Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

PART I
UNIT 1
UNITARY APPROACH: FOUNDATIONS

José Alberto Molina

Grupo de Investigación en Economía de la Población, Mercado de Trabajo y Economía Industrial

Universidad Zaragoza

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

ÍNDICE

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

“Aproximación Unitaria: Fundamentos”

Prof. José Alberto Molina

1. PREFERENCIAS Y FUNCIÓN DE UTILIDAD

Supongamos un individual final de la economía que dispone de una renta monetaria dada y para gastar en un conjunto de n bienes $\mathbf{Q} = (Q_1, ..., Q_n)$.

El individuo toma los precios de los bienes $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$ como dados, tiene libertad plena para adquirir las cantidades que desee de los bienes y no existen costes de transacción.

Dados los precios de los bienes y la renta monetaria, el individuo elegirá el vector concreto de consumo $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n)$, perteneciente al espacio de consumo formado por cantidades no negativas de los n bienes, que maximice su utilidad y no exija un gasto superior a la renta disponible.

Sea $\succsim$ una relación binaria entre vectores de consumo tal que $\mathbf{q}^0 \succsim \mathbf{q}^1$ indica que $\mathbf{q}^0$ es al menos tan satisfactorio para el individuo consumidor como $\mathbf{q}^1$.

Suponemos que las preferencias son de tal tipo que la relación binaria $\succsim$ verifica los siguientes axiomas:

Ax. 1: Completitud:

$$\forall \mathbf{q}^0, \mathbf{q}^1 \in \mathbf{R}^n_+ , \quad \text{ó } \mathbf{q}^0 \succsim \mathbf{q}^1 \text{ y no } \mathbf{q}^1 \succsim \mathbf{q}^0 \leftrightarrow \mathbf{q}^0 \succ \mathbf{q}^1$$

$$\text{ó } \mathbf{q}^1 \succsim \mathbf{q}^0 \text{ y no } \mathbf{q}^0 \succsim \mathbf{q}^1 \leftrightarrow \mathbf{q}^1 \succ \mathbf{q}^0$$

$$\text{ó } \mathbf{q}^0 \succsim \mathbf{q}^1 \text{ y } \mathbf{q}^1 \succsim \mathbf{q}^0 \leftrightarrow \mathbf{q}^0 \sim \mathbf{q}^1$$

es decir, ante dos combinaciones cualesquiera el individuo es capaz de compararlas, esto es, la relación $\succsim$ es completa.

Ax. 2: Reflexividad:

$$\forall \mathbf{q}^0 \in \mathbf{R}^n_+ , \mathbf{q}^0 \succsim \mathbf{q}^0$$

que postula la reflexividad de $\succsim$.

Ax. 3: Transitividad

$$\forall \mathbf{q}^0, \mathbf{q}^1\ \mathbf{q}^2 \in \mathbf{R}^n_+, \mathbf{q}^0 \succsim \mathbf{q}^1 \text{ y } \mathbf{q}^1 \succsim \mathbf{q}^2 \rightarrow \mathbf{q}^0 \succsim \mathbf{q}^2$$

que postula la transitividad de la relación $\succsim$.

Los tres axiomas enunciados garantizan que la relación constituye un preorden completo débil.

Completo por el axioma 1 y débil por admitir la relación de indiferencia entre combinaciones distintas.

Dado cualquier $\mathbf{q}^0$, los axiomas 1 a 3 permiten definir los conjuntos de
no superioridad, $H(\mathbf{q}^0)$ y no inferioridad $B(\mathbf{q}^0)$:

$$H(\mathbf{q}^0) = \{\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n_+ | \ \mathbf{q}^0 \succsim \mathbf{q}\}$$

$$B(\mathbf{q}^0) = \{\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n_+ | \ \mathbf{q} \succsim \mathbf{q}^0\}$$

cuya unión es el conjunto $\mathbf{R}^n_+$ y cuya intersección es el conjunto de vectores indiferentes con $\mathbf{q}^0$:

$$H(\mathbf{q}^0) \cup B(\mathbf{q}^0) = \mathbf{R}^n_+$$

$$H(\mathbf{q}^0) \cap B(\mathbf{q}^0) = \{\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n_+ \mid \mathbf{q} \sim \mathbf{q}^0\} = I(\mathbf{q}^0)$$

es decir, los axiomas postulados permiten, dado un $\mathbf{q}^0$ cualquiera, descomponer $\mathbf{R}^n_+$ en dos conjuntos cuya intersección es el conjunto de indiferencia $I(\mathbf{q}^0)$, denominado curva de indiferencia en el caso bidimensional.

Ax. 4: Monotonía

$$\forall \mathbf{q}^0, \mathbf{q}^1 \in \mathbf{R}_+^n \mathbf{q}^0 > \mathbf{q}^1 \rightarrow \mathbf{q}^0 \succ \mathbf{q}^1$$

es decir, si entre dos vectores uno de ellos tiene al menos un componente mayor y ninguno menor que el otro, el primero será siempre estrictamente preferido al segundo.

Esto significa que el individuo preferirá disponer de mayores cantidades de cualquier bien, lo cual implica la no saturabilidad del consumidor.

Ax. 5: Continuidad

$$\forall \mathbf{q}^0 \in \mathbf{R}_+^n \ \mathrm{H}(\mathbf{q}^0) \text{ y } \mathrm{B}(\mathbf{q}^0)$$

son conjuntos cerrados, lo cual indica que entre dos combinaciones indiferentes, por próximas que se hallen, siempre será posible encontrar otra combinación indiferente con ambas.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

“Aproximación Unitaria: Fundamentos”

Prof. José Alberto Molina

Ax. 6: Convexidad estricta

$$\forall \mathbf{q}^0 \in \mathbf{R}^n_+$$

$$\forall \mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2 \in B(\mathbf{q}^0), \mathbf{q}^1 \;\; \mathbf{q}^2, \forall a \in (0,1), a\mathbf{q}^1 + (1\text{-}a)\mathbf{q}^2 \succ \mathbf{q}^0$$

garantiza que la frontera del conjunto B($\mathbf{q}^0$), es decir, la curva o hipersuperficie de indiferencia, es estrictamente convexa, lo cual impide la existencia de tramos lineales y, consiguientemente, también evita problemas respecto a la existencia de más de una solución al equilibrio del consumidor individual.

Ax. 7: Diferenciabilidad.

La inclinación de I(**q**0) es única en cada punto, de tal forma que se evitan los puntos angulares en las curvas.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

Por último, vamos a formular un axioma que no se refiere a la estructura lógica de las preferencias, sino al criterio de elección del consumidor.

Supongamos que el consumidor sólo puede acceder a las combinaciones pertenecientes a un subconjunto A incluido en $\mathbf{R}^n_+$.

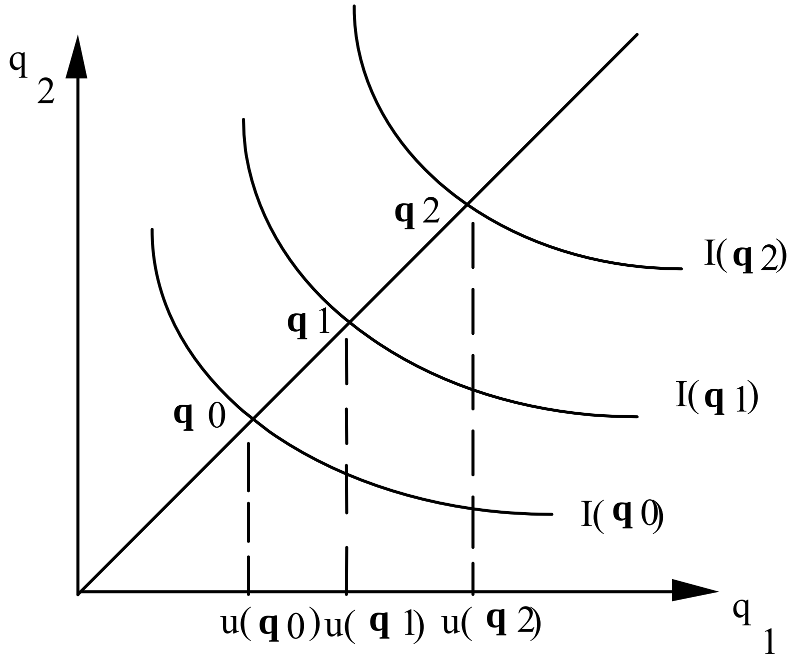
Si entre ellos elige $\mathbf{q}^0$, que denotaremos por E$\mathbf{q}^0$, es porque las restantes combinaciones de A no son preferidas a $\mathbf{q}^0$, es decir:

Ax. 8: Racionalidad.

$$E\mathbf{q}^0 \rightarrow \forall \mathbf{q} \in A: \mathbf{q}^0 \succsim \mathbf{q}$$

Los axiomas 1 a 7 permiten pensar en la construcción de una función matemática que represente las preferencias del individuo.

En el Gráfico aparecen las curvas de indiferencia y la bisectriz, de tal forma que a cada curva le podemos asociar un número real que sea la abscisa:



I(**q**0) ↔u(**q**0), I(**q**1) ↔u(**q**1), I(**q**2) ↔ u(**q**2)

Por lo tanto, si a todo punto perteneciente a la misma clase de indiferencia se le asigna igual número, entonces esta construcción conduce a una función u(**q**):

$$u: \rightarrow \mathbf{R}_{+}^{n} \rightarrow \mathrm{R}_{+}$$

$$\forall \mathbf{q}^{0} \in \mathbf{R}_{+}^{n} : \mathbf{q} \sim \mathbf{q}^{0} \leftrightarrow u(\mathbf{q}^{0}) = u(\mathbf{q})$$

$$\forall \mathbf{q}^{0} \in \mathbf{R}_{+}^{n} : \mathbf{q} \succ \mathbf{q}^{0} \leftrightarrow u(\mathbf{q}^{0}) < u(\mathbf{q})$$

$$\forall \mathbf{q}^{0} \in \mathbf{R}_{+}^{n} : \mathbf{q}^{0} \succ \mathbf{q} \leftrightarrow u(\mathbf{q}^{0}) > u(\mathbf{q})$$

y que constituye una representación ordinal de las preferencias del individuo, ya que por medio de u(**q**) a cada vector de consumo **q** ϵ $\mathbf{R}_{+}^{n}$ le correspondería un único número real, común para todos los elementos de la misma clase de indiferencia, número real mayor para combinaciones de consumo preferidas y menor para las inferiores.

El hecho de que u(**q**) sea una representación ordinal es claro si se tiene en cuenta que la asignación de un número real a cada curva de indiferencia ha sido totalmente arbitraria (puede cambiarse la bisectriz por cualquier rayo vector que pase por el origen).

Esto es así porque lo único que se precisa es una representación de las preferencias que preserve el orden de las mismas.

En suma, el valor numérico de u(**q**) para cada **q** concreto no nos interesa en sí más que en cuanto sea mayor, menor o igual que el valor de u(**q**) asociado a otro vector.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

Consecuentemente, el conjunto de axiomas 1 a 7 garantiza la existencia de una función de utilidad u($\mathbf{q}$) caracterizada por las siguientes propiedades:

$$\text{i) } u(\mathbf{q}^0) > u(\mathbf{q}^1) \leftrightarrow \mathbf{q}^0 \succ \mathbf{q}^1$$

$$u(\mathbf{q}^0) = u(\mathbf{q}^1) \leftrightarrow \mathbf{q}^0 \sim \mathbf{q}^1$$

ii) es continua y diferenciable

iii) es monótona creciente

iv) es estrictamente cuasicóncava.

Al ser u($\mathbf{q}$) una función que representa las preferencias de un consumidor, cualquier transformación monótona creciente $F[u(\mathbf{q})]$, $F' > 0$, también las representará.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

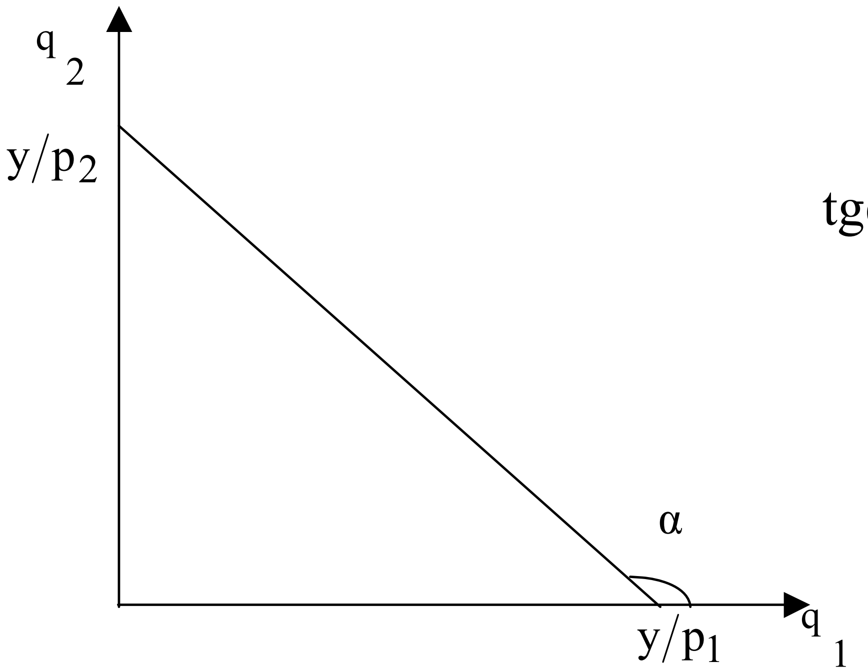
Prof. José Alberto Molina

Una vez caracterizadas las preferencias, a expresamos la restricción presupuestaria.

El individuo gasta íntegramente su renta:

$$y = p_1\, q_1 + \ldots + p_n\, q_n$$

Suponiendo dos únicos bienes:



$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{p_1}{p_2}$$

2. EQUILIBRIO PRIMAL

Los axiomas 1-8 permiten formular el equilibrio del individuo como solución al problema de maximizar $u(\mathbf{q})$ condicionado al gasto de la renta disponible:

$$\text{Max } u(\mathbf{q}) \quad \text{s.a } y = \mathbf{pq}$$

Cuya función auxiliar de Lagrange es:

$$L(\mathbf{q}, \lambda) = u(\mathbf{q}) + \lambda[y - \mathbf{pq}]$$

Las condiciones de primer orden de máximo interior son:

$$L_i(\mathbf{q}, \lambda) = u_i(\mathbf{q}) - \lambda p_i = 0 \qquad (i = 1, ..., n)$$

$$L_\lambda(\mathbf{q}, \lambda) = y - \mathbf{pq} = 0$$

donde $u_i(\mathbf{q})$ es la utilidad marginal del bien i-ésimo.

Un sistema de n+1 ecuaciones con n+1 incógnitas que permite despejar los valores de equilibrio de $\mathbf{q}$ y λ.

$$\lambda = \frac{u_i(\mathbf{q})}{p_i} = \frac{u_j(\mathbf{q})}{p_j} \qquad \qquad RMS_i^j = \frac{u_i(\mathbf{q})}{u_j(\mathbf{q})} = \frac{p_i}{p_j}$$

La primera expresión es la de igualdad de las utilidades marginales ponderadas e indica que en equilibrio la aportación que a la utilidad total hace la "última" unidad monetaria gastada en la adquisición de un bien debe ser igual para todos ellos.

La segunda expresión significa que en equilibrio la relación de intercambio subjetiva entre dos bienes para un consumidor (RMS) debe igualarse a la relación real de intercambio (el cociente entre los precios). En el caso de dos bienes esta condición indica la igualdad de las inclinaciones de la curva de indiferencia ($RMS_j^i = -dq_i/dq_j$) y de la restricción presupuestaria ($dq_i/dq_j = p_j/p_i$) en el punto de equilibrio, es decir, la tangencia entre ambas.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

Por otro lado, las condiciones de segundo orden son:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1r} & -p_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{r1} & \dots & u_{rr} & -p_r \\ -p_1 & \dots & -p_r & 0 \end{bmatrix} (-1)^r > 0 \ (r=2, \dots, n)$$

expresiones en las que las segundas derivadas u_{ij} están evaluadas en el punto de equilibrio y cuyo cumplimiento queda garantizado por la estricta cuasiconcavidad de la función de utilidad.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

Veamos algunos resultados derivados del equilibrio.

1. Ordinalidad. El equilibrio es invariante ante cualquier transformación monótona creciente de $u(\mathbf{q})$.

2. Existencia. Las cantidades demandadas de cada bien en equilibrio y el multiplicador son funciones de los precios y la renta monetaria:

$$q_i = q_i(\mathbf{p},y) \qquad (i = 1, ..., n)$$

Las funciones $q_i = q_i(\mathbf{p},y)$ se denominan marshallianas e indican las cantidades de bienes que desea el consumidor dados los precios y la renta

Dichas funciones también se pueden expresar en términos del gasto, $c_i = p_i\, q_i = c_i(\mathbf{p},y)$, o de la participación presupuestaria, $w_i = p_i\, q_i/y = w_i(\mathbf{p},y)$.

Al conjunto completo de funciones marshallianas observables desde $i = 1$ hasta $i = n$ se le denomina sistema completo de ecuaciones de demanda.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

3. Homogeneidad. Las funciones **q**(**p**, y) son homogéneas de grado cero en precios y renta:

$$\mathbf{q}(kp_1, kp_2, ..., kp_n, ky) = \mathbf{q}(p_1, p_2, ..., p_n, y), \quad k > 0$$

es decir, un cambio en la unidad de cuenta no modifica el equilibrio (ausencia de ilusión monetaria) al no alterar la restricción presupuestaria.

Por tanto, las cantidades demandadas en equilibrio dependen de los precios relativos y de la renta relativa.

4. Continuidad. Si se cumplen los axiomas 1-7 para cualquier $p_i > 0$ e $y > 0$, las funciones de demanda **q**(**p**, y) son continuas.

5. El multiplicador de Lagrange es la utilidad marginal de la renta gastada.

Diferenciando la función de utilidad u(**q**) y la restricción presupuestaria y = **pq** considerando dados los precios:

$$du(\mathbf{q}) = \sum u_i \, dq_i \qquad dy = \sum p_i \, dq_i$$

particularizando $du(\mathbf{q})$ en $L_i(\mathbf{q}, \lambda) = 0$ y con dy:

$$du(\mathbf{q}) = \lambda \sum p_i \, dq_i = \lambda \, dy \rightarrow \lambda = \frac{dU(q)}{dy}$$

6. Elasticidades

A partir de las funciones marshallianas $q_i = q_i(\mathbf{p},y)$, las respuestas en la demanda del bien Q_i ante cambios en la renta y en el precio del mismo bien o de otro bien diferente se miden a través de las elasticidades renta y precio.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

La elasticidad renta o gasto del bien Q_i se define como el cociente entre la variación porcentual en la cantidad y la variación porcentual en la renta.

$$e_i = \frac{\partial q_i / q_i}{\partial y / y} = \frac{y}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial y} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Los valores de esta elasticidad gasto pueden utilizarse para clasificar los bienes de acuerdo con el siguiente criterio:

$$e_i \begin{cases} < 0 \leftrightarrow Q_i \text{ es inferior} \\ = 0 \leftrightarrow Q_i \text{ es neutro} \\ > 0 \leftrightarrow Q_i \text{ es normal} \begin{cases} 0 < e_i < 1 \leftrightarrow Q_i \text{ es de primera necesidad} \\ e_i = 1 \leftrightarrow Q_i \text{ es de elasticidad unitaria} \\ e_i > 1 \leftrightarrow Q_i \text{ es de lujo} \end{cases} \end{cases}$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

En segundo lugar, la elasticidad precio marshalliana del bien Q_i se define como el cociente entre la variación porcentual en la cantidad demandada y la variación porcentual en el precio del mismo bien (elasticidad directa) o de otro diferente (elasticidad cruzada).

En términos infinitesimales:

$$e_{ij}^{y} = \frac{\partial q_i / q_i}{\partial p_j / p_j} = \frac{p_j}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial p_j} \qquad (i, j = 1, ..., n)$$

Los valores de la elasticidad precio directa pueden utilizarse para clasificar los bienes de acuerdo con el siguiente criterio:

$$e_{ii}^{y} \begin{cases} < 0 \leftrightarrow Q_i \text{ tiene demanda normal} \begin{cases} 0 <| e_{ii}^{y} |< 1 \leftrightarrow \text{demanda inelástica} \\ | e_{ii}^{y} |= 1 \leftrightarrow \text{demanda unitaria} \\ | e_{ii}^{y} |> 1 \leftrightarrow \text{demanda elástica} \end{cases} \\ = 0 \leftrightarrow Q_i \text{ tiene demanda perfectamente rígida} \\ > 0 \leftrightarrow \text{tiene demanda anormal} \end{cases}$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

Por otro lado, existen bienes que satisfacen conjuntamente una misma necesidad, complementarios y otros que lo hacen de forma alternativa, sustitutos.

Así, los valores de la elasticidad precio cruzada pueden utilizarse, conjuntamente con la elasticidad precio directa, para clasificar los bienes en términos brutos:

$$e_{ii}^{y} < 0 \begin{cases} e_{ij}^{y} < 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son complementarios brutos} \\ e_{ij}^{y} = 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son independientes brutos} \\ e_{ij}^{y} > 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son sustitutivos brutos} \end{cases}$$

$$e_{ii}^{y} > 0 \begin{cases} e_{ij}^{y} < 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son sustitutivos brutos} \\ e_{ij}^{y} = 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son independientes brutos} \\ e_{ij}^{y} > 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son complementarios brutos} \end{cases}$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

7. Ecuación de Slutsky. Los efectos de cambios en los precios y la renta por separado sobre las cantidades demandadas se formalizan en la ecuación de Slutsky:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\right)_u - q_j \frac{\partial q_i}{\partial y} \leftrightarrow T_{ij} = S_{ij} + R_{ij}$$

que descompone el efecto total en un efecto sustitución y su efecto renta.

En primer lugar, un efecto de precio puro denominado efecto de sustitución porque refleja exclusivamente el efecto de abaratamiento relativo de un bien en términos del otro sin que la renta real resulte alterada

y, además, un efecto puro de renta que se deriva del hecho de que la capacidad adquisitiva de la renta nominal dada varía cuando lo hace algún precio y que refleja la recuperación del nivel original de renta nominal.

Una variación de pj produce sobre la cantidad de equilibrio de qi dos efectos.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

El signo del efecto de sustitución cruzado se utiliza formalmente para clasificar los bienes en términos netos:

$$S_{ij}\begin{cases} < 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son complementarios netos} \\ = 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son independientes netos} \\ > 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son sustitutivos netos} \end{cases}$$

Los efectos de sustitución poseen dos propiedades fundamentales:

Los efectos de sustitución directos son negativos, $S_{ii} < 0$ (Negatividad)

y, además, los efectos cruzados son iguales $S_{ij} = S_{ji}$ (Simetría).

3.- LA DUALIDAD EN EL CONSUMO

El equilibrio del consumidor se ha planteado como el resultado de la maximización de la función de utilidad sometida a la restricción de balance.

Ahora bien, el planteamiento puede ser el inverso, es decir, si se fija a priori un determinado nivel de utilidad u y los precios son datos,

¿cuál será el gasto mínimo en que se habrá de incurrir para alcanzar u?, es decir, ¿qué combinación elegirá el consumidor de forma que a esos precios minimice su coste de obtención del nivel de utilidad u?.

Estas preguntas tienen respuesta resolviendo el problema dual:

$$\text{Min } \mathbf{pq} \quad \text{s.a } u = u(\mathbf{q})$$

cuya función auxiliar de Lagrange es:

$$S(\mathbf{q}, \mu) = \mathbf{pq} + \mu[u - u(\mathbf{q})]$$

cuyas condiciones de primer orden de mínimo interior son:

$$S_i(\mathbf{q}, \mu) = p_i - \mu u_i(\mathbf{q}) = 0 \qquad (i = 1, ..., n)$$

$$S_\mu(\mathbf{q}, \mu) = u - u(\mathbf{q}) = 0$$

Las condiciones de segundo orden exigen:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1r} & -p_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{r1} & \dots & u_{rr} & -p_r \\ -p_1 & \dots & -p_r & 0 \end{bmatrix} \mu(-1)^{r+1} < 0 \quad (r = 2, ..., n)$$

la cual es equivalente a la condición de segundo orden del primal.

De nuevo es posible establecer una serie de resultados:

1. Existencia. Existen funciones de demanda compensadas o hicksianas:

$$q_i = h_i(\mathbf{p}, u) \qquad (i = 1, ..., n)$$

no observables que indican las cantidades de bienes que se demandan para alcanzar un nivel de satisfacción determinado a unos precios dados de forma que el gasto sea mínimo.

Si en $q_i = h_i(\mathbf{p}, u)$ dejamos solamente que varíe p_j obtendremos la variación en la cantidad demandada de Q_j que, manteniendo el nivel de utilidad, minimiza el coste de adquisición al nuevo precio, es decir, dicha variación caracteriza el efecto de sustitución,

$$S_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \qquad (i = 1, ..., n)$$

2. Elasticidades precio hicksianas

A partir de las funciones de demanda hicksianas $q_i = h_i(\mathbf{p}, u)$, las respuestas en la cantidad demandada del bien Q_i ante cambios en el precio del mismo bien o de otro bien diferente, manteniendo la utilidad constante, se miden a través de las elasticidades precio hicksianas.

La elasticidad precio hicksiana del bien Q_i se define como el cociente entre la variación porcentual en la cantidad demandada, manteniendo la utilidad constante, y la variación porcentual en el precio del mismo bien (elasticidad directa) o de otro diferente (elasticidad cruzada).

En términos infinitesimales:

$$e_{ij}^{u} = \frac{\partial h_i / q_i}{\partial p_j / p_j} = \frac{p_j}{q_i}\frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{p_j}{q_i} S_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

Dado que el efecto de sustitución directo S_{ii} es siempre negativo, $S_{ii} < 0$, los valores de la elasticidad precio directa hicksiana serán también negativos, indicando en todos los casos demandas hicksianas normales.

Por otro lado, la definición de elasticidad precio cruzada hicksiana nos permite clasificar los bienes de forma análoga a cómo hemos hecho con el efecto de sustitución cruzado, esto es:

$$e_{ij}^{u}\begin{cases} < 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son complementarios netos} \\ = 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son independientes netos} \\ > 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son sustitutivos netos} \end{cases}$$

3. Ecuación de Slutsky. Podemos obtener la Ecuación de Slutsky en términos de las elasticidades renta y precio, marshallianas y hicksianas.

Para ello, recordamos la expresión inicial:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\right)_u - q_j \frac{\partial q_i}{\partial y}$$

que multiplicamos por $\frac{p_j}{q_i}$:

$$\frac{p_j}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \frac{p_j}{q_i}\left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\right)_u - \frac{p_j q_j}{y}\frac{y}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial y} = \frac{p_j}{q_i}\frac{\partial h_i}{\partial p_j} - \frac{p_j q_j}{y}\frac{y}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial y} \leftrightarrow$$

$$e_{ij}^{y} = e_{ij}^{u} - w_j e_i$$

siendo w_j la participación presupuestaria del bien Q_j.

4. Teorema básico de la dualidad.

Este teorema garantiza la identidad de las soluciones del primal y del dual bajo determinadas condiciones y se enuncia de la siguiente forma.

Dados los problemas primal y dual:

$$\text{Max } u(\mathbf{q}) \quad \text{s.a } \mathbf{pq} = y$$

$$\text{Min } \mathbf{pq} \quad \text{s.a } u = u(\mathbf{q})$$

si $\mathbf{q}^*$ resuelve el primal y $u(\mathbf{q}^*) = u^*$, entonces $\mathbf{q}^*$ resuelve el dual; y si $\mathbf{q}^*$ resuelve el dual e $y^* = \mathbf{pq}^*$, entonces $\mathbf{q}^*$ resuelve el primal.

5. Función indirecta de utilidad.

Se obtiene sustituyendo las funciones marshallianas en la función objetivo del primal:

$$u = u(\mathbf{q}) = u[\mathbf{q}(\mathbf{p}, y)] = v(\mathbf{p}, y)$$

La función indirecta de utilidad nos da la utilidad máxima alcanzable para los precios y renta dadas y permite tratar directamente problemas de efectos de variaciones de precios y renta nominal sobre el nivel de utilidad del consumidor sin tener que repetir cada vez el primal.

Tiene las siguientes propiedades: es continua en precios y renta, decreciente respecto a precios, creciente respecto a renta, homogénea de grado cero en precios y renta y, por último, cuasiconvexa en precios.

Además, nos permite obtener las funciones de demanda marshallianas a través del teorema de Roy:

$$-\frac{\partial v(\mathbf{p}, y)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p}, y)/\partial y} = q_i(\mathbf{p}, y) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

6. Función de gasto.

Se obtiene sustituyendo las funciones hicksianas en la función objetivo del dual:

$$y = \mathbf{pq} = \mathbf{ph}(\mathbf{p}, u) = c(\mathbf{p}, u)$$

La función de gasto indica el coste mínimo de alcanzar un nivel fijo de utilidad.

Además, es continua en precios y utilidad, creciente en precios y utilidad, homogénea de grado 1 en precios y cóncava en precios.

Por último, nos permite obtener las funciones de demanda hicksianas por medio del teorema de Hotelling:

$$\frac{\partial c(p, u)}{\partial p_i} = h_i(p, u) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

7. Problema de la integrabilidad.

La dualidad permite resolver el denominado problema de la integrabilidad, es decir, permite caracterizar la función inicial de preferencias subyacente al proceso optimizador a partir del conocimiento de las funciones de demanda.

Ahora bien, no se trata de saber si se puede recorrer el camino inverso al que normalmente se sigue en el proceso de optimización, sino de saber si un sistema de ecuaciones de demanda que cumpla las propiedades prescritas por la teoría sólo puede provenir de una función de utilidad de buen comportamiento, es decir, que cumpla los axiomas postulados.

Si esto es así, al existir una relación biunívoca entre funciones de utilidad y funciones de demanda.

No será preciso conocer la función de utilidad, bastando con conocer las de demanda y teniendo la seguridad de que estas últimas responderán al proceso de optimización prescrito por la teoría.

Pues bien, la condición que garantiza este comportamiento es la simetría de los efectos de sustitución cruzados:

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i} \qquad (ij;\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ n)$$

es decir, si las funciones de demanda cumplen esta condición de simetría, sabemos que provienen necesariamente de una función de utilidad de buen comportamiento, por lo que no será necesario conocerla.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

“Aproximación Unitaria: Fundamentos”

Prof. José Alberto Molina

4.- LA FUNCIÓN DE BENEFICIO EN EL CONSUMO

En los epígrafes anteriores hemos visto que existen distintas formas de describir las preferencias de los consumidores, las cuales se agrupan en dos categorías: las representaciones primales (p.ej. la función de utilidad) y las representaciones duales (p.ej. la función indirecta de utilidad y la función de gasto).

En este epígrafe vamos a caracterizar una nueva representación dual de las preferencias, la denominada función de beneficio en el consumo.

Para ello, haremos uso del isomorfismo existente entre la teoría del consumo y la teoría de la producción, considerando que el consumidor utiliza unos *inputs*, los bienes, para obtener un *output*, la utilidad.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

Antes de ello, describimos un nuevo tipo de demandas, las frischianas, que serán utilizadas con posterioridad.

Dado el problema primal de elección del consumidor:

Max u(**q**) s.a y=**pq**

las condiciones de primer orden pueden expresarse:

$$u_i(\mathbf{q}) = \lambda p_i = \frac{p_i}{r} \quad (i = 1, ..., n)$$

$$y = \mathbf{pq}$$

El multiplicador de Lagrange λ es la utilidad marginal de la renta ($\lambda = \frac{du}{dy}$), interpretándose su recíproco, r, como el coste marginal de la utilidad, $r = \frac{dy}{du}$ o bien, como un precio hipotético de la utilidad.

Siendo u(**q**) estrictamente cuasicóncava, el sistema $u_i(\mathbf{q}) = \lambda p_i = \frac{p_i}{r}$ se puede invertir obteniendo:

$$q_i = f_i(\mathbf{p}, r) \quad (i = 1, ..., n)$$

Frisch (1932) utilizó una versión de este sistema en el contexto de las preferencias aditivas para medir la utilidad marginal del dinero y, por ello, siguiendo a Browning (1992), denominamos a tales funciones demandas frischsianas.

Según estas funciones, las cantidades demandadas de los bienes en el equilibrio dependen de los precios y del coste marginal de la utilidad (inverso de la utilidad marginal de la renta).

La idea conceptual es que el consumidor se ve compensado ante variaciones en los precios con una cantidad de dinero suficiente como para mantener constante la utilidad marginal de la renta en su nivel inicial.

Tales demandas frischsianas se distinguen inmediatamente de las demandas marshallianas que relacionan cantidades de equilibrio con precios y renta, y también de las demandas hicksianas que, recordemos, relacionan cantidades con precios y utilidad.

Ahora bien, el paso de unas a otras es directo.

Así, de las demandas frischsianas podemos obtener las funciones marshallianas despejando r en la restricción presupuestaria en términos de **p** e y, y sustituyendo en $q_i = f_i(\mathbf{p}, r)$:

$$y = \mathbf{pq} = \mathbf{pf}(\mathbf{p}, r) \rightarrow r = r(\mathbf{p}, y) \rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, r(\mathbf{p}, y)) = \mathbf{q}(\mathbf{p}, y)$$

De forma similar, las demandas frischianas se convierten en las funciones hicksianas expresando r en términos de **p** y u, y volviendo a sustituir en $q_i = f_i(\mathbf{p}, r)$:

$$y = \mathbf{pq} \rightarrow c(\mathbf{p}, u) = \mathbf{pf}(\mathbf{p}, r) \rightarrow r = r(\mathbf{p}, u) \rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, r(\mathbf{p}, u)) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$$

Sabiendo que r es el coste marginal de la utilidad, podemos obtener las demandas frischianas de una forma alternativa y más novedosa.

Para ello, comenzamos considerando la analogía ya comentada con la teoría de la producción y suponemos que el consumidor utiliza unos *inputs*, los bienes, para obtener un *output*, la utilidad, cuyo precio es r.

Bajo este planteamiento, podemos definir la función de beneficio en el consumo como el máximo beneficio que el agente alcanza al "venderse" su propia utilidad al precio r, dada la función de utilidad y los precios de los bienes.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

Para una función general u = u(**q**) estrictamente cuasicóncava, la función de beneficio correspondiente vendrá dada por:

$$\pi\,(\mathbf{p}, r) = \mathrm{Max}_{u,q}\ \{ r\,u - \mathbf{pq};\ u = u(q)\}$$

la cual es continua, convexa, homogénea lineal en **p** y r, creciente en r y decreciente en **p**.

Una forma alternativa, frecuentemente utilizada, de expresar la función de beneficio es en términos de la función de gasto, es decir:

$$\pi\,(\mathbf{p}, r) = \mathrm{Max}_{u}\ \{ r\,u - c(\mathbf{p}, u)\}$$

Veamos ahora algunos resultados que se desprenden de esta formulación:

1. Existencia. A partir de la función de beneficio y haciendo uso del Teorema de Hotelling para la teoría de la producción, las cantidades demandadas de cada bien en equilibrio y la utilidad son funciones de los precios de los bienes y de la utilidad:

$$-\pi_i(\mathbf{p}, r) = q_i = f_i(\mathbf{p}, r) \quad (i = 1, ..., n)$$

$$\pi_r(\mathbf{p}, r) = u$$

Las funciones $q_i = f_i(\mathbf{p}, r)$ $(i = 1, ..., n)$ indican las cantidades de bienes que se demandan para alcanzar un nivel de utilidad marginal de la renta (o coste marginal de la utilidad) determinado a unos precios dados de forma que el beneficio en el consumo sea máximo.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

2. Homogeneidad. Las funciones **f**(**p**, r) son homogéneas de grado cero en todos los precios:

f(kp1, kp2, ..., kr) = **f**(p1, p2, ..., r), k > 0

es decir, un cambio en la unidad de cuenta no modifica el equilibrio.

3. Simetría. Las derivadas cruzadas de las funciones son simétricas ya que $\pi_{ij} = \pi_{ji}$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_j} = \frac{\partial f_j}{\partial p_i} \quad \text{(i j; i, j = 1, ..., n)}$$

4. Negatividad. Dado que $\pi(\mathbf{p}, r)$ es convexa, su matriz Hessiana será semidefinida positiva.

Por tanto, la matriz de los efectos de sustitución específicos $\{\partial f_i(\mathbf{p}, r)/\partial p_j)\}$, que constituye la opuesta de dicha Hessiana será semidefinida negativa, esto es, las funciones de demanda frischianas tendrán pendiente negativa, $f_{ii} < 0$ (i =1,..., n).

5. Continuidad. Las funciones de demanda **f**(**p**, r) son continuas en **p** y r.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

6. Descomposición del efecto de sustitución S_{ij} en su efecto específico y su efecto general.

Tal descomposición puede expresarse de dos formas:

Una primera en términos de las segundas derivadas de la función de beneficio:

$$S_{ij} = -\pi_{ij} + \frac{\pi_{ri}\pi_{rj}}{\pi_{rr}}$$

El signo de la segunda derivada cruzada de la función de beneficio nos permite clasificar los bienes:

$$\pi_{ij} \begin{cases} < 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son sustitutivos específicos} \\ = 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son independientes específicos} \\ > 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son complementarios específicos} \end{cases}$$

Una segunda forma de expresar la misma descomposición es:

$$S_{ij} = f_{ij} + y\omega^{-1} \frac{\partial q_i}{\partial y} \frac{\partial q_j}{\partial y}$$

donde w es la flexibilidad renta de Frisch: $\left(\omega = \frac{\partial \log r}{\partial \log y} = \frac{r_y y}{r} \right)$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

7. Elasticidades. A partir de las funciones de demanda frishchianas $q_i = f_i(\mathbf{p}, r)$, las respuestas en la cantidad demandada del bien Q_i ante cambios en el precio del mismo bien o de otro bien diferente, manteniendo la utilidad marginal de la renta constante, se miden a través de las elasticidades precio frishchianas.

La elasticidad precio frishchiana del bien Qi se define como el cociente entre la variación porcentual en la cantidad demandada, manteniendo la utilidad marginal de la renta constante, y la variación porcentual en el precio del mismo bien (elasticidad directa) o de otro diferente (elasticidad cruzada).

En términos infinitesimales:

$$e_{ij}^{r} = \frac{\partial f_i / q_i}{\partial p_j / p_j} = \frac{p_j}{q_i}\frac{\partial f_i}{\partial p_j} = \frac{p_j}{q_i} f_{ij} \qquad (i, j = 1, ..., n)$$

Dado que fii < 0, los valores de la elasticidad precio directa frishchiana serán también negativos, indicando en todos los casos demandas frishchianas normales.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

Por otro lado, la expresión - $\pi_{ij}(\mathbf{p}, r) = f_{ij}(\mathbf{p}, r)$ nos permite clasificar los bienes de forma similar a cómo hemos hecho con el efecto de sustitución específico:

$$e^{r}_{ij}\begin{cases} < 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son complementarios específicos} \\ = 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son independientes específicos} \\ > 0 \leftrightarrow Q_i \text{ y } Q_j \text{ son sustitutivos específicos} \end{cases}$$

Finalmente, podemos obtener fácilmente la expresión teórica de la elasticidad frishchiana en términos de la hicksiana:

$$e^{r}_{ij} = \frac{p_j}{q_i} f_{ij} = \frac{p_j}{q_i} S_{ij} - \frac{p_j}{q_i} y\omega^{-1} \frac{\partial q_i}{\partial y}\frac{\partial q_j}{\partial y} = e^{u}_{ij} - w_j e_i e_j \omega^{-1} \qquad (i, j = 1, ..., n)$$

5.- ELECCIÓN TRABAJO OCIO: LA OFERTA DE TRABAJO

La modelización anterior se ha basado en una función de utilidad que dependía únicamente de los bienes físicos consumidos por el individuo.

Este planteamiento puede extenderse al caso de que la utilidad individual dependa no sólo de estos bienes físicos, sino también del tiempo disponible de ocio Q_0: u = u($\mathbf{q}$, q_o), donde q_o siendo el bien ocio cuyo precio es el salario p_o.

La primera novedad es que el tiempo de ocio está limitado al tiempo total disponible T, de tal forma que la restricción presupuestaria incluirá como ingresos la renta no salarial exógena y así como una renta salarial $p_o\ell$, donde ℓ es el tiempo de trabajo ($\ell = T - q_o$) e Y es el ingreso total:

$$y + p_0\,\ell = \mathbf{pq} \;\Rightarrow\; Y = y + p_o T = \mathbf{pq} + p_o q_o$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

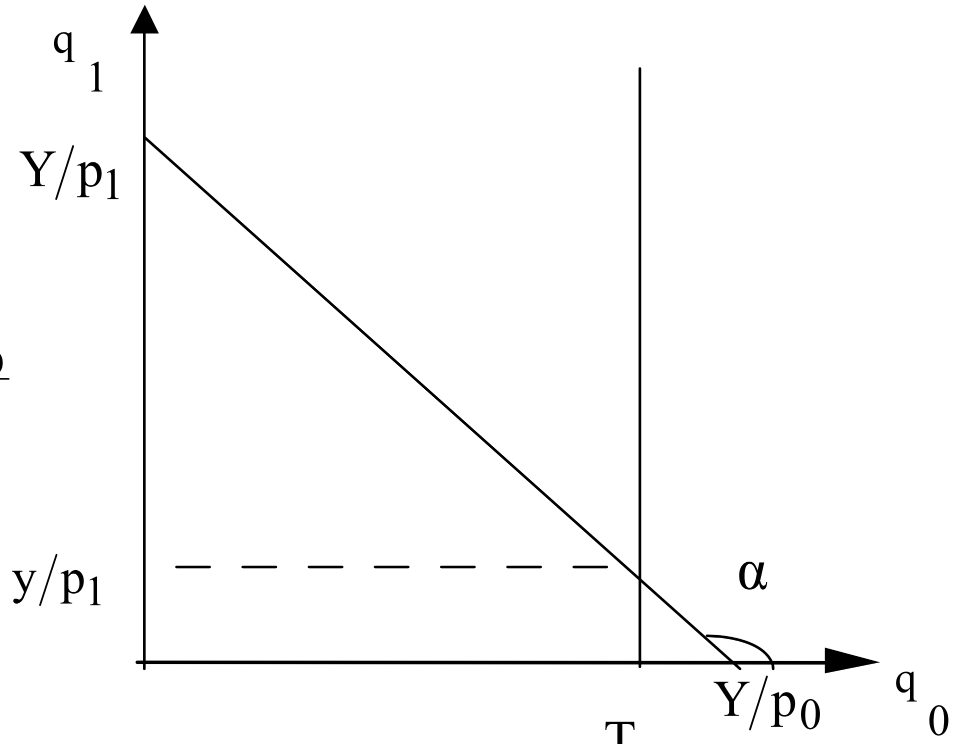
Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

Suponiendo un único bien de consumo Q_1 y el ocio Q_o para permitir la representación gráfica, la restricción presupuestaria se representa como:

$$tg\alpha = \frac{dq_1}{dq_0} = -\frac{p_0}{p_1}$$



Gráfico

donde la pendiente viene dada por: $tg\alpha = \dfrac{dq_1}{dq_0} = -\dfrac{p_0}{p_1}$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

“Aproximación Unitaria: Fundamentos”

Prof. José Alberto Molina

El nuevo equilibrio del consumidor será ahora:

$$\text{Max } u(\mathbf{q}, q_o) \text{ s.a } Y = y + p_oT = \mathbf{pq} + p_oq_o$$

La función auxiliar de Lagrange es:

$$L(\mathbf{q}, q_o, \lambda) = u(\mathbf{q}, q_o) + \lambda[\, y + p_oT - \mathbf{pq} - p_oq_o]$$

cuyas condiciones de primer orden son:

$$L_i(\mathbf{q}, q_o, \lambda) = u_i(\mathbf{q}, q_o) - \lambda p_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$L_o(\mathbf{q}, q_o, \lambda) = u_o(\mathbf{q}, q_o) - \lambda p_o = 0$$

$$L_\lambda(\mathbf{q}, q_o, \lambda) = y + p_oT - \mathbf{pq} - p_oq_o = 0$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

De estas condiciones de primer orden se obtiene que la relación de intercambio subjetiva se iguala a la relación objetiva de intercambio:

$$\frac{U_i(\mathbf{q}, q_0)}{U_j(\mathbf{q}, q_0)} = \frac{p_i}{p_j} \qquad (i, j = 1, ..., n, o)$$

Por otro lado, las condiciones de segundo orden son :

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1r} & -p_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{r1} & \dots & u_{rr} & -p_r \\ -p_1 & \dots & -p_r & 0 \end{bmatrix} (-1)^r > 0 \qquad (r = 2, ..., n, o)$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

A partir del equilibrio anterior se obtienen una serie de resultados:

1. Existencia. Existen funciones de demanda marshallianas de los bienes físicos y del tiempo de ocio:

$$q_i = q_i(\mathbf{p}, p_o, Y) \qquad (i = 1, ..., n)$$

$$q_o = q_o(\mathbf{p}, p_o, Y)$$

A partir de la función de demanda de ocio podemos obtener directamente la función de oferta de trabajo:

$$\ell = T - q_o(\mathbf{p}, p_o, Y) = \ell(\mathbf{p}, p_o, Y)$$

2. Ecuación de Slutsky. Un cambio en el salario afectará a la demanda de ocio a través de un efecto sustitución y un efecto renta:

$$\frac{\partial q_0}{\partial p_0} = \left(\frac{\partial q_0}{\partial p_0}\right)_u + (T - q_0)\frac{\partial q_0}{\partial Y}$$

En primer lugar, un efecto sustitución que refleja el efecto de abaratamiento relativo de un bien en términos del otro sin que la renta real resulte alterada y, además, un efecto renta que, a su vez, se puede descomponer en dos elementos: un efecto renta ordinario que se deriva del hecho de que la capacidad adquisitiva de la renta nominal dada varía cuando lo hace algún precio y que refleja la recuperación del nivel original de renta nominal y, en segundo lugar, un efecto dotación.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

6.- LA ELECCIÓN INTERTEMPORAL

Dinamizamos el planteamiento estático dando lugar a la elección intertemporal.

Desde el Primal, asumimos que el consumidor vive sólo dos períodos: el inicial, t = 0, y el final, t = 1. En el inicial trabaja obteniendo una renta salarial y_o, mientras que en el final se jubila y obtiene una renta no salarial y_1.

El consumidor debe distribuir su renta total, Y, por ejemplo, actualizada al período inicial $y_0 + \frac{y_1}{1+r}$

siendo r el tipo de interés, entre el consumo en el período activo q_o y el consumo actualizado en el período de jubilación.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

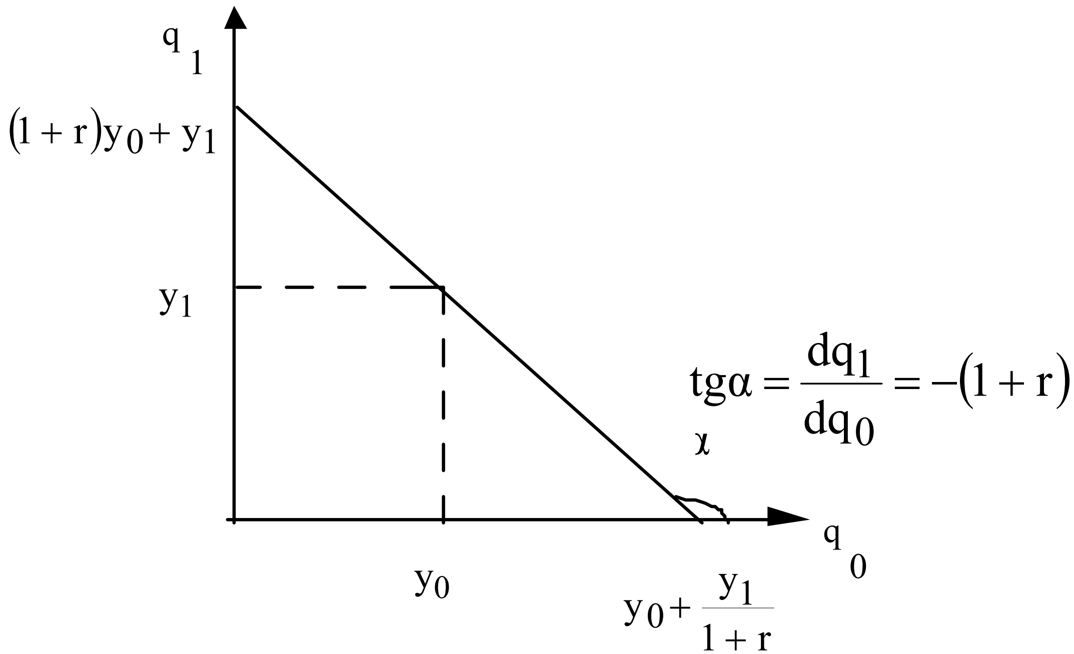
"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

Por lo tanto, la restricción presupuestaria intertemporal es:

$$Y = y_0 + \frac{y_1}{1+r} = q_0 + \frac{q_1}{1+r}$$

de tal forma que el precio del consumo en el período inicial es $p_0 = 1$, mientras que el precio del consumo en el período final es $p_1 = 1/(1 + r)$ ya que una unidad ahorrada en t = 0 permite adquirir (1 + r) unidades de q_1



Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

El equilibrio intertemporal del consumidor será:

Max $u(q_0, q_1)$ s.a $Y = y_0 + \frac{y_1}{1+r} = q_0 + \frac{q_1}{1+r}$

La función auxiliar de Lagrange es:

$$L(q_0, q_1, \lambda) = u(q_0, q_1) + \lambda\left[y_0 + \frac{y_1}{1+r} - q_0 - \frac{q_1}{1+r}\right]$$

cuyas condiciones de primer orden son:

$$L_i(q_0, q_1, \lambda) = u_i(q_0, q_1) - \lambda p_i = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

$$L_\lambda(q_0, q_1, \lambda) = y_0 + \frac{y_1}{1+r} - q_0 - \frac{q_1}{1+r} = 0$$

De estas condiciones de primer orden se obtiene que:

$$RMS_0^1 = \frac{U_0(q_0, q_1)}{U_1(q_0, q_1)} = \frac{p_0}{p_1} = 1 + r$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

Por otro lado, la condición de segundo orden es:

$$\begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & -p_0 \\ u_{10} & u_{11} & -p_1 \\ -p_0 & -p_1 & 0 \end{bmatrix} > 0$$

A partir del equilibrio intertemporal se obtienen una serie de resultados:

1. Existencia. Existen funciones de demanda marshallianas de los consumos en los dos períodos de tiempo:

$$q_i = q_i(r, Y) \qquad (i = 1, 0)$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

2. Ecuación de Slutsky. Un cambio en el tipo de interés provocará un cambio en el consumo que descomponemos en un efecto sustitución y su efecto renta.

Expresando la restricción presupuestaria en valor futuro:

$$(1 + r)\, y_0 + y_1 = (1 + r)\, q_0 + q_1$$

$$p_0 = (1 + r) \text{ y } p_1 = 1$$

La Ecuación de Slutsky queda: $\dfrac{\partial q_0}{\partial p_0} = \left(\dfrac{\partial q_0}{\partial p_0}\right)_u + (y_0 - q_0)\dfrac{\partial q_0}{\partial Y}$

donde el efecto renta se descompone en un efecto ordinario y en un efecto dotación.

El signo del efecto total dependerá de si el individuo es prestatario ($q_0 > y_0$) o prestamista ($q_0 < y_0$).

En el primer caso, el efecto total será negativo, mientras que en el segundo será indeterminado dependiendo de la magnitud, en valor absoluto, de los efectos sustitución y renta.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Fundamentos"

Prof. José Alberto Molina

Desde el punto de vista de la función de beneficio en el consumo, recordemos que:

$$-\pi_i(\mathbf{p}, r) = q_i = f_i(\mathbf{p}, r) \quad (i = 1, ..., n)$$

$$\pi_r(\mathbf{p}, r) = u$$

Las funciones frischianas $q_i = f_i(\mathbf{p}, r)$ $(i = 1, ..., n)$ se definen de tal forma que se mantenga constante la utilidad marginal de la renta en su nivel inicial lo cual es particularmente útil en este contexto intertemporal.

Podemos utilizar las preferencias intertemporales SNAP (Simple Non-Additive Preferences):

$$\Pi(\mathbf{p}^1, ..., \mathbf{p}^T) = -\sum_{t=1}^{T-1} \Phi^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}, r)$$

donde $\Phi^t(\cdot)$ es una función de pérdidas, p^t y p^{t+1} son los vectores de precios en t y t+1 descontados al período inicial.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

““Aproximación Unitaria: Fundamentos”

Prof. José Alberto Molina

Desarrollamos el sumatorio:

$$\pi\left(\mathbf{p}^{1},\ldots,\mathbf{p}^{T},r\right)=-\sum_{t=1}^{T-1}\Phi^{t}\left(\mathbf{p}^{t},\mathbf{p}^{t+1},r\right)$$

$$=-\left[\Phi^{1}\left(\mathbf{p}^{1},\mathbf{p}^{2},r\right)+\ldots+\Phi^{t-1}\left(\mathbf{p}^{t-1},\mathbf{p}^{t},r\right)+\Phi^{t}\left(\mathbf{p}^{t},\mathbf{p}^{t+1},r\right)+\ldots+\Phi^{T-1}\left(\mathbf{p}^{T-1},\mathbf{p}^{T},r\right)\right]$$

y las funciones frischianas quedan:

$$\mathbf{q}^{t}=\nabla_{t}\Phi^{t-1}\left(\mathbf{p}^{t-1},\mathbf{p}^{t},r\right)+\nabla_{t}\Phi^{t}\left(\mathbf{p}^{t},\mathbf{p}^{t+1},r\right)$$

siendo ∇_t el gradiente de la función de beneficio con respecto a los precios del período t. Las cantidades corrientes dependen de los precios de un período anterior, de un período posterior y del mismo período, además, del precio de la utilidad r con información perfecta:

$$\mathbf{q}^{t}=\mathbf{f}^{t}\left(\mathbf{p}^{t-1},\mathbf{p}^{t},\mathbf{p}^{t+1},r\right)$$

Con incertidumbre, el agente va a disponer, conforme transcurra el tiempo, de nueva información que incorporará en el parámetro r_t y que lo irá modificando sucesivamente:

$$\mathbf{q}^{t}=\nabla_{t}\Phi^{t-1}\left(\mathbf{p}^{t-1},\mathbf{p}^{t},r_{t}\right)+\nabla_{t}\Phi^{t}\left(\mathbf{p}^{t},\mathbf{p}^{t+1},r_{t}\right)$$