac{s_u}{s}\tau - \frac{1}{2}\frac{s^2 - s_u^2}{s\sqrt{T^{-2}\sum_{i=1}^{T} y_{t-1}^2}}$$

b) para el caso del modelo (Mμ)

$$Z_t = \frac{s_u}{s}\tau - \frac{1}{2}\frac{s^2 - s_u^2}{s\sqrt{T^{-2}\sum_{i=1}^{T}\left(y_{t-1} - \bar{y}_{t-1}\right)^2}}$$

donde $\bar{y}_{t-1} = T^{-1}\sum_{i=1}^{T-1} y_t$

c) Para el caso del modelo (Mτ)

$$Z_t = \frac{s_u}{s}\,\tau - \frac{1}{2}\frac{T^3\left(s^2 - s_u^2\right)}{4\,s\,D_X\sqrt{3}}$$

donde $D_X = Det(X'X)$, con $X=\{1, t, y_{t-1}\}$.

El estadístico $s_u^2 = T^{-1}\sum_{i=1}^{T}\hat{u}_i^2$, siendo $\sum_{i=1i}^{T}\hat{u}_i^2$ la suma residual de cada uno de los anteriores modelos.

Necesitamos un estimador consistente del parametro σ^2.
Existe gran literatura al respecto, por cuanto entronca con un parámetro de gran tradicción en, por ejemplo, análisis espectral.
Podemos pensar en un estimador de este tipo:

$$\hat{S}^2 = \hat{R}_v(0) + 2\sum_{j=1}^{T-1} w(j,m)\hat{R}_v(j),$$

o tambien

$$\hat{S}^2 = T^{-1}\sum_{i=1}^{T} \hat{e}_i^2 + 2\sum_{j=1}^{T-1} w(j,m) \sum_{i=j+1}^{T} \hat{e}_t \ \ \hat{e}_{t-j}$$

$w(j,m)$ es una función de ponderaciones, donde el parámetro m es normalmente denominado bandwidth.
Si la función anterior adopta la forma $w(j,m) = 0$ if $j > m$,donde actua como un parámetro de truncamiento.

Using the notation $x = j/m$, examples of weighting functions are:

1. Bartlett's triangular window:

$$w_{BT}(x) \begin{array}{ll} = 1 - |x| & \text{if } |x| \leq 1 \\ = 0 & \text{otherwise} \end{array}$$

2. Parzen's window:

$$w_{PR}(x) \begin{array}{ll} = 1 - 6x^2 + 6|x|^3 & \text{if } 0 \leq |x| \leq 1/2 \\ = 2(1-|x|)^3 & \text{if } 1/2 \leq |x| \leq 1 \\ = 0 & \text{otherwise} \end{array}$$

3. Quadratic Spectral window:

$$w_{QS}(x) = (\sin(\delta)/\delta - \delta)/(3\delta^2)$$

where $\delta = 6\pi x/5$.

Note that, except for the Quadratic Spectral window, the autocovariances at lags greater than m receive zero weight.

Podemos usar métodos para determinar de forma automática el valor de m. Siguiendo a Andrews (1991)

1. Parzen: $\hat{m}_T = 2.6614(\hat{\alpha}T)^{1/5}$;
2. Tuckey-Hanning: $\hat{m}_T = 1.7462(\hat{\alpha}T)^{1/5}$;
3. Quadratic Spectral: $\hat{m}_T = 1.3221(\hat{\alpha}T)^{1/5}$.

donde $\hat{\alpha}$ puede calcular de la siguiente manera:

$$\hat{v}_{i,t} = \rho_i \hat{v}_{i,t-1} + e_{i,t}$$

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^{p} \frac{4\hat{\rho}_i^2 \hat{\sigma}_i^4}{(1-\hat{\rho}_i)^8} \Big/ \sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\sigma}_i^4}{(1-\hat{\rho}_i)^4}.$$

In general, $k = p$ but if one considers a linear model with a constant included as a regressor, Andrews suggests not to include the component of v_t associated with the constant. The argument is that the estimator is then scale invariant. So here $p = k - 1$.

Recientemente, Ng y Perron (2002) han propuesto un método alternativo para estimar la varianza de largo plazo:

1. Estimar el modelo: $\triangle y_t = b_o \; y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} b_i \; \triangle y_{t-i} \; + e_t$
2. Calcular el estadístico:

$$S_{AR}^2 = \frac{S_{e_k}^2}{\left[1 - \hat{b}(1)\right]^2}$$

donde, a partir de la estimación del modelo anterior, se obtienen $S_{e_k}^2 = T^{-1} \sum_{i=k+1}^{T} \hat{e}_{tk}$ y $\hat{b}(1) = \sum_{i=1}^{k} \hat{b}_i$

- Con todo este arsenal deberíamos poder determinar de forma correcta el orden de integración de una variable.
- Veamos unos sencillos ejemplos

1. Seguro ??????

- Con todo este arsenal deberíamos poder determinar de forma correcta el orden de integración de una variable.
- Veamos unos sencillos ejemplos

1. Seguro ??????
2. Problemas de potencia

- Con todo este arsenal deberíamos poder determinar de forma correcta el orden de integración de una variable.
- Veamos unos sencillos ejemplos

1. Seguro ??????
2. Problemas de potencia
3. Claras distorsiones en el tamaño