Tema 5: Juegos de negociación

1. **Introducción**
   - 1.1. Similitudes y diferencias con los temas anteriores
     - 1.1.1. Negociación y búsqueda de intereses comunes
     - 1.1.2. Puede haber negociaciones o repartos; pensemos en los procesos de quita de una deuda
     - 1.1.3. Pueden presentarse transferencias o pagos laterales
     - 1.1.4. Aumenta el interés por los pagos frente a las estrategias al estudiarlos
   - 1.2. Consecuencias
     - 1.2.1. El conjunto de soluciones será más reducido: sólo las eficientes serán consideradas
     - 1.2.2. Nos encontramos con otros tipos de soluciones: Nash, Kalai-Smorodinsky, Stahl-Rubinstein,...

2. **Criterios de racionalidad y soluciones de Nash**
   - 2.1. Conjuntos factibles convexos
     - 2.1.1. Cláusula convexa
     - 2.1.2. Pagos laterales
       - 2.1.2.1. Aplicar los dos criterios a

	I	**J**	**K**
A	2,1	-1,3	1,0
B	1,2	3,0	2,1

   - 2.2. Conjuntos de negociación
     - 2.2.1. Elementos del conjunto factible
     - 2.2.2. Eficientes o Pareto-óptimos
     - 2.2.3. Por encima de las condiciones del punto de retirada o desacuerdo.
       - 2.2.3.1. Puede ser un EN [en el ejemplo anterior el EN es (7/5,3/2)], los maximin de cada jugador [en el ejemplo anterior (1,1)], o responder a otro criterio
       - 2.2.3.2. Aplicarlo al conjunto previo con retiradas en (0,0), (0,1), (7/5,3/2) y (1,1)
   - 2.3. Condiciones formales de la solución de Nash
     - 2.3.1. Pertenecer al conjunto de negociación, ser por tanto factible, aceptable y eficiente
     - 2.3.2. Ser simétrica (si hay simetría en el juego)
     - 2.3.3. Invariancia lineal
     - 2.3.4. Independencia de las alternativas irrelevantes
   - 2.4. La solución de Nash se obtiene, si **d**=(d_1, d_2) es el punto de desacuerdo, optimizando sobre el conjunto de negociación
     - 2.4.1. El producto $\Pi(U_i - d_i)$, en la llamada solución regular,
     - 2.4.2. $\Pi(U_i - d_i)^{\alpha i}$, $\alpha_i>0$, en la denominada solución generalizada
     - 2.4.3. Interpretación gráfica con curvas de isoproducto
     - 2.4.4. Aplicarlo al juego de reparto de una cantidad dada D =100 entre dos jugadores. Comprobar la eficiencia, simetría e invariancia lineal.
   - 2.5. El reparto de Nash en un quiebra con deudas no iguales [usar D = 100 y deudas iguales a 60 y 90]
     - 2.5.1. Solución regular con **d**=(0,0)
     - 2.5.2. Solución con **d**≠(0,0) [el 50% se reparte proporcionalmente a deudas, **d**≠(20,30)]
     - 2.5.3. Solución generalizada con **d** igual o diferente del (0,0) [calcularlo con **d**≠(20,30), α_1=2, α_2=3]

2.6. Solución de Nash con amenazas para el juego con pagos (a_{ij}, b_{ij}) con el conjunto de negociación dado por $u_2 = b - au_1$

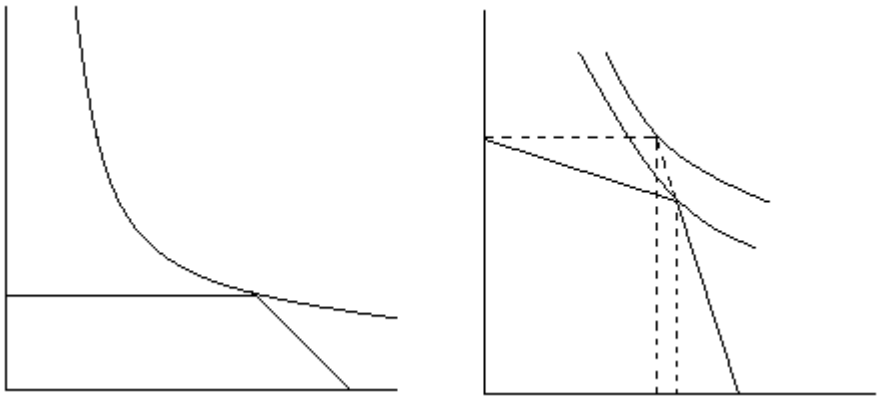
2.6.1. Solución del juego: $U_1 = \frac{1}{2a}(b + w)$, $U_2 = \frac{1}{2}(b - w)$, siendo w el pago solución del juego de suma cero $\begin{pmatrix} aa_{11}^1 - a_{11}^2 & aa_{12}^1 - a_{12}^2 \\ aa_{21}^1 - a_{21}^2 & aa_{22}^1 - a_{22}^2 \end{pmatrix}$

2.6.2. Demostrar la solución anterior

3. **Solución Kalai-Smorodinsky**

3.1. El criterio de monotonía y su significado económico

3.2. La solución de Nash no mantiene la monotonía. Usar para explicarlo los juegos descritos por



3.3. Condiciones formales de la solución Kalai-Smorodinsky: las mismas de Nash sustituyendo "independencia de las alternativas irrelevantes" por "monotonía"

3.4. Obtención de la solución de Kalai-Smorodinsky

3.5. Aplicación a un reparto de quiebra con D = 12, y deudas C1 = 5 y C2 = 10 [La solución Nash con **d**=(2,4) es (5,7), y la K-S es (4,8)].

4. **Solución con negociación secuencial**

4.1. Caracterización de la negociación secuencial. Aplicación al reparto de D

4.1.1. El dinero sufre una depreciación o descuento δ

4.1.2. Notar que pedir todo o no pedir nada por parte no son soluciones óptimas

4.2. Solución de Stahl-Rubinstein.

4.2.1. Soluciones: $a_1 = D/(1+\delta)$, $a_2 = D\,\delta/(1+\delta)$,

4.2.2. Dependencia de la tasa de descuento [razonar con δ = 0.25, 0.5, 1]

5. Ejercicios propuestos

5.1. Soluciones tipo Nash

5.1.1. Obtener los conjuntos de negociación para los criterios; combinación lineal convexa sin y con pagos laterales, y para los puntos de retirada (1,1) y (0,1) del juego descrito por

	I	**J**
A	4,4	0,6
B	6,0	1,1

5.1.2. Comprobar que, en la solución Nash generalizada, la ratio de los poderes de negociación es la elasticidad de sustitución de las utilidades respecto el punto de retirada

5.1.3. Dado el juego definido por:

	I	**J**
A	1,2	8,3
B	4,4	2,1

obtener las soluciones regulares de Nash, si el conjunto de negociación se define sin pagos laterales, para dos situaciones diferentes de desacuerdo, una cuando el punto de retirada coincide con el maximin de cada jugador con estrategias mixtas y otra cuando se define por el criterio de amenaza. [Por maximines, d=(10/3,5/2); por amenaza, w=-7/4]

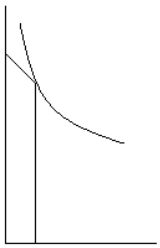
5.1.4. Dado el juego definido por:

	I	**J**
A	3,1	2,1
B	2'5,1'5	1,-1

5.1.4.1. Hallar, si existen, los equilibrios Nash e interpretarlos como posibles puntos de desacuerdo

5.1.4.2. Hallar la solución de Nash cooperativa con amenazas [w=3/2; U_1 = 11/4; U_2 = 5/4]

5.1.5. Le llaman como experto a testificar en un caso de quiebra. Le preguntaran si debería utilizarse la solución de Nash, ¿qué respondería? ¿Cómo influiría en su respuesta el hecho de representar a un pequeño accionista? Apoyarse en la siguiente representación



5.1.6. Tres jugadores se reparten entre sí 10 millones de euros si llegan a un acuerdo entre ellos, en caso contrario no reciben nada. ¿Cómo sería el reparto si siguen los criterios de la solución Nash regular?

5.1.7. Una empresa fabrica ruedas dentadas que vende al precio de 80 € por unidad. Para fabricar ruedas dentadas son necesarios varios inputs, todos gratis excepto el valor del trabajo. La función de producción de la empresa f: R $\rightarrow$ R viene dada por s = f(t) = $\sqrt{t}$, donde s es el número de ruedas producidas diariamente cuando se usan t horas de trabajo. Si el salario por hora es w, el beneficio diario de la empresa es $\pi = 80\sqrt{t} - w\,t$. Y si el trabajador considera que cada hora de ocio vale 10€, sus ingresos diarios son I = w t +10(24 - t). Tanto el trabajador como la empresa son neutrales al riesgo.

5.1.7.1. Hallar el valor de t que maximiza el excedente S = π + I, disponible para la empresa y el trabajador conjuntamente, y el valor de este. [π + I = 400€; t = 16 horas]

5.1.7.2. Supongamos que el trabajador y la empresa negocian sobre el salario w y el número de horas laborales. ¿Cuál es su punto de desacuerdo? ¿Cómo se dividirá el excedente si se usa la solución de negociación de Nash

regular? ¿Sobre qué salario se llegará a un acuerdo? ¿Cuántas horas tendrá la jornada laboral? [d=(240,0); t = 16 horas; w = 15€, [π=80, I=320]

5.1.7.3. Para cada w, determinar la duración t de la jornada laboral que maximiza el beneficio de la empresa. $t=1600/w^2$]

5.1.7.4. Supongamos ahora que el trabajador y la empresa sólo negocian sobre el salario w. Después de llegar a un acuerdo sobre el salario, la empresa determina de forma unilateral el número de horas de trabajo que desea comprar. Determinar la solución Nash regular que resulta entonces. ¿Sobre qué salario se llegará a un acuerdo? ¿Cuál será la duración de la jornada laboral? [π=320/3, π + I= 240+(4/9) 320 = 382,2€; t = 7+1/9 horas; w=15€]

5.1.7.5. ¿Por qué dice la empresa que hay sobreocupación (demasiadas horas trabajadas) en el caso 5.1.7.2? ¿Por qué puede responder el trabajador diciendo que el caso 5.1.7.4 es socialmente ineficiente?

5.2. Soluciones tipo Kalai-Smorodinsky

5.2.1. Dos jugadores neutrales ante el riesgo tienen 500 € en juego. Si no alcanzan un acuerdo el jugador 1 no obtiene nada, mientras que el jugador 2 recibe 100 €. Hallar las soluciones de negociación de Nash y de Kalai-Smorodinsky. ¿Coinciden? [$U_1 = 2000/9$; $U_2 = 2500/9$]

5.2.2. En el problema anterior, el jugador 1 es neutral ante el riesgo y el jugador 2 averso, con una función de utilidad $U_2 = (\text{dinero})^{0.5}$. Hallar las soluciones de negociación de Nash y de Kalai-Smorodinsky con retirada a (0,0). [Nash = $(1000/3, (500/3)^{1/2}$; K-S $\approx$ (309, 13'8)]

5.2.3. Igual que en problema anterior, pero el jugador 2 es amante al riesgo con $U_2 = (\text{dinero})^2$. [Nash = $(166'66, 333'33^2)$; K-S $\approx (191, 309^2)$]

5.2.4. Tres jugadores se reparten entre sí 100 millones de euros si llegan a un acuerdo entre ellos, en caso contrario no reciben nada. Los jugadores 1 y 2 son neutrales al riesgo y el jugador 3 es averso, con función de utilidad $U_3 = (\text{dinero})^{1/2}$. Hallar la superficie de ganancias eficientes y representarla. Hallar la solución regular de Nash, comprobando que el tercer jugador recibe menos por su aversión al riesgo. [$U_1 = U_2 = 40$; $U_3 = 20^{1/2} \approx 4'47$]

5.2.5. Hallar la solución Kalai-Smorodinsky para el problema anterior. [$U_1 = U_2 = 100(2^{1/2}-1) \approx 41'42$; $U_3 = 10(2^{1/2}-1) \approx 4'14$]

5.2.6. En un juego de quiebra, el acreedor 1 puede reclamar 1 millón de euros; el acreedor 2, puede reclamar 2 millones; al acreedor 3 le adeudan 3 millones; y finalmente, al acreedor 4 le deben 4 millones. El dinero total a repartir es de 5 millones de euros. Si no hay acuerdo ninguno recibe nada. Hallar la solución regular de Nash y la de Kalai-Smorodinsky. [En la solución Nash: $U_1 = 1$; $U_2 = U_3 = U_4 = 4/3$; en la K-S: $U_1 = 0'5$; $U_2 = 1$; $U_3 = 1'5$; $U_4 = 2$]

5.3. Soluciones tipo secuencial

5.3.1. Dos países inician discusiones sobre las condiciones de sus relaciones comerciales. El beneficio conjunto alcanza a 1000 millones de euros. El factor de descuento es de 0.9 (un 10% aproximadamente), por periodo de negociación, debido a la perdida de oportunidades y a la posible aparición de alternativas comerciales. ¿Cuánto debería ofrecer el primer país al segundo? [$a_2(0)=9000/19 \approx$ 473'68]

5.3.2. En las negociaciones entre un novelista y una editorial, ambos saben que el valor previsto de los beneficios es de 500000€, siendo el factor de descuento de 0.80. La editorial es la que hace la primera oferta. ¿Cuánto ofrecerá?, ¿preferirá esperar el novelista o aceptará?, ¿sería correcto afirmar que el novelista hace esperar a la editorial si no acepta su oferta? [$a_2(0)=(4/9)\ 5000000 \approx$ 222222'22]