Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

PARTE I
TEMA 2
APROXIMACIÓN UNITARIA: MODELOS

José Alberto Molina

Grupo de Investigación en Economía de la Población, Mercado de Trabajo y Economía Industrial

Universidad Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

CONTENIDO

A partir de la definición de sistema completo de ecuaciones de demanda, también denominado genéricamente modelo unitario del consumidor:

$$q_i = q_i(\mathbf{p},y) \qquad (i = 1, ..., n)$$

el primer paso de su estudio consiste en la especificación concreta de su función de preferencias.

La literatura ha planteado distintas alternativas:

i) partir de una función de utilidad y obtener las ecuaciones;

ii) especificar la función indirecta de utilidad y, a partir del Teorema de Roy, obtener las funciones de demanda;

iii) postular una función de gasto, generar las demandas hicksianas, y expresar después la utilidad en términos de los precios y la renta por medio de la función indirecta;

iv) formular directamente las funciones de demanda.

Desde una perspectiva intuitiva podemos concretar algunas ventajas de unas formulaciones sobre otras.

Los especificaciones iii) y iv) presentan el atractivo de que resulta más sencillo aplicar la intuición para formular a priori la forma más adecuada de las funciones de gasto o demanda que intuir la característica funcional de las funciones directa o indirecta de utilidad.

Por su parte, las formulaciones i) y ii) presenta el inconveniente de ser más laboriosas, de tal forma que, en ocasiones, deben realizarse complejos cálculos de optimización para obtener las funciones de demanda.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

1.1.- EL SISTEMA LINEAL DE GASTO

El sistema lineal de gasto (*Linear Expenditure System LES*) se formula a partir de una función de utilidad Stone-Geary:

$$u(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^{n} (q_i - \gamma_i)^{\beta_i}$$

$\gamma_i \geq 0$ puede interpretarse como el consumo mínimo de subsistencia de tal forma que $q_i > \gamma_i$. Además, $\beta_i > 0$ para que la función sea monótona creciente y también $\sum_i^n \beta_i = 1$

Calculamos las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial u(\mathbf{q})}{\partial q_i} = \beta_i (q_i - \gamma_i)^{\beta_i - 1} \prod_{j \neq i}^{n-1} (q_j - \gamma_j)^{\beta_j} = \beta_i (q_i - \gamma_i)^{-1} \prod_{i}^{n} (q_i - \gamma_i)^{\beta_i} = \beta_i (q_i - \gamma_i)^{-1} u = \lambda p_i$$

(i = 1, ..., n)

$$\sum pi\ qi = y$$

Si dividimos entre sí todas las n-1 primeras ecuaciones y la n-ésima para eliminar el multiplicador:

$$\frac{\beta_i (q_i - \gamma_i)^{-1} u}{\beta_n (q_n - \gamma_n)^{-1} u} = \frac{\lambda p_i}{\lambda p_n} \rightarrow \quad \frac{\beta_i}{\beta_n} \frac{q_n - \gamma_n}{q_i - \gamma_i} = \frac{p_i}{p_n} \rightarrow \quad q_i = \gamma_i + \frac{\beta_i}{\beta_n} \frac{p_n}{p_i} (q_n - \gamma_n)$$

y multiplicando por p_i nos queda la expresión del gasto

$$p_i q_i = p_i \gamma_i + \frac{\beta_i}{\beta_n} p_n (q_n - \gamma_n)$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria estas expresiones de gasto:

$$y = \sum_i^n p_i q_i = \sum_i^n p_i \gamma_i + \frac{p_n}{\beta_n} (q_n - \gamma_n) \sum_i^n \beta_i \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{p_n}{\beta_n} (q_n - \gamma_n) \sum_i^n \beta_i = y - \sum_i^n p_i \gamma_i \rightarrow q_n = \gamma_n + \beta_n \frac{y - \sum_i^n p_i \gamma_i}{p_n \sum_i^n \beta_i}$$

y, recordando que $\sum_i \beta_i = 1$, derivamos la ecuación genéricade demanda marshalliana del LES en términos de cantidades:

$$q_i = \gamma_i + \beta_i \frac{y - \sum_j^n p_j \gamma_j}{p_i} \quad (i = 1, ..., n)$$

desarrollando:

$$q_i = \gamma_i + \beta_i \frac{y}{p_i} - \beta_i \gamma_1 \frac{p_1}{p_i} - ... - \beta_i \gamma_i - ... - \beta_i \gamma_n \frac{p_n}{p_i} \quad (i = 1, ..., n)$$

o, en términos de gasto:

$$p_i q_i = p_i \gamma_i + \beta_i \left(y - p_1 \gamma_1 - ... - p_i \gamma_i - ... - p_n \gamma_n \right) \quad (i=1,...,n)$$

Así pues, el sistema completo de ecuaciones de demanda del LES para n bienes incluye n ecuaciones con n+1 parámetros por ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 q_1 = p_1 \gamma_1 + \beta_1 (y - p_1 \gamma_1 - ... - p_i \gamma_i - ... - p_n \gamma_n) \\ p_2 q_2 = p_2 \gamma_2 + \beta_2 (y - p_1 \gamma_1 - ... - p_i \gamma_i - ... - p_n \gamma_n) \\ ... \\ p_n q_n = p_n \gamma_n + \beta_n (y - p_1 \gamma_1 - ... - p_i \gamma_i - ... - p_n \gamma_n) \end{array}\right\}$$

El LES se define a partir de una función de utilidad de buen comportamiento cuya relación marginal de sustitución del sistema satisface el principio de decrecimiento:

$$RMS_j^i = -\frac{dq_i}{dq_j} = \frac{U_j}{U_i} = \frac{\beta_j}{\beta_i}\frac{(q_i - \gamma_i)}{(q_j - \gamma_j)} \rightarrow \frac{dRMS_j^i}{dq_j} = -\frac{\beta_j}{\beta_i}\frac{(q_i - \gamma_i)}{(q_j - \gamma_j)^2} < 0$$

de tal forma que el modelo satisface las condiciones de agregación (Engel y Cournot), homogeneidad y simetría, por lo que no será necesario contrastar su imposición.

Adicionalmente, el LES presenta una serie de características teóricas que se derivan directamente de las elasticidades gasto y precio.

En primer lugar, puesto que u(**q**) es monótona creciente, ($\beta_i > 0$), entonces, todos los bienes son normales, es decir, no pueden aparecer bienes inferiores en el modelo:

$$\frac{\partial q_i}{\partial y} = \frac{\beta_i}{p_i} > 0$$

En segundo lugar, la elasticidad gasto revela que no todos los bienes pueden ser de lujo y no todos los bienes pueden ser de primera necesidad.

$$e_i = \frac{y}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial y} = \frac{y}{q_i}\frac{\beta_i}{p_i} = \frac{y}{\gamma_i + \beta_i \dfrac{y - \sum_j^n p_j\gamma_j}{p_i}}\frac{\beta_i}{p_i} = \frac{y\beta_i}{p_i\gamma_i + \beta_i\left(y - \sum_j^n p_j\gamma_j\right)}$$

En tercer lugar, la elasticidad precio directa nos permite afirmar que en el LES todos los bienes presentan demandas inelásticas:

$$e_{ii}^{\,y} = \frac{p_i}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial p_i} = \frac{p_i}{q_i}\left[-\frac{\beta_i\gamma_i p_i - \beta_i(y - \sum_j^n p_j\gamma_j)}{p_i^{\,2}}\right] = \frac{1}{q_i}\left[-\beta_i\gamma_i - \frac{\beta_i(y - \sum_j^n p_j\gamma_j)}{p_i}\right]$$

$$= -\frac{1}{q_i}\left[\beta_i\gamma_i + q_i - \gamma_i\right] = -\frac{q_i}{q_i} - \frac{\beta_i\gamma_i - \gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma_i(1-\beta_i)}{q_i} - 1$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

En cuarto lugar, las elasticidades cruzadas permiten constatar que en este modelo todos los bienes son complementarios brutos entre sí:

$$e_{ij}^{y} = \frac{p_j}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \frac{p_j}{q_i}\left(-\frac{\beta_i \gamma_j}{p_i}\right) = -\beta_i \frac{p_j \gamma_j}{p_i q_i} < 0 \quad (i \neq j = 1, ..., n)$$

Finalmente, podemos comprobar también que todos los bienes son sustitutivos netos, de acuerdo con el signo positivo del efecto de sustitución cruzado:

$$S_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} + q_j \frac{\partial q_i}{\partial y} = -\frac{\beta_i \gamma_j}{p_i} + q_j \frac{\beta_i}{p_i} = \frac{\beta_i}{p_i}\left(q_j - \gamma_j\right) > 0 \quad (i \neq j = 1, ..., n)$$

1.2.- EL SISTEMA DE DEMANDA CASI IDEAL

El sistema de demanda casi ideal (*Almost Ideal Demand System* AIDS) presenta una forma que se deriva de una función de gasto que caracteriza las preferencias PIGLOG:

$$\log c(\mathbf{p},u) = (1-u) \log a(\mathbf{p}) + u \log b(\mathbf{p})$$

donde $0 < u < 1$, de forma que las funciones linealmente homogéneas $a(\mathbf{p})$ y $b(\mathbf{p})$ se pueden interpretar como el gasto de subsistencia ($u = 0$) y aquél que corresponde a una situación de máxima satisfacción ($u = 1$).

Los autores eligen $\log a(\mathbf{p})$ y $\log b(\mathbf{p})$ de tal manera que la función de gasto resultante sea una forma flexible:

$$\log a(\mathbf{p}) = \alpha_0 + \sum_k^n \alpha_k \log p_k + \frac{1}{2}\sum_k^n \sum_j^n \gamma_{kj}^* \log p_k \log p_j$$

$$\log b(\mathbf{p}) = \log a(\mathbf{p}) + \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Sustituyendo obtenemos la siguiente función de gasto:

log c(**p**,u) = log a(**p**) - u log a(**p**) + u log b(**p**) =

$$= \log a(\mathbf{p}) - u \log a(\mathbf{p}) + u \log a(\mathbf{p}) + u\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} = \log a(\mathbf{p}) + u\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}$$

$$\log c(\mathbf{p},u) = \alpha_0 + \sum_k^n \alpha_k \log p_k + \frac{1}{2}\sum_k^n \sum_j^n \gamma_{kj}^{*} \log p_k \log p_j + u\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}$$

siendo α_i, β_i y γ_{ij}^{*} parámetros.

Las funciones de demanda se obtienen a partir de la función de costes aplicando el Teorema de Hotelling

$$\frac{\partial c(\mathbf{p},u)}{\partial p_i} = h_i$$

multiplicando ambos lados de la igualdad por $p_i/c(\mathbf{p},u)$:

$$\frac{\partial c(\mathbf{p},u)}{\partial p_i}\frac{p_i}{c(\mathbf{p},u)} = \frac{\partial \log c(\mathbf{p},u)}{\partial \log p_i} = \frac{p_i h_i}{c(\mathbf{p},u)} = w_i$$

donde w_i es la participación presupuestaria en el bien i.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Para obtener esta derivada logarítmica comenzamos:

$$\log c(\mathbf{p},u) = \alpha_0 + \alpha_1 \log p_1 + \ldots + \alpha_i \log p_i + \ldots + \alpha_n \log p_n +$$

$$+ \frac{1}{2}\gamma_{11}^{*}(\log p_1)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\gamma_{1i}^{*}\log p_1 \log p_i + \ldots + \frac{1}{2}\gamma_{1n}^{*}\log p_1 \log p_n +$$

$$+ \frac{1}{2}\gamma_{21}^{*}\log p_2 \log p_1 + \ldots + \frac{1}{2}\gamma_{2i}^{*}\log p_2 \log p_i + \ldots + \frac{1}{2}\gamma_{2n}^{*}\log p_2 \log p_n + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2}\gamma_{i1}^{*}\log p_i \log p_1 + \ldots + \frac{1}{2}\gamma_{ii}^{*}(\log p_i)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\gamma_{in}^{*}\log p_i \log p_n + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2}\gamma_{n1}^{*}\log p_n \log p_1 + \ldots + \frac{1}{2}\gamma_{ni}^{*}\log p_n \log p_i + \ldots + \frac{1}{2}\gamma_{nn}^{*}(\log p_n)^2 +$$

$$u\beta_0 p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_i^{\beta_i} \ldots p_n^{\beta_n}$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Derivando:

$$\frac{\partial \log c(p,u)}{\partial \log p_i} = \alpha_i + \frac{1}{2}\gamma^*_{1i}\log p_1 + \frac{1}{2}\gamma^*_{2i}\log p_2 + \ldots + \gamma^*_{ii}\log p_i + \ldots + \frac{1}{2}\gamma^*_{ni}\log p_n$$

$$+ \frac{1}{2}\gamma^*_{i1}\log p_1 + \frac{1}{2}\gamma^*_{i2}\log p_2 + \ldots + \frac{1}{2}\gamma^*_{in}\log p_n + \ldots +$$

$$+ u\beta_0 p_1^{\beta_1} \ldots p_n^{\beta_n} \frac{\partial\left(p_i^{\beta_i}\right)}{\partial \log p_i}$$

Dado que:

$$\frac{\partial\left(p_i^{\beta_i}\right)}{\partial \log p_i} = \frac{\partial\left(p_i^{\beta_i}\right)}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \log p_i} = \beta_i p_i^{\beta_i - 1} p_i = \beta_i p_i^{\beta_i}$$

Por tanto, nos queda:

$$w_i = \alpha_i + \sum_j^n \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i u \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}$$

siendo: $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\gamma^*_{ij} + \gamma^*_{ji}\right)$

El agente racional gastará íntegramente su renta:

$$y = c(\mathbf{p},u) \rightarrow \log y = \log c(\mathbf{p},u)$$

$$\log c(\mathbf{p},u) = \alpha_0 + \sum_k^n \alpha_k \log p_k + \frac{1}{2}\sum_k^n \sum_j^n \gamma_{kj}^* \log p_k \log p_j + u\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}$$

de donde:

$$u\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} = \log y - \alpha_0 - \sum_k^n \alpha_k \log p_k - \frac{1}{2}\sum_k^n \sum_j^n \gamma_{kj}^* \log p_k \log p_j$$

y, sustituyendo en las demandas hicksianas, obtenemos las marshallianas:

$$w_i = \alpha_i + \sum_j^n \gamma_{ij} \log p_j +$$
$$+ \beta_i \left[\log y - \alpha_0 - \sum_k^n \alpha_k \log p_k - \frac{1}{2}\sum_k^n \sum_j^n \gamma_{kj}^* \log p_k \log p_j \right]$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

$$w_i = \alpha_i + \sum_j^n \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i \log\left(\frac{y}{P}\right) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\log P = \alpha_0 + \sum_k^n \alpha_k \log p_k + \frac{1}{2}\sum_k^n \sum_j^n \gamma^*_{kj} \log p_k \log p_j$$

Desarrollando la ecuación de demanda :

$$w_i = \alpha_i + \gamma_{i1}\log p_1 + \gamma_{i2}\log p_2 + \ldots + \gamma_{in}\log p_n + \beta_i \log\left(\frac{y}{P}\right) \qquad (i = 1 , \ldots, n)$$

Así pues, el AIDS para n bienes incluye n ecuaciones con n+2 parámetros por ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}
w_1 = \alpha_1 + \gamma_{11}\log p_1 + \gamma_{12}\log p_2 + \ldots + \gamma_{1n}\log p_n + \beta_1 \log\left(\frac{y}{P}\right) \\
w_2 = \alpha_2 + \gamma_{21}\log p_1 + \gamma_{22}\log p_2 + \ldots + \gamma_{2n}\log p_n + \beta_2 \log\left(\frac{y}{P}\right) \\
\ldots \\
w_n = \alpha_n + \gamma_{n1}\log p_1 + \gamma_{n2}\log p_2 + \ldots + \gamma_{nn}\log p_n + \beta_n \log\left(\frac{y}{P}\right)
\end{array}\right\}$$

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Este AIDS también puede obtenerse haciendo uso de la función de beneficio en el consumo correspondiente a la función de gasto PIGLOG :

$$\log c(\mathbf{p},u) = \log a(\mathbf{p}) + u\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}$$

Siendo $d(\mathbf{p}) = \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}$, por tanto, $\log d(\mathbf{p}) = \log\beta_0 + \sum_k^n \beta_k \log p_k$

Partimos de la función de beneficio:

$$\pi(\mathbf{p},r) = \text{Max } \{r\,u - c(\mathbf{p},u)\}$$

cuya condición de primer orden establece que $\frac{\partial c(\mathbf{p},u)}{\partial u} = r$

Aplicando esta condición a la función de gasto PIGLOG:

$$\frac{\partial c(\mathbf{p},u)}{\partial u} = \frac{\partial \log c(\mathbf{p},u)}{\partial u} c(\mathbf{p},u) = d(\mathbf{p})c(\mathbf{p},u) = r \rightarrow c(\mathbf{p},u) = \frac{r}{d(\mathbf{p})}$$

de donde tomamos logaritmos y despejando:

$$\log c(\mathbf{p},u) = \log a(\mathbf{p}) + ud(\mathbf{p}) = \log\left(\frac{r}{d(\mathbf{p})}\right) \rightarrow u = \frac{\log\left(\frac{r}{d(\mathbf{p})}\right) - \log a(\mathbf{p})}{d(\mathbf{p})}$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Sustituyendo en la fórmula del beneficio:

$$\pi(\mathbf{p}, r) = ru - c(\mathbf{p}, u) = r\,\frac{\log\left(\frac{r}{d(\mathbf{p})}\right) - \log a(\mathbf{p})}{d(\mathbf{p})} - \frac{r}{d(\mathbf{p})}$$

$$= \left[\log\left(\frac{r}{d(\mathbf{p})}\right) - \log a(\mathbf{p}) - 1\right]\frac{r}{d(\mathbf{p})} = \left[\log r - \log d(\mathbf{p}) - \log a(\mathbf{p}) - 1\right]\frac{r}{d(\mathbf{p})}$$

$$= \left[\log r - \log\beta_0 - \sum_k \beta_k \log p_k - \alpha_0 - \sum_k \alpha_k \log p_k - \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \gamma_{kj} \log p_k \log p_j - 1\right]\frac{r}{e^{\left(\log\beta_0 + \sum \beta_k \log p_k\right)}}$$

Recordando que:

$$\frac{\partial \pi(\mathbf{p},r)}{\partial p_i} = -\, q_i \rightarrow \frac{\partial \pi(\mathbf{p},r)}{\partial \log p_i}\,\frac{1}{p_i} = -\, q_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

“Aproximación Unitaria: Modelos”

Prof. José Alberto Molina

Calculamos la siguiente derivada:

$$\frac{\partial \pi(\mathbf{p},r)}{\partial \log p_i} = \left[-\beta_i - \alpha_i - \sum_j \gamma_{ij} \log p_j\right] \frac{r}{e^{\left(\log\beta_0 + \sum \beta_k \log p_k\right)}} -$$

$$- \frac{\left[e^{\left(\log\beta_0 + \sum \beta_k \log p_k\right)}\right]\beta_i r}{e^{\left(\log\beta_0 + \sum \beta_k \log p_k\right)2}} [(\log r - \log d(\mathbf{p}) - \log a(\mathbf{p}) - 1] =$$

$$= \frac{\left[-\beta_i - \alpha_i - \sum_j \gamma_{ij} \log p_j\right] r - \left[\log r - \log d(\mathbf{p}) - \log a(\mathbf{p}) - 1\right]\beta_i r}{d(\mathbf{p})} \qquad (i = 1, ..., n)$$

Por tanto, la función de demanda frischiana es:

$$-q_i = \frac{\left[-\beta_i - \alpha_i - \sum_j \gamma_{ij} \log p_j\right] r - \left[\log r - \log d(\mathbf{p}) - \log a(\mathbf{p}) - 1\right]\beta_i r}{d(\mathbf{p}) p_i}$$

con (i = 1, ..., n)

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Ahora bien, sabemos que el coste marginal de la utilidad constituye un parámetro inobservable en este tipo de sistemas de demanda.

La solución consiste en remplazar dicho parámetro por el gasto utilizando la identidad presupuestaria, tras recordar que c(p,u)d(p) = r, es decir, r = y d(**p**), y sustituyendo en la función frischiana, nos queda la siguiente función de demanda marshalliana expresada en cantidades:

$$-q_i = \frac{\left[-\beta_i - \alpha_i - \sum_j \gamma_{ij} \log p_j\right] y d(\mathbf{p}) - \left[\log y - \log a(\mathbf{p}) - 1\right] \beta_i y d(\mathbf{p})}{d(\mathbf{p}) p_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

por consiguiente, en términos de participaciones:

$$w_i = \frac{p_i q_i}{y} = \left[\beta_i + \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j\right] + \left[\log\left(\frac{y}{a(\mathbf{p})}\right) - 1\right] \beta_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

es decir:

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i \log\left(\frac{y}{a(\mathbf{p})}\right) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

ecuación que vuelve a definir el AIDS.

Las restricciones que la teoría impone sobre el modelo son agregación, homogeneidad, simetría y negatividad, la cuales podrán verificarse contrastando ciertas restricciones lineales sobre los parámetros del sistema.

En primer lugar, la condición de agregación exige:

$$\sum_{i}^{n} w_i = 1 \rightarrow \sum_{i}^{n} \alpha_i = 1; \sum_{i}^{n} \gamma_{ij} = \sum_{i}^{n} \beta_i = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

En segundo lugar, la propiedad de homogeneidad establece que las funciones son homogéneas de grado cero en precios y renta, dado $\theta > 0$:

$$w_i(\theta \mathbf{p}, \theta y) = w_i(\mathbf{p}, y) \rightarrow \sum_{j}^{n} \gamma_{ij} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

En tercer lugar, la simetría impone que:

$$S_{ij} = S_{ji} \rightarrow \gamma_{ij} = \gamma_{ji} \qquad (i \neq j,\ i,j = 1, \ldots, n)$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Por último, la condición de negatividad establece que la matriz de efectos de sustitución cruzados $\{S_{ij}\}$ sea semidefinida negativa. Esta última propiedad, a diferencia de las anteriores, no puede ser impuesta como restricción sobre los parámetros del modelo, sin embargo podemos contrastar dicha condición calculando las raíces características de la matriz $\{k_{ij}\}$ cuyo elemento genérico se obtendrá a partir de los parámetros estimados:

$$k_{ij} = \frac{p_i q_j S_{ij}}{y} = \gamma_{ij} + \beta_i \beta_j \log\left(\frac{y}{P}\right) - w_i \delta_{ij} + w_i w_j$$

siendo S_{ij} el efecto de sustitución cruzado entre los bienes i y j, y el delta de Kronecker. En consecuencia, si la matriz $\{k_{ij}\}$ es semidefinida negativa entonces quedará garantizada la propiedad de negatividad dado que las raíces características de esta última tendrán los mismos signos que las correspondientes a la matriz $\{S_{ij}\}$ de Slutsky.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Obtengamos ahora las expresiones de las elasticidades.

Comenzamos con las elasticidades precio. Dado que :

$$q_i = \frac{y w_i}{p_i}$$

$$e_{ij} = \frac{\partial \log q_i}{\partial \log p_j} = \frac{\partial \log y}{\partial \log p_j} + \frac{\partial \log w_i}{\partial \log p_j} - \frac{\partial \log p_i}{\partial \log p_j} = -\delta_{ij} + \frac{\partial \log y}{\partial \log p_j} + \frac{\partial \log w_i}{\partial \log p_j}$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

A partir de esta expresión podemos obtener las elasticidades precio marshallianas, considerando $\frac{\partial \log y}{\partial \log p_j}$ igual a cero:

$$e_{ij}^{y} = -\delta_{ij} + \frac{\partial \log w_i}{\partial \log p_j}$$

Por lo tanto, las elasticidades precio marshallianas serán :

$$e_{ij}^{y} = -\delta_{ij} + \frac{\partial \log w_i}{\partial \log p_j} = -\delta_{ij} + \frac{\partial w_i}{\partial \log p_j}\frac{1}{w_i} = -\delta_{ij} + \left[\gamma_{ij} - \beta_i \frac{\partial \log P}{\partial \log p_j}\right]\frac{1}{w_i}$$

siendo:

$$\frac{\partial \log P}{\partial \log p_j} = \alpha_j + \sum_{k}^{n} \gamma_{kj} \log p_k$$

Por otro lado, la elasticidad renta vendrá dada por:

$$e_i = \frac{\partial \log q_i}{\partial \log y} = 1 + \frac{\partial \log w_i}{\partial \log y} = 1 + \frac{\beta_i}{w_i} \qquad (i\ ,\ j = 1,\ ...,\ n)$$

Finalmente, las elasticidades precio hicksianas serán:

$$e_{ij}^{u} = e_{ij}^{y} + e_i w_j \qquad (i = 1,\ ...,\ n)$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

1.3.- EL MODELO DE ROTTERDAM

El modelo de Rotterdam no se asocia a ninguna función de utilidad concreta.

Partimos de un sistema de demanda genérico: $q_i = q_i\ (\mathbf{p},y)$

que lo aproximamos directamente mediante su diferenciación logarítmica:

$$d\log q_i = \frac{\partial \log q_i}{\partial \log p_1} d\log p_1 + \ldots + \frac{\partial \log q_i}{\partial \log p_n} d\log p_n + \frac{\partial \log q_i}{\partial \log y} d\log y = \sum_j^n \frac{\partial \log q_i}{\partial \log p_j} d\log p_j + \frac{\partial \log q_i}{\partial \log y} d\log y$$

es decir:

$$d\log q_i = \sum_j^n e_{ij}^y d\log p_j + e_i d\log y$$

siendo e_{ij}^y y e_i la elasticidad precio marshalliana y la elasticidad renta, respectivamente.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Para obtener la ecuación de demanda, recordamos la Ecuación de Slutsky $e_{ij}^{y} = e_{ij}^{u} - w_j e_i$

Sustituyendo:

$$d\log q_i = \sum_j^n e_{ij}^{u} d\log p_j + e_i d\log y - \sum_j^n w_j e_i d\log p_j =$$

$$= \sum_j^n e_{ij}^{u} d\log p_j + e_i \left[d\log y - \sum_j^n w_j d\log p_j \right]$$

y multiplicando ambos lados por w_i :

$$w_i d\log q_i = \sum_j^n w_i e_{ij}^{u} d\log p_j + w_i e_i \left[d\log y - \sum_j^n w_j d\log p_j \right]$$

Siendo ahora:

$$\theta_{ij}^{*} = w_i e_{ij}^{u} = \frac{p_i q_i}{y} \frac{p_j}{q_i} \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j} \right)_u = \frac{p_i p_j}{y} \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j} \right)_u$$

$$\mu_i = w_i e_i = \frac{p_i q_i}{y} \frac{y}{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial y} = p_i \frac{\partial q_i}{\partial y}$$

entonces:

$$w_i d\log q_i = \sum_j^n \theta_{ij}^{*} d\log p_j + \mu_i \left[d\log y - \sum_j^n w_j d\log p_j \right]$$

El término entre corchetes es, $d\log \bar{y}$ donde:

$$\bar{y} = \frac{y}{\mathbf{p}}$$

Para verlo, diferenciamos la ecuación presupuestaria:

$$y = \sum_{j}^{n} p_j q_j$$

$$dy = \sum_{j}^{n} p_j dq_j + \sum_{j}^{n} q_j dp_j \rightarrow \frac{dy}{y} = \sum_{j}^{n} \frac{p_j q_j}{y} \frac{dq_j}{q_j} \sum_{j}^{n} \frac{p_j q_j}{y} \frac{dp_j}{p_j} \rightarrow$$

$$\rightarrow d\log y = \sum_{j}^{n} w_j d\log q_j + \sum_{j}^{n} w_i d\log p_j = d\log q + d\log p$$

Por tanto:

$$d\log \bar{y} = d\log y - d\log p = d\log y - \sum_{j}^{n} w_j d\log p_j$$

Consiguientemente, el Modelo de Rotterdam viene expresado por:

$$w_i d\log q_i = \sum_j^n \theta_{ij}^* d\log p_j + \mu_i d\log \bar{y}$$

desarrollando:

$$w_i d\log q_i = \theta_{i1}^* d\log p_1 + \ldots + \theta_{in}^* d\log p_n + \mu_i d\log \bar{y} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Así pues, el sistema completo de ecuaciones de demanda Rotterdam para n bienes incluye n ecuaciones con n+1 parámetros por ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}
w_1 d\log q_1 = \theta_{11}^* d\log p_1 + \ldots + \theta_{1n}^* d\log p_n + \mu_1 d\log \bar{y} \\
w_2 d\log q_2 = \theta_{21}^* d\log p_1 + \ldots + \theta_{2n}^* d\log p_n + \mu_2 d\log \bar{y} \\
\ldots \\
w_n d\log q_n = \theta_{n1}^* d\log p_1 + \ldots + \theta_{nn}^* d\log p_n + \mu_n d\log \bar{y}
\end{array}\right\}$$

Las condiciones teóricas a imponer pueden también verificarse contrastando algunas restricciones lineales sobre los coeficientes del modelo.

La propiedad de agregación exige:

$$\sum_{i}^{n} \mu_i = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i}^{n} \theta_{ij}^{*} = 0 \quad (j = 1, ..., n)$$

En segundo lugar, la propiedad de homogeneidad establece:

$$\sum_{j}^{n} \theta_{ij}^{*} = 0 \quad (i = 1, ..., n)$$

En tercer lugar, la simetría impone:

$$\theta_{ij}^{*} = \theta_{ji}^{*} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

“Aproximación Unitaria: Modelos”

Prof. José Alberto Molina

Finalmente, vamos a concretar fácilmente las elasticidades gasto y elasticidades precio marshallianas y hicksianas a partir de las expresiones que ya hemos obtenido directamente.

En primer lugar, recordamos que $\theta_{ij}^{*} = w_i e_{ij}^{u}$, por tanto la elasticidad precio hicksiana será:

$$e_{ij}^{u} = \frac{\theta_{ij}^{*}}{w_i} \qquad (i, j = 1, ..., n)$$

Análogamente, de $\mu_i = w_i\, e_i$ obtenemos la expresión de la elasticidad gasto:

$$e_i = \frac{\mu_i}{w_i} \qquad (i = 1, ..., n)$$

Finalmente, la Ecuación de Slutksy nos permite obtener la elasticidad precio marshalliana:

$$e_{ij}^{y} = e_{ij}^{u} - w_j e_i \qquad (i, j = 1, ..., n)$$

1.4.- EVIDENCIA EMPÍRICA

Especificación econométrica

Partimos de la especificación genérica :

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= w_1(p_1,p_2,\ldots,p_n,y) \\ w_2 &= w_2(p_1,p_2,\ldots,p_n,y) \\ &\ldots \\ w_n &= w_n(p_1,p_2,\ldots,p_n,y) \end{aligned}\right\}$$

Cuya formulación estocástica se obtiene añadiendo aditivamente una perturbación aleatoria por ecuación:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= w_1(p_1,p_2,\ldots,p_n,y)+u_1 \\ w_2 &= w_2(p_1,p_2,\ldots,p_n,y)+u_2 \\ &\ldots \\ w_n &= w_n(p_1,p_2,\ldots,p_n,y)+u_n \end{aligned}\right\}$$

Las perturbaciones aleatorias u_i representan variables estocásticas que recogen cambios en las preferencias, errores de medida en las variables dependientes y el efecto de variables independientes omitidas.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Algunas propiedades teóricas que debe cumplir un sistema completo de ecuaciones de demanda, implican restricciones sobre el modelo. Por ejemplo, la condición de agregación $\sum_i u_i = 0$.

Así pues, de las n ecuaciones del sistema, sólo n-1 son independientes de tal forma que para evitar la singularidad de la matriz de varianzas, debemos eliminar una ecuación cualquiera del sistema inicial y estimar el subsistema de las n-1 ecuaciones restantes:

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = w_1(p_1,p_2,...,p_n,y) + u_1 \\ w_2 = w_2(p_1,p_2,...,p_n,y) + u_2 \\ ... \\ w_{n-1} = w_{n-1}(p_1,p_2,...,p_n,y) + u_{n-1} \end{array}\right\}$$

el cual puede expresarse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ ... \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & & \\ & X & \\ & & \\ & & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

La estimación de este modelo $\mathbf{w} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{u}$ por MCO (estimación MCO de cada equación separadamente) no sería optima si consideramos los supuestos habituales de errores con media cero: $E(u_{it}) = 0, \forall i \text{ y } \forall t$

correlación contemporánea:

$$E(u_{it}^2) = \sigma_{ii}, \forall i \text{ y } \forall t, E(u_{it}, u_{jt}) = \sigma_{ij}, \forall i,j \text{ y } \forall t$$

pero no serial:

$$E(u_{it}, u_{is}) = 0, \forall i \text{ y } \forall t \neq s \text{ , } E(u_{it}, u_{js}) = 0, \forall i,j \text{ y } \forall t \neq s.$$

La contemporánea indica que las endógenas están relacionadas entre sí en cada instante del tiempo a través de sus componentes estocásticos.

Por su parte, la inexistencia de correlación seria, indica que las variables endógenas no están relacionadas entre sí en distintos momentos del tiempo.

Así pues, E(**u**) = 0, y matriz de varianzas E(**uu'**) = $\sum \otimes$ **V** = $\mathbf{I}_T$, siendo:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & & \sigma_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

y $\otimes$ el producto de Kronecker.

La naturaleza de esta matriz de varianzas, en particular, la existencia de correlación contemporánea indica que cada una de las variables endógenas del modelo contiene información relevante acerca de las demás, lo cual sugiere que la estimación conjunta de las distintas ecuaciones de demanda será más eficiente que el tratamiento individualizado de cada una de ellas, dado que en el primero de los casos podemos beneficiarnos de la información que proporcionan las correlaciones que existen entre los términos de error.

Consiguientemente, el sistema de ecuaciones de demanda debería considerarse como un grupo y estimarse por mínimos cuadrados generalizados (MCG).

Sabemos que el estimador MCG de $\boldsymbol{\beta}$ es:

$$\mathbf{b}^* = (\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}$$

siendo $\mathbf{V}^{-1} = \sum^{-1} \otimes \mathbf{I}_T$.

Ahora bien, dado que $\sum$ es desconocida, resulta operacionalmente complicado obtener $\mathbf{b}^*$.

Para solucionar este problema, el economista Arnold Zellner propuso un procedimiento bietápico en el que se sustituye por una estimación obtenida a partir de los residuos calculados al aplicar MCO a cada una de las ecuaciones del subsistema por separado, y, posteriormente, se utiliza dicha matriz estimada para deducir el vector de parámetros MCG.

Al estimador que se obtiene siguiendo este procedimiento se le conoce como estimador SURE (Ecuaciones de Regresión Aparentemente no Relacionadas) :

$$\hat{\mathbf{b}}^{*} = (\mathbf{X}' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{W}$$

siendo $\hat{V}^{-1}$ la estimación de $\mathbf{V}^{-1}$.

Este método SURE de estimación conjunta, como demuestra Zellner, proporciona estimadores eficientes y asintóticamente equivalentes a los que se obtienen a través del método de Máxima Verosimilitud con Información Completa.

Las ventajas concretas de este tipo de estimación residen, por un lado, en la ganancia de eficiencia al tener en cuenta la correlación contemporánea entre las perturbaciones

y, en segundo lugar, en la posibilidad de contrastar una propiedad teórica que implica restricciones entre los parámetros de las diferentes ecuaciones, esto es, la simetría de los coeficientes γ_{ij}.

Una vez estimado el modelo, debemos aplicarle distintos contrastes de especificación con el fin de asegurarnos que nuestro sistema cumple las propiedades econométricas deseadas, esto es, con el propósito de asegurarnos de que los residuos se ajusten a una estructura típica de ruido blanco.

En particular, dado el tipo de datos con los que trabajamos, series temporales, contrastaremos la autocorrelación conjunta del sistema por medio de dos estadísticos fundamentales, el test de Harvey y el estadístico ρ.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Test de Harvey

Partimos del modelo inicial expresado genéricamente $w_{it} = X_t \beta_i + u_{it}$, realizando, en primer lugar, las regresiones de los residuos obtenidos para cada una de las ecuaciones estimadas del modelo inicial, con sus valores retardados un período, $u_{it} = r_i u_{it-1} + \varepsilon_{it}$, donde r_i es el coeficiente de autocorrelación individual y e_{it} es una perturbación aleatoria distribuida normalmente con media cero y matriz de varianzas y covarianzas constante.

El producto del tamaño muestral por la suma de dichos coeficientes de autocorrelación elevados al cuadrado se distribuye asintóticamente como una χ^2 con tantos grados de libertad como regresiones de los residuos se han realizado.

Rechazamos la hipótesis nula de no autocorrelación cuando el valor del estadístico de Harvey es mayor que el valor crítico de tablas de la distribución χ^2.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Estadístico ρ

Volvemos a partir del modelo expresado genéricamente $w_{it} = X_t \beta_i + u_{it}$, asumiendo que el término de error se especifica como $u_{it} = \rho\, u_{it-1} + \varepsilon_{it}$, donde ρ es el coeficiente de autocorrelación común a todas las ecuaciones del sistema y ε_{it} es una perturbación aleatoria distribuida como hemos especificado en el párrafo anterior.

Sustituyendo ahora esta hipótesis en el modelo inicial obtenemos

$$w_{it} = X_t \beta_i + \rho\,(w_{it-1} - X_{t-1} \beta_i) + \varepsilon_{it}.$$

La significatividad individual del coeficiente de autocorrelación ρ se contrasta por medio del estadístico t de Student asintótico deducido de la estimación conjunta.

Rechazamos la hipótesis nula de no autocorrelación, H_0: $\rho = 0$, si el valor de la t del coeficiente estimador es mayor que el valor crítico de tablas.

Además de estos contrastes conjuntos, la literatura econométrica ha propuestos otros contrastes individuales que se formulan para cada ecuación estimada.

Respecto a la autocorrelación, los estadísticos habituales son el test de Durbin (la h de Durbin si las ecuaciones son dinámicas) y el test de Godfrey.

Este último se calcula realizando, en primer lugar, la regresión de los residuos obtenidos de la estimación del modelo inicial, con sus valores retardados y las variables explicativas del modelo, calculándose el R^2 de esta regresión. El producto del tamaño muestral por dicho R^2 se distribuye asintóticamente como una χ^2 con tantos grados de libertad como retardos de los residuos hemos incluido en la regresión.

Finalmente, el uso de series temporales también permite el contraste de heteroscedasticidad dinámica o perturbaciones ARCH a través del test de Engle.

Se calcula elevando al cuadrado los residuos y realizando la regresión de estos últimos únicamente con sus valores retardados, obviamente también al cuadrado, de donde obtenemos un R^2. El producto del tamaño muestral por dicho R^2 se distribuye asintóticamente como una χ^2 con tantos grados de libertad como retardos de los residuos al cuadrado incluimos en la regresión

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Respecto a los estadísticos usados para contrastar las hipótesis teóricas, el test más usual es estadístico de Wald (W) el cual se distribuye asintóticamente como una χ^2 con tantos grados de libertad como restricciones estamos contrastando.

No obstante, dado que dicho test se encuentra sesgado hacia el rechazo de la hipótesis nula, normalmente se corrige por un factor de corrección para tratar de aproximar su distribución asintótica a la finita.

En este sentido, podemos citar el factor propuesto por el economista español Mauleón, el cual se define de la siguiente forma: FC = (1- n/T)(1- k/T), siendo n el número de ecuaciones estimadas del sistema, k el promedio de parámetros por ecuación y T el tamaño muestral.

Consiguientemente, el test de Wald corregido (W x FC) también se distribuirá como una χ^2 con tantos grados de libertad como restricciones contrastemos.

La aplicación empírica se basa en datos sobre gastos en España proporcionados por el INE para el período 1964-2015

Test Robustez: dos subperiodos y distintos bienes

Cinco categorías finales de gasto (1964-1995):

1. Alimentación

2. Vestido y calzado

3. Alquileres y energía

4. Transporte y comunicaciones

5. Otros bienes y servicios

Análisis descriptivo: Precios (año base 1986)

Grupos de bienes	Media	Desv. est.	Mínimo	Máximo
Alimentación	0.6431	0.4802	0.1125	1.5453
Vestido y calzado	0.6473	0.5202	0.0851	1.5832
Aluileres y energía	0.6551	0.5558	0.0863	1.9783
Transporte y comunic.	0.6516	0.5461	0.1075	1.7500
Otros bienes y servicios	0.6297	0.5499	0.0668	1.6981
Total	0.6423	0.5296	0.0876	1.6960

Grupos de bienes	1965-69	1970-73	1974-79	1980-84	1985-89	1990-95	1965-95
Alimentación	6.19	8.79	16.21	9.99	7.25	4.66	8.95
Vestido y calzado	7.64	10.37	17.77	11.30	8.56	4.21	10.03
Aluileres y energía	5.96	6.99	19.87	16.40	5.32	9.39	11.03
Transporte y comunic.	1.81	4.56	21.21	15.51	5.16	6.96	9.67
Otros bienes y servic.	7.22	9.95	20.45	14.56	7.52	6.03	11.13
Total	6.22	8.59	18.68	13.12	6.90	6.13	10.14

Análisis descriptivo: Participaciones presupuestarias (%)

Grupos de bienes	Media	Desv. est.	Mínimo	Máximo
Alimentación	30.19	7.56	19.71	42.99
Vestido y calzado	9.46	1.13	7.62	10.90
Aluileres y energía	13.94	1.33	12.01	16.57
Transporte y comunic.	12.21	2.74	6.87	15.72
Otros bienes y servicios	34.18	6.32	24.30	44.05

Grupos de bienes	1964	1970	1975	1980	1985	1990	1995
Alimentación	42.26	36.94	35.17	28.05	24.91	21.76	19.71
Vestido y calzado	10.90	10.44	10.22	8.07	8.64	8.88	7.62
Alquileres y energía	15.57	14.44	13.32	16.49	14.50	12.55	13.21
Transporte y comunic.	6.87	9.53	10.47	13.54	13.68	15.20	15.38
Otros bienes y servic.	24.38	28.72	30.79	33.84	38.39	41.59	44.05

Comenzamos la estimación econométrica de los modelos con el sistema lineal de gasto:

$$\left.\begin{array}{l}
p_{1t}q_{1t} = p_{1t}\gamma_{1t} + \beta_1 (y_t - p_{1t}\gamma_{1t} - \ldots - p_{nt}\gamma_{nt}) + u_{1t} \\
p_{2t}q_{2t} = p_{2t}\gamma_{2t} + \beta_2 (y_t - p_{1t}\gamma_{1t} - \ldots - p_{nt}\gamma_{nt}) + u_{2t} \\
\ldots \\
p_{n-1t}q_{n-1t} = p_{n-1t}\gamma_{n-1t} + \beta_{n-1} (y_t - p_{1t}\gamma_{1t} - \ldots - p_{nt}\gamma_{nt}) + u_{n-1t}
\end{array}\right\}$$

Comprobamos que esta versión estática del LES exhibe graves problemas de autocorrelación dado que el valor del test de Harvey resultante es H = 58.61, el cual supera ampliamente el valor crítico de tablas de la distribución χ^2 con 4 grados de libertad al nivel de significación clásico del 5%, 9.49.

Por tanto, constatamos empíricamente una hipótesis muy poco plausible del LES derivada de su carácter estático, esto es, el hecho de que los parámetros γ_i son constantes en el tiempo, sobre todo en la medida en que se desee seguir adoptando su interpretación habitual de cantidades mínimas necesarias para cubrir las necesidades más indispensables, dado que resulta difícil aceptar que ésta medida subjetiva de qué es lo imprescindible no varíe como consecuencia de la experiencia del pasado.

En este sentido, Pollak y Wales han propuesto una dinamización del sistema incorporando la formación lineal de hábitos de consumo que consiste en expresar g_i en función de una tendencia temporal, $\gamma_{it} = \gamma_i + \gamma_{i1}$ t, del consumo del período anterior, $\gamma_{it} = \gamma_i + \gamma_{i1}\ q_{it-1}$, o, en general, de una variable que represente el consumo pasado, $\gamma_{it} = \gamma_i + \gamma_{i1}\ z_{it-1}$, por ejemplo, la media del consumo durante los tres últimos períodos anteriores al corriente.

Hemos adoptado estas generalizaciones en nuestra aplicación empírica constatando que los graves problemas de autocorrelación no se corrigen.

Así, la dinamización del parámetro $\gamma_{it} = \gamma_i + \gamma_{i1}\, t$ proporciona un valor del test de Harvey $H = 52.25$, mientras que la formulación $\gamma_{it} = \gamma_i + \gamma_{i1}\, q_{it-1}$ dá lugar a un valor H = 28.28.

Finalmente, hemos costruido una dinamización conjunta de la siguiete forma $\gamma_{it} = \gamma_i + \gamma_{i1}\, q_{it-1} + \gamma_{i2}\, t$, volviendo a constatar graves problemas de autocorrelación detectados por un valor del test H =20.58, considerablemente más bajo que las cifras anteriores, pero todavía muy por encima del valor crítico de tablas al 5%, 9.49.

Así pues, podemos concluir que el Sistema Lineal de Gasto, tanto en su versión estática como en diferentes versiones dinámicas, presenta graves problemas de autocorrelación utilizando las series temporales españolas desde de los cinco grupos de gasto especificados en el tema anterior, esto es, Alimentación, Vestido y calzado, Alquileres y energía, Transporte y comunicaciones y, finalmente, Otros bienes y servicios.

Consiguientemente, el modelo estimado no satisface los mínimos requisitos econométricos para ser utilizado en la obtención de conclusiones válidas desde un punto de vista estrictamente económico.

Estimamos la versión estática del AIDS:

$$\left.\begin{aligned}
w_{1t} &= \alpha_{10} + \gamma_{11}\log p_{1t} + \ldots + \beta_{1n+1}\log\left(\frac{y_t}{P_t^*}\right) + u_{1t} \\
w_{2t} &= \alpha_{20} + \gamma_{21}\log p_{1t} + \ldots + \beta_{2n+1}\log\left(\frac{y_t}{P_t^*}\right) + u_{2t} \\
&\ldots \\
w_{n-1t} &= \alpha_{n-10} + \gamma_{n-11}\log p_{1t} + \ldots + \beta_{n-1n+1}\log\left(\frac{y_t}{P_t^*}\right) + u_{n-1t}
\end{aligned}\right\}$$

Constatando de nuevo la existencia de ciertos problemas de autocorrelación. En este caso, el valor del test de Harvey resultante es H = 32.89, el cual se sitúa por encima del valor crítico de tablas de la distribución χ^2 con 4 grados de libertad al nivel de significación del 5%, 9.49.

Por consiguiente, Deaton y Muellbauer plantean una dinamización del modelo especificando el término independiente en términos de la variable endógena retardada y una tendencia temporal. Constatamos que dicha generalización presenta un valor del test de Harvey, H = 4.55, que resuelve los problemas de autocorrelación.

Consiguientemente, pasamos a contrastar las hipótesis teóricas de homogeneidad y simetría, obteniendo unas cifras del test de Wald corregido, WC = 18.14 para la homogeneidad y WC = 59.45 para la homogeneidad y simetría, que superan los valores críticos de tablas de la distribución χ^2 con 4 y 10 grados de libertad al nivel de significación del 5%, 9.49 y 18.30, respectivamente. Por lo tanto, ambas hipótesis resultan rechazan estadísticamente.

Dado este resultado, probamos con otras dos dinamizaciones que resultan al eliminar una de las dos nuevas variables.

Así, la formulación $\alpha_{it} = \alpha_i + \alpha\, w_{it-1}$ da lugar a un estadístico H = 15.32, superior al valor crítico y que, por lo tanto, rechaza la ausencia de autocorrelación.

La segunda nueva dinamización, $\alpha_{it} = \alpha_i + \alpha_{i2}\, t$, proporciona un valor del test de Harvey H = 5.30, inferior al valor crítico 9.49, por lo que acepta la ausencia de autocorrelación.

Consiguientemente, al igual que hemos hecho en el caso anterior, procedemos a contrastar las hipótesis teóricas de homogeneidad y simetría en esta nueva versión dinámica del modelo. Los valores del test de Wald corregido,WC = 24.29 para la condición de homogeneidad y WC = 90.97 para la homogeneidad y simetría conjuntamente, vuelven a ser mayores de las cifras de tablas de la distribución χ^2 con 4 y 10 grados de libertad al nivel de significación del 5%, 9.49 y 18.30, respectivamente, por lo que ambas hipótesis teóricas vuelver a resultar rechazadas estadísticamente.

En definitiva, podemos concluir que la versión estática, así como las diferentes versiones dinámicas estimadas del Sistema de Demanda Casi Ideal tampoco satisfacen los mínimos requisitos al utilizar las series temporales españolas de Alimentación, Vestido y calzado, Alquileres y energía, Transporte y comunicaciones y, finalmente, Otros bienes y servicios.

En cuarto lugar, estimamos el Modelo de Rotterdam:

$$\left.\begin{array}{l} w_{1t}d\log q_{1t} = \theta^{*}_{11}d\log p_{1t} + \ldots + \mu_{1}d\log \bar{y}_{t} + u_{1t} \\ w_{2t}d\log q_{2t} = \theta^{*}_{21}d\log p_{1t} + \ldots + \mu_{2}d\log \bar{y}_{t} + u_{2t} \\ \ldots \\ w_{n-1t}d\log q_{n-1t} = \theta^{*}_{n-11}d\log p_{1t} + \ldots + \mu_{n-1}d\log \bar{y}_{t} + u_{n-1t} \end{array}\right\}$$

que presenta valor del test de Harvey H = 4.59, claramente por debajo del valor crítico de tablas de la χ^2 con 4 grados de libertad al nivel del 5%, 9.49, por lo que rechazamos la presencia de autocorrelación.

Seguidamente, contrastamos las hipótesis teóricas de homogeneidad y simetría. Los valores del test de Wald corregido, WC = 7.21 para la condición de homogeneidad y WC = 16.72 para la homogeneidad y simetría conjuntamente, son inferiores que las cifras de tablas de la distribución χ^2 con 4 y 10 grados de libertad al nivel de significación del 5%, 9.49 y 18.30, respectivamente, por lo que ambas hipótesis teóricas son aceptadas estadísticamente. Consiguientemente, imponemos homogeneidad y simetría sobre la versión libre del modelo obteniendo así la versión restringida.

Contrastamos la existencia de autocorrelación en esta nueva versión, obteniendo un valor del test de Harvey, H = 4.97, por lo que volvemos a rechazar claramente la presencia de problemas de autocorrelación.

La versión homogénea y simétrica del sistema de Rotterdam satisface los requisitos econométricos y microeconómicos que le permiten representar adecuadamente la conducta de los consumidores españoles cuando dividen su renta entre Alimentación, Vestido y calzado, Alquileres y energía, Transporte y comunicaciones, y Otros bienes y servicios.

Las elasticidades estimadas del modelo elegido, esto es, el sistema de Rotterdam homogéneo y simétrico, aparecen en la siguiente Tabla.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

“Aproximación Unitaria: Modelos”

Prof. José Alberto Molina

Elasticidades medias

	Alimentación	Vestido y calzado	Alquileres y energía	Transporte y comunicac.	Otros bienes y servicios
Gasto	0.7206* (8.02)	0.8913* (6.76)	0.7424* (4.76)	1.6714* (9.99)	1.1420* (10.96)
Precio marshallianas					
Alimentación	–0.3400* (–4.42)	–0.0171 (–0.42)	–0.0875* (–2.18)	–0.0946 (–1.93)	-0.1812 (-1.71)
Vestido y calzado	–0.1063 (–0.93)	–0.2062 (–1.51)	–0.1511* (–2.37)	–0.0871 (–0.82)	–0.3404 (–1.60)
Alquileres y energía	–0.1962* (–2.09)	–0.0885 (–1.73)	–0.7197* (–8.18)	0.1036 (1.55)	0.1583 (1.02)
Transporte y com.	–0.5210* (–4.39)	–0.1413 (–1.56)	–0.0111 (–0.15)	–0.5997* (–3.83)	–0.3980 (–1.43)
Otros bienes y serv.	–0.2872* (–3.91)	–0.1179* (–2.23)	0.0088 (0.18)	–0.0775 (–0.97)	–0.6680* (–3.73)

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Precio hicksianas	Alimentación	Vestido y calzado	Alquileres y energía	Transporte y comunicac.	Otros bienes y servicios
Alimentación	–0.1224 (–1.55)	0.0510 (1.32)	0.0129 (0.30)	–0.0066 (–0.13)	0.0651 (0.72)
Vestido y calzado	0.1628 (1.35)	–0.1218 (–0.91)	–0.0268 (–0.39)	0.0216 (0.9)	–0.0357 (–0.19)
Alquileres y energía	0.0279 (0.30)	–0.0182 (–0.39)	–0.6162* (–6.65)	0.1943* (2.94)	0.4121* (3.24)
Transporte y com.	–0.0164 (–0.13)	0.0168 (0.19)	0.2218* (2.94)	–0.3956* (–2.37)	0.1733 (0.72)
Otros bienes y serv.	0.0575 (0.72)	–0.0099 (–0.19)	0.1680* (3.24)	0.0619 (0.72)	–0.2776 (–1.78)

El asterisco (*) indica elasticidad significativa al 5%.
Los t-ratios aparecen entre paréntesis.

A new empirical application has been implemented using data from the INE (Instituto Nacional de Estadística).

Eight different groups (1980-2015):

1. Food
2. Clothing and footwear
3. Gross rent, fuel and power
4. Furniture, furnishing and equipment
5. Health
6. Transport and communications
7. Recreation, education and cultural activities,
8. Other goods and services.

After estimating different versions of the AIDS and the Rotterdam models for the Spanish economy from 1980 to 2015, for the eight categories of expenditure, we conclude that the Rotterdam Model is the best micro-econometric model to represent consumer preferences of Spanish consumers in recent decades.

The Rotterdam model was also selected to show the preferences of Spanish households, using data from 1964 to 1995.

Today this model is still valid and continues representing the preferences and demand of Spanish households.

Budget Shares

Variable	Mean	Std. Dev.	Min	Max
Food	19,42%	0.0295312	16,1%	24,6%
Clothing and footwear	6,27%	0.0127249	4,3%	8,3%
Housing, fuel and power	18,52%	0.0250968	15,9%	24,3%
Furniture, furnishings and equ.	5,66%	0.007979	4,1%	7,0%
Medical care and health	2,97%	0.0064528	2,0%	4,2%
Transport and communications	12,76%	0.0106322	10,7%	14,4%
Culture, edu. and recreation	9,41%	0.0032869	8,7%	9,9%
Othergoods and services	24,99%	0.0261669	18,7%	28,3%

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

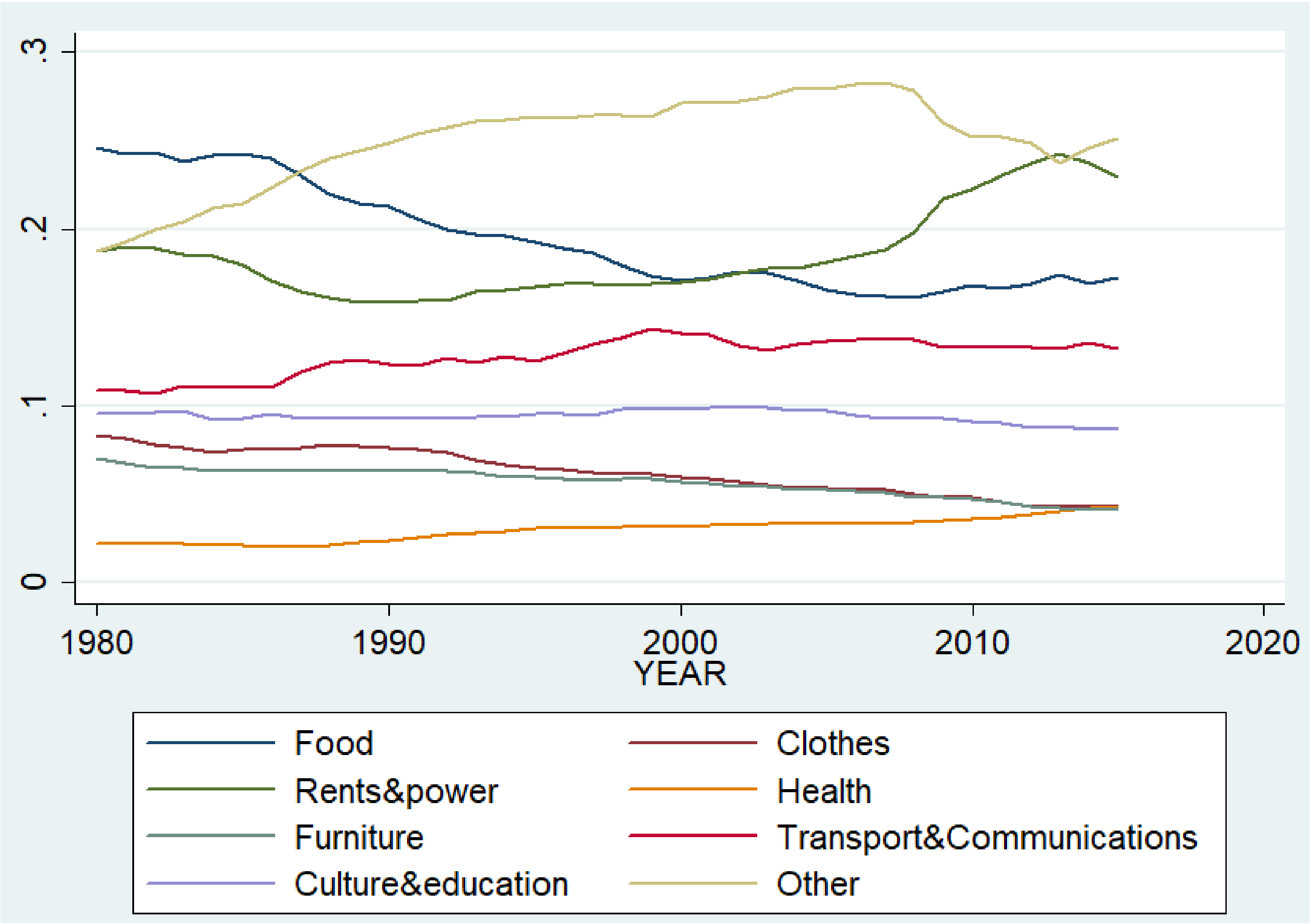
Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Evolution of Budget Shares



Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Evolution of Income Elasticities

	1980	1988	1994	2008	2013	2015	Mean
Food	.6922***	.7938***	.8371***	.8090***	.7902***	.8216***	.8023*** (0.000)
Clothes	.9648***	1.1073***	1.1884***	1.6459***	1.7824***	1.7806***	1.2605*** (0.000)
Rent, water, electricity	.5762***	.5974***	.5936***	.5921***	.4997***	.5197***	.5816*** (0.000)
Furnit, equipment	1.1573***	1.2474***	1.2275***	1.3656***	1.5768***	1.5670***	1.2899*** (0.000)
Medical care	.7938***	.8678***	.5815***	.4989***	.4141***	.3998***	.5700*** (0.000)
Transport and commun.	1.4000***	1.1704***	1.2123***	1.0839***	1.1518***	1.1021***	1.1773*** (0.000)
Recreation, cult. and edu.	1.1847***	1.1725***	1.1118***	.9889***	1.0068***	1.0000***	1.0749*** (0.000)
Othergood and services	1.3613***	1.2269***	1.2162***	1.2672***	1.4172***	1.3732***	1.2694*** (0.000)

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Marshallian Price Elasticities

	Food	Clothes	Rent, water, electr.	Furnit. equip	Medical care	Transp. commun	Culture, edu, recr.	Other goods services
Food	-1.35*** (0.000)	.3250*** (0.0082)	.0616 (0.2865)	.3935*** (0.0002)	.0256 (0.9029)	.1198 (0.2876)	.2964*** (0.0075)	-.24*** (0.0002)
Clothes	.0658 (0.1820)	-1.4*** (0.000)	.0992** (0.0362)	-.1373 (0.1831)	-.1455 (0.5042)	-.0106 (0.8861)	-.0664 (0.4857)	-.0736 (0.1441)
Rent, power	.0605 (0.4197)	.1843 (0.2497)	-.55*** (0.000)	-.0947 (0.5099)	.4537 (0.1277)	-.01460 (0.9112)	.1219 (0.3990)	-.61*** (0.000)
Furnit and equipm.	.0524 (0.1442)	-.1112 (0.1847)	0.0131 (0.7070)	-1.28*** (0.000)	.0542 (0.8084)	.0494 (0.2960)	-.1778* (0.0980)	-.0424 (0.1778)
Medical care	-.1148** (0.0026)	-.0864 (0.3762)	.0629 (0.3745)	.0093 (0.9397)	-2.0*** (0.000)	.0115 (0.8315)	.0183* (0.0639)	-.01467 (0.18)
Transport and comm.	0.1033 (0.2194)	-.0317 (0.8263)	.0666 (0.79)	.1062 (0.3382)	.1276 (0.5827)	-1.598*** (0.0000)	-.0233 (0.8508)	-.07552 (0.3404)
Recreat., cult. edu.	0.1015* (0.0864)	-.1035 (0.4122)	.0907 (0.1111)	-0.3049* (0.0815)	.5735** (0.0493)	-.0238 (0.7778)	-1.38*** (0.000)	-.13** (0.0142)
Other good and services	-.0088 (0.9341)	-.0586 (0.7906)	-.43*** (0.0000)	.0252 (0.8801)	0.3410 (0.3106)	.2891 (0.1223)	-.0257 (0.8841)	-.91*** (0.000)

Hicksian Price Elasticities

	Food	Clothes	Rent, water, electr.	Furnit. and equip	Medical care Health	Transp. and commun.	Culture, edu. recr.	Other goods services
Food	-1.2*** (0.0000)	0.5382*** (0.0000)	.1599*** (0.007)	.6117*** (0.000)	.1220 (0.5741)	.3189*** (0.0047)	-.48*** (0.0000)	.0799 (0.2332)
Clothes	.20*** (0.0000)	-1.3*** (0.0000)	.1361*** (0.0039)	-.0559 (0.5850)	-.1094 (0.6106)	0.6398 (0.3838)	.0017 (0.9860)	.0659 (0.1987)
Rent, water and electricity	.1962*** (0.0072)	.4458*** (0.003)	-.43*** (0.000)	.1730 (0.2130)	.5720** (0.0460)	0.2297* (0.0673)	.3450** (0.0139)	-.21*** (0.0072)
Furnit, equipment	.1881*** (0.000)	-.05 (0.5850)	.0433 (0.213)	-1.2*** (0.0000)	.0839 (0.7074)	.1106** (0.0175)	-.1219 (0.2568)	.0720** (0.0233)
Medical care	.0209 (0.5741)	-.0499 (0.61)	.0797** (0.0460)	.0466 (0.7074)	-1.98** (0.0000)	.0455 (0.4020)	.2141** (0.0311)	.0532 (0.1294)
Transport and comm.	.2390*** (0.0047)	.1280 (0.3838)	.1403* (0.0673)	.2697** (0.0175)	.1998 (0.4020)	-1.5*** (0.0000)	.1130 (0.3701)	.2858*** (0.0008)
Recreation, cult. and edu.	.2372*** (0.0000)	.0022 (0.9860)	.1394** (0.0139)	-.1967 (0.2568)	.6213** (0.0311)	.07478 (0.3701)	-1.3*** (0.0000)	.0821 (0.1288)
Other good and services	.1269 (0.2332)	.2797 (0.1987)	-.27** (0.0072)	.3715** (0.0233)	.4940 (0.1294)	.6052*** (0.0008)	.2629 (0.1288)	-.43*** (0.0049)

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

2.1. EL SITEMA INTERTEMPORALMENTE SEPARADO

Observamos que el AIDS, como otros modelos anteriores, presenta la limitación de que se formula en un contexto de preferencias intertemporalmente separables.

Ahora bien, a pesar de que la separabilidad aditiva en el tiempo se trata de un supuesto de general aceptación, ¿está realmente justificada en los modelos de comportamiento del consumidor?

Vamos a presentar a continuación un modelo que mantiene las dependencias temporales y que constituye la generalización intertemporal del Sistema de Demanda Casi Ideal.

Se trata del sistema de demanda intertemporalmente no aditivo (SNAP) derivado de las preferencias denominadas *simple nonadditive preferences* definidas por el economista Martin Browning.

De acuerdo con estas preferencias no aditivas, las funciones de demanda del consumidor dependen de los precios corrientes así como de los precios de un período anterior y de un período posterior.

En este sentido, la estructura SNAP permite que un bien pueda ser complementario o sustitutivo de si mismo en los períodos inmediatamente anterior e inmediatamente posterior del corriente.

Para facilitar el tratamiento, Browning introduce lo que denomina efectos auto, acuñando el término de autocomplementario para un bien que es complementario de si mismo en el período anterior y de forma análoga para los bienes sustitutos o independientes consigo mismos.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Según Browning, las preferencias SNAP se definen como aquél tipo de estructura en la cual la función de beneficio intertemporal adopta la siguiente forma:

$$\pi(\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^T, r) = -\sum_{t=1}^{T-1} \Phi^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}, r)$$

siendo y los vectores de precios en t y t+1, respectivamente, descontados al período inicial.

Donde cada $\Phi^t(\cdot)$ es una función cóncava y homogénea lineal en (p^t, p^{t+1}, r) y creciente en (p^t, p^{t+1}). Se trata, en definitiva, de una función de pérdidas, es decir, la negativa de una función de beneficio, que, para cada período, presenta una estructura derivada directamente de la función de beneficio intratemporal .

$$\pi(\mathbf{p}, r) = \left[\log\left(\frac{r}{d(\mathbf{p})}\right) - \log a(\mathbf{p}) - 1\right]\frac{r}{d(\mathbf{p})}$$

Bajo este planteamiento, obtengamos las funciones de demanda frischianas, desarrollando el sumatorio:

$$\pi\left(\mathbf{p}^1, \ldots, \mathbf{p}^T, r\right) = -\sum_{t=1}^{T-1} \Phi^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}, r)$$

$$= -[\Phi^1(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, r) + \cdots + \Phi^{t-1}(\mathbf{p}^{t-1}, \mathbf{p}^t, r) + \Phi^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}, r) + \cdots + \Phi^{T-1}(\mathbf{p}^{T-1}, \mathbf{p}^T, r)]$$

y recordamos que las funciones frischianas pueden expresarse, genéricamente, como

$\mathbf{q}^t = -\nabla_t \pi\left(\mathbf{p}^1, \ldots, \mathbf{p}^T, r\right)$, siendo ∇_t el gradiente de la función de beneficio con respecto a los precios del período t.

En el caso particular de las preferencias SNAP:

$$\mathbf{q}^t = -\nabla_t \Phi^{t-1}(\mathbf{p}^{t-1}, \mathbf{p}^t, r) + \nabla_t \Phi^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}, r)$$

Comprobando que cantidades corrientes dependen de los precios correspondientes a un período anterior, a un período posterior y al mismo período, además, del precio de la utilidad r,

$$\mathbf{q}^t = \mathbf{q}^t(\mathbf{p}^{t-1}, , \mathbf{p}^t, \mathbf{q}^{t+1} r)$$

Estas preferencias SNAP permiten derivar un sistema de demanda marshalliana que mantiene las dependencias intertemporales. Para obtenerlo, partimos de la función de beneficio intratemporal:

$$\pi\,(\mathbf{p},\mathrm{r}) = \left[\log\left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{d}(\mathbf{p})}\right) - \log \mathrm{a}(\mathbf{p}) - 1\right]\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{d}(\mathbf{p})}$$

A partir de la cual derivamos la función de pérdida correspondiente $\Phi^{t-1}(p^{t-1},p^{t},r)$, incorporando los precios del período anterior con el fin de eliminar la separabilidad intertemporal:

$$\Phi^{t-1}(\,\mathbf{p}^{t-1},\mathbf{p}^{t},\mathrm{r}) = -\left[\log\left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{d}(\mathbf{p}^{t})}\right) - \log \mathrm{a}(\mathbf{p}^{t}) - 1 + \log \mathrm{f}(\mathbf{p}^{t-1})\right]\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{d}(\mathbf{p}^{t})}$$

Donde $f(p^{t-1})$ es un función homogénea de grado cero.

Ahora bien, en este modelo SNAP se deben considerar las consecuencias de la existencia de incertidumbre, la cual provoca una serie de diferencias en las funciones de demanda frischianas respecto a las obtenidas en un ambiente con información perfecta. Estas diferencias se derivan de que, en incertidumbre, el agente va a disponer, conforme transcurra el tiempo, de nueva información que incorporará en el parámetro r_t y que lo irá modificando sucesivamente.

Así, las cantidades dependen, a diferencia de lo que sucedía con información perfecta, de los precios corrientes de los bienes y del precio de la utilidad que varia con el tiempo.

Consiguientemente, las nuevas funciones de demanda frischianas correspondientes a las preferencias SNAP serán:

$$\mathbf{q}^t = \nabla_t \Phi^{t-1}(\mathbf{p}^{t-1}, \mathbf{p}^t, r_t) + \nabla_t \Phi^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}, r_t)$$

donde r_t se refiere a un período concreto t y el resto de los precios de los bienes también son corrientes.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

La función relativa a un bien concreto, el i-ésimo:

$$\mathbf{q}_{it} = \frac{\partial \Phi^{t-1}(\mathbf{p}^{t-1}, \mathbf{p}^{t}, r_t)}{\partial p_{it}} + \frac{\partial \Phi^{t}(\mathbf{p}^{t}, \mathbf{p}^{t+1}, r_t)}{\partial p_{it}} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Para obtener la función de demanda marshalliana correspondiente a las preferencias SNAP, comenzamos adoptando las siguientes expresiones para los precios:

$$\log a(\mathbf{p}^t) = \alpha_o + \sum_k \alpha_k \log p_{kt} + \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \gamma_{kj} \log p_{kt} \log p_{jt}$$

$$\log d(\mathbf{p}^t) = \log \beta_0 + \sum_k \beta_k \log p_{kt}$$

$$\log f(\mathbf{p}^t) = \sum_k \theta_k \log p_{kt}$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Por tanto, las funciones de pérdidas correspondientes a los períodos t-1 y t quedan como:

$$\Phi^{t-1}(\mathbf{p}^{t-1}, \mathbf{p}^{t}, r_t) = - [\log r_t - \log d(\mathbf{p}^t) - \log a(\mathbf{p}^t) -1 + \log f(\mathbf{p}^{t-1})] \frac{r_t}{d(\mathbf{p}^t)} =$$

$$= -\left[\log r_t - \log \beta_0 - \sum_k \beta_k \log p_{kt} - \alpha_0 - \sum_k \alpha_k \log p_{kt} - \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \gamma_{kj} \log p_k \log p_{jt} - 1 + \sum_k \theta_k \log p_{kt-1}\right] e^{\frac{r_t}{(\log \beta_0 - \sum_k \beta_k \log \mathbf{p}_{kt})}}$$

y, por otro lado

$$\Phi^{t}(\mathbf{p}^{t}, \mathbf{p}^{t+1}, r_{t+1}) = - [\log r_t - \log d(\mathbf{p}^{t+1}) - \log a(\mathbf{p}^{t+1}) -1 + \log f(\mathbf{p}^{t})] \frac{r_t}{d(p^{t+1})} =$$

$$= -\left[\log r_t - \log \beta_0 - \sum_k \beta_k \log p_{kt+1} - \alpha_0 - \sum_k \alpha_k \log p_{kt+1} - \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \gamma_{kj} \log p_{kt+1} \log p_{jt+1} - 1 + \sum_k \theta_k \log p_{kt}\right] e^{\frac{r_t}{(\log \beta_0 - \sum_k \beta_k \log \mathbf{p}_{kt+1})}}$$

Calculemos ahora las derivadas que aparecen en la función frischiana relativa al bien i-ésimo:

$$\frac{\partial \Phi^{t-1}\left(p^{t-1}, p^{t}, r_t\right)}{\partial \log p_{it}} = -\left[\left[-\beta_i - \alpha_i - \sum_j \gamma_{ij} \log p_{jt}\right] \frac{r_t}{e^{\log\beta_0 + \sum \beta_k \log p_{kt}}} - \right.$$

$$- \frac{\left[e^{\left(\log\beta_0 + \sum \beta_k \log p_{kt}\right)}\right]\beta_i r_t}{e^{\left(\log\beta_0 + \sum \beta_k \log p_{kt}\right)2}} \left[\log r_t - \log d(\mathbf{p}^t) - \log a(\mathbf{p}^t) - 1 + \log f(\mathbf{p}^{t-1})\right]\Big] =$$

$$\frac{\left[\beta_i + \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j\right] r_t + \left[\log r_t - \log d(\mathbf{p}^t) - \log a(\mathbf{p}^t) - 1 + \log(\mathbf{p}^{t-1})\right]\beta_i r_t}{d(\mathbf{p}^t)}$$

(i = 1, ..., n)

Sabiendo que:

$$\frac{\partial \Phi^{t-1}(\mathbf{p}^{t-1},\mathbf{p}^{t},r_t)}{\partial p_{it}} = \frac{\partial \Phi^{t}(\mathbf{p}^{t},\mathbf{p}^{t+1},r_t)}{\partial \log p_{it}}\frac{1}{p_{it}} \qquad (i = 1, ..., n)$$

y recordando que, como en el AIDS, sustituimos el parámetro inobservable r_t por y_t d($\mathbf{p}^t$), nos queda:

$$\frac{\partial \Phi^{t-1}(\mathbf{p}^{t-1},\mathbf{p}^{t},r_t)}{\partial p_{it}} =$$

$$= \frac{\left[\beta_i + \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j\right] y_t + \left[\log y_t - \log a(\mathbf{p}^t) - 1 + \log f(\mathbf{p}^{t-1})\right]\beta_i y_t}{p_{it}}$$

(i = 1, ..., n)

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Por otro lado, directamente:

$$\frac{\partial \Phi^{t-1}(\mathbf{p}^{t-1}, \mathbf{p}^{t}, r_t)}{\partial p_{it}} = \frac{\partial \Phi^{t}(\mathbf{p}^{t}, \mathbf{p}^{t+1}, r_t)}{\partial \log p_{it}} \frac{1}{p_{it}} =$$

$$= -\theta_i \frac{r_t}{e^{(\log \beta^0 + \sum \beta_k \log p_{kt+1})}} \frac{1}{p_{it}} = -\theta_i \frac{y_t d(\mathbf{p}^{t})}{d(\mathbf{p}^{t+1}) p_{it}} \text{(i = 1, ..., n)}$$

La suma de estas dos derivadas constituye la expresión completa de la función marshalliana en términos de cantidades que corresponde a este tipo de preferencias SNAP. Si deseamos expresarla en participaciones:

$$w_{it} = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i \log\left(\frac{y}{a(\mathbf{p}^t)}\right) + \beta_i \sum_k \theta_k \log p_{kt-1} - \theta_i \frac{d(\mathbf{p}^t)}{d(\mathbf{p}^{t+1})}$$

(i = 1, ..., n)

con las expresiones de los precios indicadas anteriormente.

Este modelo SNAP puede reescribirse como:

$$w_{it} = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i \log\left(\frac{y}{a(\mathbf{p}^t)}\right) + \beta_i \sum_k \theta_k \log p_{kt-1} + \delta_i \frac{d(\mathbf{p}^t)}{d(\mathbf{p}^{t+1})} \quad (i = 1, ..., n)$$

Lo cual supone cierta relajación en el sentido de que los coeficientes de los índices de precios futuros (δ_i) no tienen porqué coincidir necesariamente con los parámetros correspondientes a los precios pasados (θ_k).

Por tanto, el sistema intertemporalmente no aditivo para n bienes incluye n ecuaciones con 2n+3 parámetros por ecuación, coincidiendo algunos coeficientes en distintas ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}
w_{1t} &= \alpha_1 + \gamma_{11}\log p_{1t} + \cdots + \beta_1 \log\left(\frac{y}{a(\mathbf{p}^t)}\right) + \beta_1\theta_1 \log p_{1t-1} + \cdots + \delta_1 \frac{d(\mathbf{p}^t)}{d(\mathbf{p}^{t+1})} \\
w_{2t} &= \alpha_2 + \gamma_{21}\log p_{1t} + \cdots + \beta_2 \log\left(\frac{y}{a(p^t)}\right) + \beta_2\theta_1 \log p_{1t-1} + \cdots + \delta_2 \frac{d(p^t)}{d(p^{t+1})} \\
&\ldots \\
w_{nt} &= \alpha_n + \gamma_{n1}\log p_{1t} + \cdots + \beta_n \log\left(\frac{y}{a(\mathbf{p}^t)}\right) + \beta_n\theta_1 \log p_{1t-1} + \cdots + \delta_n \frac{d(\mathbf{p}^t)}{d(\mathbf{p}^{t+1})}
\end{aligned}\right\}$$

Vemos que esta ecuación constituye un AIDS excepto por los dos últimos términos que son los que, en definitiva, caracterizan la no separabilidad intertemporal.

Consiguientemente, el SNAP puede considerarse como una extensión del AIDS en el que hemos relajado la hipótesis de aditividad intertemporal de las preferencias.

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

“Aproximación Unitaria: Modelos”

Prof. José Alberto Molina

En el sistema SNAP las participaciones vienen dadas en términos de precios pasados y futuros, además de contemporáneos, por lo que debemos tener en cuenta esta característica a la hora de abordar las implicaciones que las propiedades teóricas tienen sobre los parámetros del sistema.

La primera de las condiciones es la de agregación que, al igual que en el AIDS, en el modelo SNAP implica:

$$\sum_{i}^{n} \alpha_i = 1 \qquad \sum_{i}^{n} \gamma_{ij} = \sum_{i}^{n} \beta_i = \sum_{k}^{n} \theta_k = 0 \qquad (j = 1, ..., n)$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

La propiedad de homogeneidad supone una doble restricción en el SNAP. La primera se refiere a variables contemporáneas, mientras que la segunda se formula en términos de los precios del período anterior:

Homogeneidad contemporánea: $\sum_{j}^{n} \gamma_{ij} = 0$ (i = 1, ..., n)

Homogeneidad retardada: $\sum_{k}^{n} \theta_{k} = 0$

La simetría también impone una doble restricción. La primera es idéntica a la del modelo estático AIDS, mientras que la segunda supone que los cambios en los precios corrientes producen los mismos efectos sobre las cantidades demandadas en el período inmediatamente anterior y posterior al de la modificación del precio:

simetría intratemporal: $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ $(i \neq j,\ i, j = 1, ..., n)$

simetría intertemporal: $\theta_i = -\delta_i$ $(i = 1, ..., n)$

Además de estas restricciones que establece la teoría neoclásica del comportamiento del consumidor, podemos considerar otras que nos parecen de interés en el marco intertemporal en el que se define el modelo SNAP.

Una primera será sencillamente un test de aditividad intertemporal. Su aceptación anula los dos últimos términos del modelo y, por lo tanto, acepta la separabilidad intertemporal que preside su comportamiento

$$\theta_i = \delta_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Una segunda restricción adicional es un test de miopía futura. La aceptación de esta hipótesis rechaza la influencia de los precios futuros como variables explicativas de la conducta corriente del consumidor:

$$\delta_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Obtengamos las elasticidades.

Veamos, las elasticidades precio contemporáneas:

$$e_{ijt} = \frac{\partial \log q_{it}}{\partial \log p_{jt}} = \frac{\partial \log y_t}{\partial \log p_{jt}} + \frac{\partial \log w_{it}}{\partial \log p_{jt}} - \frac{\partial \log p_{it}}{\partial \log p_{jt}} = -\delta_{ij} + \frac{\partial \log y_t}{\partial \log p_{jt}} + \frac{\partial \log w_{it}}{\partial \log p_{jt}}$$

Recordando en AIDS que $\partial \log y_t / \partial \log p_{jt} = 0$ y además:

$$\frac{\partial \log w_{it}}{\partial \log p_{jt}} = \frac{\partial w_{it}}{\partial \log p_{jt}} \frac{1}{\partial w_{it}} = \left[\gamma_{ij} - \beta_i \frac{\partial \log a(\mathbf{p}^t)}{\partial \log p_{jt}} + \delta_i \frac{\partial\, d(\mathbf{p}^t)}{\partial \log p_{jt}} \frac{1}{d(\mathbf{p}^{t+1})}\right] \frac{1}{w_{it}}$$

donde:

$$\frac{\partial \log a(\mathbf{p}^t)}{\partial \log p_{jt}} = \alpha_j + \sum_k^n \gamma_{kj} \log p_k \quad \frac{\partial\, d(\mathbf{p}^t)}{\partial \log p_{jt}} = \frac{\partial \log d(\mathbf{p}^t)}{\partial \log p_{jt}} d(\mathbf{p}^t) = \beta_i d(\mathbf{p}^t)$$

Obtenemos la elasticidad precio marshalliana contemporánea:

$$e_{ij}^y = -\delta_{ij} + \left[\gamma_{ij} - \beta_i \left(\alpha_j + \sum_k^n \gamma_{ij} \log p_k\right) + \delta_i \beta_j \frac{d(\mathbf{p}^t)}{d(\mathbf{p}^{t+1})}\right] w_{it}^{-1}$$

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Veamos ahora las elasticidades precio directas correspondientes a un período anterior y posterior.

En primer lugar:

$$e^{y}_{iit-1} = \frac{\partial \log q_{it-1}}{\partial \log q_{it}} = \frac{\partial \log y_{it-1}}{\partial \log p_{it}} + \frac{\partial \log w_{it-1}}{\partial \log p_{it}} - \frac{\partial \log p_{it-1}}{\partial \log p_{it}} = \frac{\partial \log w_{it-1}}{\partial \log p_{it}} = -\frac{\delta_i\, \beta_i\, d(\mathbf{p}^{t-1})}{w_{it-1}\, d(\mathbf{p}^{t})}$$

dado que:

$$\frac{\partial \log w_{it-1}}{\partial \log p_{it}} = -\frac{\delta_i \beta_i d(\mathbf{p}^{t}) d(\mathbf{p}^{t-1})}{\left(d(\mathbf{p}^{t})\right)^2}$$

En segundo lugar:

$$e^{y}_{iit+1} = \frac{\partial \log q_{it+1}}{\partial \log p_{it}} = \frac{\partial \log w_{it+1}}{\partial \log p_{it}} = \frac{\beta_i \theta_i}{w_{it+1}}$$

De forma inmediata podemos obtener la elasticidad renta:

$$e_{it} = \frac{\partial \log q_{it}}{\partial \log y_t} = 1 + \frac{\partial \log w_{it}}{\partial \log y_t} = 1 + \frac{\beta_i}{w_{it}}$$

y la elasticidad hicksiana a través de la ecuación de Slutsky:

$$e_{ijt}^{u} = e_{ijt}^{y} + e_{it} w_{jt}$$

2.2.- EVIDENCIA EMPÍRICA

French annual time-series of non-durable goods expenditures obtained from OECD National Accounts, Vol. II (Detailed Tables) for the period 1964-1992 were used to estimate the empirical model. All data are expressed in billions. Current and constant expenditures were divides into six categories:

Group 1: Food

Group 2: Beverages

Group 3: Clothing and footwear

Group 4: Gross rent, fuel and power

Group 5: Medical expenses

Group 6: Other non-durable goods

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Descriptive analysis

Budget Shares (%)	1964	1970	1975	1980	1985	1992	Mean
Food	29	25	22	20	19	16	22
Beverages	5	4	3	3	2	2	3
Clothing and footwear	11	9	9	8	7	6	8
Gross rent, fuel and power	12	16	18	20	21	22	18
Medical expenses	9	11	9	8	9	11	10
Other non-durable goods	31	32	37	39	38	39	36
Rates of inflation (%)	1965-69	1970-73	1974-78	1979-85	1986-89	1990-92	1965-92
Food	3.38	6.58	9.11	9.52	3.17	2.09	6.20
Beverages	3.33	7.59	9.85	9.70	3.05	4.42	6.53
Clothing and footwear	2.48	5.33	10.79	9.94	5.15	2.94	6.66
Gross rent, fuel and power	7.20	6.74	10.06	11.84	4.00	4.12	8.02
Medical expenses	4.57	2.12	2.15	7.99	2.29	0.82	4.16
Other non-durable goods	4.80	5.36	10.51	10.37	3.57	2.83	7.04

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Specification tests

	Breusch-Godfrey	Engle
Food	0.590	0.557
Beverages	0.631	0.001
Clothing and footwear	-0.124	0.399
Gross rent, fuel and power	-0.673	0.037
Medical expenses	1.757	2.035
Other non-durable goods	0.367	0.070

Critical values: standard normal at the 5% level: 1.96; $\chi^2(1)_{0.05} = 3.84$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Hypotheses tests

	Wald
Current homogeneity (5 d.f.)	59.39*
Lagged homogeneity (1 d.f.)	1.37
Homogeneity (6 d.f.)	63.64*
Intratemporal symmetry (15 d.f.)	550*
Intertemporal symmetry (5 d.f.)	25.58*
Symmetry (20 d.f.)	634*
Intertemporal separability (5 d.f.)	**28.28***
Myopic behaviour (5 d.f)	494*

* Rejected theoretical hypotheses at the 5% level.
Critical values:

$$\chi^2(1)_{0.05} = 3.84, \chi^2(5)_{0.05} = 11.07 \;, \chi^2(16)_{0.05} = 12.59, \chi^2(15)_{0.05} = 24.99, \chi^2(20)_{0.05} = 31.41.$$

Máster Universitario Investigación Economía

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Zaragoza

Microeconomía

"Aproximación Unitaria: Modelos"

Prof. José Alberto Molina

Parameters and elasticities

	α_i	γ_{i1}	γ_{i2}	γ_{i3}	γ_{i4}	γ_{i5}	γ_{i6}	β_i	θ_i	δ_i	$\beta_i\theta_i$	e_i	e_{ii}
Food	1.793 (9.3)*	0.121 (6.5)*	-0.045 (-2.1)*	0.033 (2.4)*	-0.002 (-0.9)	-0.011 (-1.7)	-0.088 (-3.1)*	-0.123 (-15)*	0.240 (1.7)	-0.634 (-3.4)*	-0.029 (-1.7)	0.44 (12)*	-0.13 (-1.7)
Beverages	0.204 (3.2)*	-0.008 (-1.4)	0.026 (3.9)*	0.015 (4.6)*	0.016 (2)*	-0.004 (-2.2)*	-0.047 (-5.5)*	-0.021 (-8.5)*	-0.184 (-3)*	-0.007 (-0.1)	0.003 (2.8)*	0.40 (5.7)*	0.13 (3.5)*
Clothing	-0.276 (-2)*	-0.015 (-0.9)	0.052 (3.2)*	0.026 (3.3)*	-0.079 (-3.9)*	-0.014 (-3.2)*	0.025 (1.1)	-0.025 (-3.9)*	0.100 (1.1)	0.551 (4.2)*	-0.002 (-1.1)	0.72 (10)*	-0.03 (-1.2)
Gross, rent, fuel and power	-0.476 (-1.3)	-0.056 (-1.6)	0.050 (1.2)	-0.037 (-2.1)*	0.104 (2)*	-0.008 (-0.1)	-0.057 (-1.1)	0.054 (3.4)*	-0.267 (-3.8)*	0.261 (0.8)	-0.014 (-2.5)*	1.29 (15)*	-0.08 (-2.6)*
Medical expenses	0.054 (0.2)	-0.038 (-1.3)	0.001 (0.1)	0.092 (6.9)*	0.184 (5.3)*	0.085 (11)*	-0.317 (-8.6)*	0.023 (2.4)*	-0.098 (-2.2)*	-0.133 (-0.5)	-0.002 (-1.6)	1.23 (13)*	-0.02 (-1.6)
Other non-durable goods	-0.299 (-0.8)	-0.003 (-0.1)	-0.086 (-2.2)*	-0.130 (-7.2)*	-0.223 (-4.6)*	-0.054 (-5.1)*	0.485 (9.7)*	0.092 (6.4)*	0.209 (1.1)	-0.037 (-0.1)	0.019 (1.1)	1.25 (31)*	0.05 (1.2)

* Rejected non-individual significance at the 5% level,
t-rates at the 5% level: 1.96