Álgebra Lineal I

Adrián Rodrigo Escudero

https://personal.unizar.es/rodrigo
Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza
rodrigo@unizar.es

15 de diciembre de 2023

- Estas diapositivas corresponden a la versión 2021-9-20 de mis apuntes de Álgebra Lineal I.
- Tanto dichos apuntes como estas diapositivas se pueden descargar desde la web:

  https://personal.unizar.es/rodrigo

- Una advertencia para los alumnos: tenéis que trabajar los ejercicios. Hacer un ejercicio por tu cuenta es considerablemente más difícil que entender la solución cuando la explica el profesor.
-

Capítulo 1. Espacios vectoriales

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Capítulo 3. Determinantes

Capítulo 4. Valores y vectores propios

Capítulo 1. Espacios vectoriales

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + \ \ y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$-x + y = 6 \implies y = 6 + x \implies 7 = 3x + 2(6 + x) = 5x + 12$$

$$\implies x = -1 \implies y = 5$$

¿Hemos acabado?

¿Qué pasaría si cambiamos $4x + 3y = 11$ por $4x + 3y = 10$?

Hay que sustituir la solución en el sistema para asegurar que es correcta.

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x &+& y &+& z &=& 1 \\ 4x &+& y && &=& -2 \\ -2x &+& 2y &+& z &=& 7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x &+& y &+& z &=& 1 \\ &-& y &-& 2z &=& -4 \\ && 3y &+& 2z &=& 8 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x &+& y &+& z &=& 1 \\ &-& y &-& 2z &=& -4 \\ && &-& 4z &=& -4 \end{array}\right.$$

Calculamos las incógnitas, de la última a la primera:

$$z = 1 \qquad y = 2 \qquad x = -1$$

Una única solución $\implies$ sistema compatible determinado

Propiedad 1.3 (Método de Gauss).

1.1. Método de Gauss

Si en un sistema de ecuaciones lineales realizamos
cualquiera de las siguientes tres operaciones,
entonces las soluciones del nuevo sistema siguen siendo las mismas.

1. Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
2. Sumar a una fila otra fila.
3. Intercambiar dos filas.

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{array}\right.$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

Por tanto el sistema inicial es equivalente a:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{array}\right.$$

Las soluciones del sistema son:

$$z = \lambda \qquad y = 4\lambda \qquad x = -5\lambda$$

Como el sistema tiene más de una solución (una para cada valor de λ), se dice que es compatible indeterminado.

Definiciones 1.5.

1.1. Método de Gauss

1. En cada fila de una matriz dada, llamamos pivote al primer elemento no nulo empezando por la izquierda.
2. Se dice que una matriz está escalonada por filas si el pivote de cada fila (excepto la fila primera) está más a la derecha que el pivote de la fila anterior, y todas las filas nulas están abajo.

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y \qquad = 1 \\ 2x \qquad + z = 2 \\ 3x + 2y + z = a \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right)$$

$\boxed{a = 3}$ $\quad z = \lambda \quad y = \frac{1}{4}\lambda \quad x = -\frac{1}{2}\lambda + 1$

$\boxed{a \neq 3}$ no hay soluciones $\Longrightarrow$ sistema incompatible

Ejercicios 1.7.

1.1. Método de Gauss

- 1.1
- 1.2
- 1.3
- 1.4

Capítulo 1. Espacios vectoriales

Notación 1.8.

1.2. Espacios vectoriales

En esta asignatura,
la letra $\mathbb{F}$ denotará siempre a uno de los tres siguientes cuerpos:

- Los números racionales $\mathbb{Q}$.
- Los números reales $\mathbb{R}$.
- Los números complejos $\mathbb{C}$.

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u + v \end{aligned}$$

y una operación externa

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda v \end{aligned}$$

que satisfacen las siguientes ocho propiedades:

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u+v)+w = u+(v+w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u+v = v+u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.
5. Distributividad: $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$.
6. Distributividad: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $v \in V$.
7. Asociatividad: $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $v \in V$.
8. Para todo $v \in V$ se cumple que $1 \cdot v = v$.

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto $\mathbb{R}^3$ $\quad \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Suma $\quad \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Producto por escalares $\quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.10.

Dado un número entero n mayor o igual que 1,
$\mathbb{F}^n$ es el conjunto de las n-tuplas con coeficientes en $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F} \right\}$$

En esta asignatura escribimos los elementos de $\mathbb{F}^n$ siempre en columnas o, lo que es lo mismo, como vectores fila traspuestos.

Ejemplo 1.10.

$\mathbb{F}^n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$
con la suma y producto siguientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

- El vector neutro es $(0, \dots, 0)^T$.
- Dado un vector $(x_1, \dots, x_n)^T$, su vector opuesto es $(-x_1, \dots, -x_n)^T$.

Notas 1.11.

1. En las propiedades del vector neutro y el vector opuesto el orden de los cuantificadores (‘existe’ y ‘para todo’) es fundamental.
   - En un espacio vectorial hay un vector neutro:

     Existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
   - Mientras que cada vector tiene un vector opuesto:

     Para todo $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.

Notas 1.11.

2. La propiedad del vector neutro implica que todo espacio vectorial tiene al menos un vector, el vector neutro $\bar{0}$.

   De hecho $V = \{\bar{0}\}$ es el espacio vectorial más pequeño posible.

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

3. La asociatividad de la suma y la asociatividad del producto por escalares nos ahorra escribir muchos paréntesis.

   Por ejemplo escribimos $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ en lugar de escribir cualquiera de las expresiones equivalentes siguientes:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) \\ &= v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) = v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \\ &= ((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 = (v_1 + (v_2 + v_3)) + v_4 \end{aligned}$$

Demostración.

Ejercicio 1.6. □

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

1. Fijados dos enteros m, n mayores o iguales que 1,

   el conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{F})$,

   formado por las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en $\mathbb{F}$,
   es un $\mathbb{F}$-espacio vect. con la suma y producto por escalares habituales.

   Por ejemplo en el caso 3×2 estas operaciones vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} \end{pmatrix}$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

   Dados $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$,
   $g(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$, y $\lambda \in \mathbb{F}$,
   la suma y el producto vienen dados por:

$$f(X) + g(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n$$

$$\lambda \cdot f(X) = \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \cdots + \lambda a_n X^n$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

3. El conjunto de los polinomios de cualquier grado (pero grado finito) con coeficientes en $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F}[X] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n[X]$$

4. Hemos visto que $\mathbb{R}^3$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial,
   pero también podemos verlo como un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial
   al restringir el producto de escalares a los números racionales.

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

5. El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$,
   formado por las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

   Dados $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

   - La aplicación suma $f + g$ es aquella que a cada número $x \in \mathbb{R}$ le asocia el número $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$.
   - Mientras que la aplicación $\lambda \cdot f$ es aquella que a cada número $x \in \mathbb{R}$ le asocia el número $\lambda f(x) \in \mathbb{R}$.

Ejercicios 1.13.

1.2. Espacios vectoriales

- 1.5
- 1.6
- 1.7

Capítulo 1. Espacios vectoriales

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial, entonces:

1. El vector neutro es único.

Demostración.

Sea $\bar{0}'$ un vector que cumple la misma propiedad que el neutro, $\bar{0}' + v = v$ para todo $v \in V$.

$$\bar{0}' \overset{\bar{0}\text{ es neutro}}{=\!=\!=\!=} \bar{0}' + \bar{0} \overset{\bar{0}'\text{ es neutro}}{=\!=\!=\!=} \bar{0}$$

□

Esto justifica que denotemos $\bar{0}$ al vector neutro.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

2. El vector opuesto de cualquier vector es único.

Demostración.

Fijamos un vector v. Sean u, w opuestos de v.

$$u = u + \bar{0} = u + (w + v) = w + (u + v) = w + \bar{0} = w$$

□

Esto justifica que denotemos $-v$ al opuesto de v.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Demostración.

$$\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$$

Sumamos a ambos lados el opuesto de $\lambda \cdot \bar{0}$:

$$\begin{gathered}(\lambda \cdot \bar{0}) + (-(\lambda \cdot \bar{0})) = \bar{0} \\ \| \\ (\lambda \cdot \bar{0}) + (\lambda \cdot \bar{0}) + (-(\lambda \cdot \bar{0})) = (\lambda \cdot \bar{0}) + \bar{0} = (\lambda \cdot \bar{0})\end{gathered}$$

□

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

4. Para todo vector $v \in V$ se cumple que $0 \cdot v = \bar{0}$.

Demostración.

Análoga al apartado anterior. □

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

5. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tales que $\lambda \cdot v = \bar{0}$,
   entonces o bien $\lambda = 0$ o bien $v = \bar{0}$.

Demostración.

Si $\lambda \neq 0$, entonces:

$$\bar{0} = \lambda^{-1} \cdot \bar{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1 \cdot v = v$$

□

Propiedades 1.14.

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

Como el vector opuesto es único, basta comprobar que:

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) \quad \Longleftarrow \quad \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [(-\lambda)v] = [\lambda + (-\lambda)]v = 0v = \bar{0}$$

$$\lambda(-v) = -(\lambda v) \quad \Longleftarrow \quad \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [\lambda(-v)] = \lambda[v + (-v)] = \lambda\bar{0} = \bar{0}$$

$\square$

Truco 1.15.

Más adelante veremos que
todo espacio vectorial (de dimensión finita) V es (isomorfo a) $\mathbb{F}^n$.

Luego en V se cumplen todas las propiedades que se cumplen en $\mathbb{F}^n$.

Definición 1.16.

Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.
Un subespacio vectorial es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S.
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1 \qquad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \notin S_1$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S_2 \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \in S_2 \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in S_2 \qquad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} \in S_2$$

Notas 1.17.

1. Un subespacio vectorial es a su vez un espacio vectorial
   con las operaciones de suma y producto por escalares heredadas.

2. Un subconjunto S de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V es subespacio
   si y solo si se cumplen las siguientes dos propiedades:

   a) El conjunto S es no vacío.

   b) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ y $v_1, v_2 \in S$, entonces $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in S$.

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

1. Tenemos la siguiente cadena de subespacios:

$$\mathbb{F}_0[X] \leq \mathbb{F}_1[X] \leq \mathbb{F}_2[X] \leq \mathbb{F}_3[X] \leq \mathbb{F}_4[X] \leq \cdots \leq \mathbb{F}[X]$$

   Observa que $\mathbb{F}_0[X] = \mathbb{F}$.

2. Sea V un espacio vectorial cualquiera.

   Tanto V como $\{\bar{0}\}$ son subespacios de V.

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

3. Sea $V = \mathbb{C}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_i \in \mathbb{C}\}$, y sea S el subconjunto de vectores que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad = 0 \\ \qquad x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

   El subconjunto S es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^4$, ya que el sistema es homogéneo, es decir, los coeficientes que aparecen en la parte derecha de cada igualdad son nulos.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2\delta + 6\mu \\ \delta - 3\mu \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} \mid \delta, \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

Ejercicios 1.19.

1.3. Subespacios

- 1.8
- 1.9
- 1.10

Capítulo 1. Espacios vectoriales

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean $S_1, \dots, S_n$ subespacios de un espacio vectorial V. Entonces:

1. $S_1 \cap \cdots \cap S_n$ también es subespacio de V.

$$\left\{\begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix}\right\} \cap \left\{\begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -\mu \end{pmatrix}\right\}$$

2. $S_1 + \cdots + S_n = \{v_1 + \cdots + v_n \mid v_i \in S_i\}$ también es subespacio de V.

$$\left\{\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix}\right\} + \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \end{pmatrix}\right\}$$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

$*$ Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1,\ a_2 \in S_2,\ a_3 \in S_3,\quad b_1 \in S_1,\ b_2 \in S_2,\ b_3 \in S_3$.

$(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3) = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3) \in S_1+S_2+S_3$

S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1 \qquad (a_2 + b_2 \in S_2,\ a_3 + b_3 \in S_3)$

Hemos usado la propiedad conmutativa.

$*$ Cerrado para el producto por escalares

Hay que usar la propiedad distributiva.

$*$ Vector nulo

$\bar{0} \in S_1 + S_2 + S_3$ porque $\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} + \bar{0}$ con $\bar{0} \in S_1,\ \bar{0} \in S_2,\ \bar{0} \in S_3$. $\square$

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y $v_1, \dots, v_n$ vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ se dice que es combinación lineal de $v_1, \dots, v_n$.
2. Sea C un subconjunto no vacío (y posiblemente infinito) de V. El subespacio generado por C, denotado $\operatorname{span}\langle C\rangle$, es por definición el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) de vectores de C:

$$\operatorname{span}\langle C\rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \mid m \geq 1,\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F} \\ v_1, \dots, v_m \in C\}$$

3. Por convenio definimos $\operatorname{span}\langle\emptyset\rangle = \{\bar{0}\}$.

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\operatorname{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\operatorname{span}\langle u_1, \dots, u_n\rangle$.

$$\operatorname{span}\langle u_1, \dots, u_n\rangle = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\}$$

1. En efecto, $\operatorname{span}\langle C\rangle$ es un subespacio vectorial de V.

$$\left.\begin{cases} 2u_1 + 5u_2 - 3u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 5u_3 \end{cases}\right. \in \operatorname{span}\langle u_1, u_2, u_3\rangle \qquad 5u_1+9u_2+2u_3 \in \operatorname{span}\langle u_1, u_2, u_3\rangle$$

$$0u_1 + 0u_2 + 0u_3 = \bar{0} \in \operatorname{span}\langle u_1, u_2, u_3\rangle$$

3. Si existen vectores $u_1, \dots, u_n$ tales que $V = \operatorname{span}\langle u_1, \dots, u_n\rangle$, decimos que V es finitamente generado.

Ejemplo 1.23.

1.4. Conjuntos generadores

Seguimos con el ejemplo 1.18:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2\delta + 6\mu \\ \delta - 3\mu \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} \mid \delta, \mu \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \delta, \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Propiedad 1.24.

1.4. Conjuntos generadores

Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V.

Entonces $\operatorname{span}\langle C\rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a C, es decir:

1. $\operatorname{span}\langle C\rangle$ es un subespacio de V.
2. $C \subseteq \operatorname{span}\langle C\rangle$.
3. Si S es otro subespacio de V tal que $C \subseteq S$, entonces $\operatorname{span}\langle C\rangle \subseteq S$.

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

1. $\operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \operatorname{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3\rangle$.

Demostración.

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3$$
$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot (v_2 + v_3) + (-1) \cdot v_3$$
$$v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 1 \cdot v_3$$

$\Longrightarrow \quad v_1, v_2, v_3 \in \operatorname{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3\rangle$

Por la propiedad 1.24, $\quad \operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3\rangle \subseteq \operatorname{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3\rangle$

Análogamente el otro contenido. □

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

2. $\operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \operatorname{span}\langle \lambda v_1, v_2, v_3\rangle$ si $\lambda \neq 0$.
3. $\operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \operatorname{span}\langle v_2, v_1, v_3\rangle$.
4. $w \in \operatorname{span}\langle v_1, \ldots, v_n\rangle \iff \operatorname{span}\langle v_1, \ldots, v_n, w\rangle = \operatorname{span}\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$.

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas,
el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$S = \text{span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \rangle = \text{span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \rangle$$

$$= \text{span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \text{span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \rangle$$

Ejercicios 1.27.

1.4. Conjuntos generadores

- 1.11
- 1.12
- 1.13
- 1.14

Capítulo 1. Espacios vectoriales

Terminología 1.28.

1.5. Dependencia lineal

Distinguiremos entre familias y conjuntos.

En una familia puede haber elementos repetidos;
además en las familias finitas tenemos en cuenta el orden de los elementos.

Por lo tanto los siguientes tres conjuntos de números son iguales:

$$\{2, 2, 5\} = \{2, 5\} = \{5, 2\}$$

Mientras que las siguientes tres familias son distintas dos a dos:

$$(2, 2, 5) \qquad (2, 5) \qquad (5, 2)$$

Usamos llaves para denotar los conjuntos y paréntesis para las familias.

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

1. Sea $(v_1, \dots, v_n)$ una familia finita de vectores de V.
   Se dice que dicha familia es ligada (o linealmente dependiente) si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que
   $$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \bar{0}$$
   y tales que al menos uno de estos λ_i es distinto de 0.

2. La familia $(v_1, \dots, v_n)$ es libre (o linealmente independiente) si no es ligada, es decir, si:
   $$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \bar{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

3. Una familia infinita de vectores es ligada si tiene al menos una subfamilia finita ligada,

   y es libre en caso contrario, es decir, si todas sus subfamilias finitas son libres.

4. Por convenio decimos que la familia vacía es libre.

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea $\mathcal{F}$ una familia de vectores.
Supongamos que $\mathcal{F}$ tiene al menos dos vectores.

Entonces $\mathcal{F}$ es ligada si y solo si existe un vector de $\mathcal{F}$ que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de $\mathcal{F}$.

Demostración.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\quad 3v_1 + 5v_2 + 0v_3 - 2v_4 = \bar{0} \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \frac{-3}{5} v_1 + \frac{-0}{5} v_3 + \frac{2}{5} v_4$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\quad v_3 = 4v_1 - 2v_2 \quad \Longrightarrow \quad -4v_1 + 2v_2 + 1v_3 + 0v_4 = \bar{0}$ $\square$

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.

2. Una familia formada por un único vector es ligada si y solo si dicho vector es el vector nulo.

$$\lambda_1 v_1 = \bar{0} \quad \text{con} \quad \lambda_1 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_1 = \bar{0}$$

3. Toda familia que contiene a una subfamilia ligada es ligada.
   En otras palabras, toda subfamilia de una familia libre es libre.

4. Si una familia contiene vectores repetidos, entonces es ligada.

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Sean a, b, c los vectores de $\mathbb{Q}^4$:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La familia (a, b, c) está escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \boxed{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{-1} \\ \boxed{0} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Veamos que el escalonamiento implica que la familia (a, b, c) es libre.

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

En efecto, supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ cumplen que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \bar{0}$.
Entonces:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comparamos la tercera componente, y obtenemos que α debe ser 0.

Ahora que sabemos que $\alpha = 0$, comparamos la segunda componente, y obtenemos que β debe ser 0.

Finalmente sabiendo que $\alpha = \beta = 0$, comparamos la primera componente, y obtenemos que γ debe ser 0.

Por tanto la familia (a, b, c) es libre. □

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Como la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, existen escalares x_1, x_2, x_3 no todos nulos tales que:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = \bar{0}$$

Buscamos escalares y_1, y_2, y_3 tales que:

$$y_1(v_1 + v_2) + y_2(v_2 + v_3) + y_3(v_3 + v_1) = \bar{0}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

Podemos reescribir esta ecuación como:

$$(y_1 + y_3)v_1 + (y_2 + y_1)v_2 + (y_3 + y_2)v_3 = \bar{0}$$

Por tanto podemos hacer que y_1, y_2, y_3 cumplan lo pedido si satisfacen:

$$\begin{cases} y_1 \phantom{{}+y_2} + y_3 = x_1 \\ y_1 + y_2 \phantom{{}+y_3} = x_2 \\ \phantom{y_1+{}} y_2 + y_3 = x_3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss:

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_1 - x_2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (x_1 + x_2 - x_3)/2 \\ 0 & 1 & 0 & (x_2 + x_3 - x_1)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array}\right)$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

La solución es:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2} \qquad y_2 = \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2} \qquad y_3 = \frac{x_3 + x_1 - x_2}{2}$$

Por último observamos que no pueden ser los tres y_i iguales a 0, porque el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y_1 \phantom{{}+y_2} + y_3 = x_1 \\ y_1 + y_2 \phantom{{}+y_3} = x_2 \\ \phantom{y_1+{}} y_2 + y_3 = x_3 \end{cases}$$

nos dice que entonces los tres x_i serían iguales a 0.

Así, hemos probado que $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ es ligada. $\square$

Ejercicios 1.34.

1.5. Dependencia lineal

- 1.15
- 1.16
- 1.17

Capítulo 1. Espacios vectoriales

Teorema 1.35 (de la dimensión).

Sea V un espacio vectorial.
Supongamos que la familia de vectores $(a_1, \ldots, a_m)$ es libre,
y supongamos que la familia de vectores $(b_1, \ldots, b_n)$ genera V.

Entonces $m \leq n$.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

Demostración.

1. Sabemos que $\operatorname{span}\langle b_1, \ldots, b_n\rangle = V$.
   Luego existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que $a_1 = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$.

   Como $(a_1, \ldots, a_m)$ es familia libre, el vector a_1 no es el vector nulo,
   luego existe un índice i tal que $\lambda_i \neq 0$.

   Reordenando los índices si es necesario, podemos suponer que $i = 1$.

   Despejando:
   $$b_1 = \frac{1}{\lambda_1} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} b_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} b_n$$

   Por lo tanto $\operatorname{span}\langle a_1, b_2, \ldots, b_n\rangle = \operatorname{span}\langle b_1, \ldots, b_n\rangle = V$.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

Demostración.

2. Ahora que sabemos que $\operatorname{span}\langle a_1, b_2, \ldots, b_n\rangle = V$,
   repetimos el proceso con a_2.

   Existen escalares μ_i tales que $a_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 b_2 + \cdots + \mu_n b_n$.

   Si fuera $\mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$,
   entonces $(-\mu_1)a_1 + 1 \cdot a_2 = \bar{0}$,
   y $(a_1, \ldots, a_m)$ no sería libre.

   Luego $\mu_j \neq 0$ para algún índice $j \geq 2$;
   reordenando, $j = 2$.

   Despejando b_2, obtenemos que
   $\operatorname{span}\langle a_1, a_2, b_3, \ldots, b_n\rangle = \operatorname{span}\langle a_1, b_2, \ldots, b_n\rangle = V$.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

Demostración.

3. Si fuera $m > n$,
   podríamos repetir este proceso hasta obtener $\operatorname{span}\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = V$.

   Así, a_{n+1} sería combinación lineal de $a_1, \ldots, a_n$,
   contradicción.

   Por lo tanto $m \leq n$.

$\square$

Definición 1.36 y corolario 1.37.

1.6. Dimensión

Definición 1.36.

Sea V un espacio vectorial.
Una base es una familia libre y que genera V.

Corolario 1.37.

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.
Entonces todas las bases de V tienen el mismo número de vectores.

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Entonces cualquier familia libre se puede expandir (añadiendo vectores) hasta formar una base.

Demostración.

Si la familia no genera V,
es porque existe algún vector en V
que no se puede expresar como su combinación lineal.

Por lo tanto, al añadirlo, la familia sigue siendo libre.

El teorema de la dimensión nos asegura que,
después de añadir un número finito de vectores,
obtenemos una familia generadora (y libre). □

Nota 1.39 y definición 1.40.

1.6. Dimensión

Nota 1.39.

Cualquier familia finita de vectores que genere un espacio vectorial
se puede reducir (quitando vectores) hasta formar una base.

Definición 1.40.

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.
Llamamos dimensión al número de elementos de cualquier base de V.

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

1. En $\mathbb{F}^n$ los siguientes vectores forman una base:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dots \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diremos que $(e_1, \dots, e_n)$ es la base canónica de $\mathbb{F}^n$.

Luego $\dim \mathbb{F}^n = n$.

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

2. La familia $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ es una base de $\mathbb{F}_n[X]$.
   En consecuencia, $\dim \mathbb{F}_n[X] = n + 1$.
3. $\dim M_{m\times n}(\mathbb{F}) = mn$.
4. La familia vacía $\emptyset$ es una base del espacio vectorial $\{\bar{0}\}$.
   Por lo tanto $\dim\{\bar{0}\} = 0$.

Ejercicios 1.42.

1.6. Dimensión

- 1.18
- 1.19
- 1.20
- 1.21

Capítulo 1. Espacios vectoriales

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores $(v_1, \dots, v_n)$ es libre, y $w \notin \operatorname{span}\langle v_1, \dots, v_n\rangle$, entonces la familia $(v_1, \dots, v_n, w)$ también es libre.

Demostración.

(Ya usamos este resultado en la demostración del corolario 1.38).

Supongamos que los escalares λ_i cumplen $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = \bar{0}$, debemos probar que necesariamente $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$.

- Si $\lambda_{n+1} = 0$, entonces $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \bar{0}$,
  y como $(v_1, \dots, v_n)$ es libre, necesariamente $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
- Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, entonces $w = -\lambda_1/\lambda_{n+1} v_1 - \cdots - \lambda_n/\lambda_{n+1} v_n$,
  luego $w \in \operatorname{span}\langle v_1, \dots, v_n\rangle$, contradicción.

$\square$

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

2. Sea $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ una familia formada exactamente por n vectores.

   Entonces:

   $$\mathcal{F} \text{ es base } \iff \mathcal{F} \text{ es libre } \iff \mathcal{F} \text{ genera } V$$

3. Sea S un subespacio de V.

   Entonces el espacio vectorial S también es de dimensión finita, y:

   $$\dim S \leq \dim V$$

   Es más:

   $$\dim S = n \iff S = V$$

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

El concepto de dimensión nos da una solución más rápida al ejemplo 1.33.

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Puesto que la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, la dimensión de $V = \operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ es a lo sumo 2.

Si la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ fuera libre, entonces la dimensión de $W = \operatorname{span}\langle v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\rangle$ sería 3.

Pero W está contenido en V, contradicción. □

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita n.
Sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V. Sea v un vector cualquiera de V.

Como $(b_1, \ldots, b_n)$ genera V, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$.
Como $(b_1, \ldots, b_n)$ es libre, dichos coeficientes son únicos.

Se dice que el vector columna $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas del vector $v \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

Demostración.

Veamos la unicidad. Si también $v = \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_n b_n$, entonces:

$$\bar{0} = v - v = (\lambda_1 - \mu_1) b_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) b_n$$

luego $\lambda_i = \mu_i$ para todo i. □

Notas 1.46.

1.7. Coordenadas

1. Al fijar la base $\mathcal{B}$, queda definida una aplicación

   $$f_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{F}^n$$

   que envía cada vector $v \in V$ a sus coordenadas $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$.

2. Esta aplicación $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva.

3. Gracias a haber fijado la base $\mathcal{B}$, operar en V es como operar en $\mathbb{F}^n$, es decir, para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v, w \in V$:

   $$f_{\mathcal{B}}(v + w) = f_{\mathcal{B}}(v) + f_{\mathcal{B}}(w)$$

   $$f_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f_{\mathcal{B}}(v)$$

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra una subfamilia de la familia (v_1, v_2, v_3, v_4) que sea base de $\operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$.
2. Halla qué vectores w_i pertenecen a $\operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$.
3. Calcula las coordenadas de dichos vectores $w_i \in \operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$ en la base que has calculado en el primer apartado.

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

$$(v_1|\dots|v_4|w_1|\dots|w_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 6 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -4 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (c_1|\dots|c_8)$$

$$v_4 = 2v_1 + 3v_2 \qquad \Longleftarrow \qquad c_4 = 2c_1 + 3c_2$$

Al hacer operaciones de Gauss por filas
las relaciones entre las columnas siguen siendo las mismas.

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

1. (v_1, v_2, v_3) es base de $\operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$.
2. $w_1, w_2, w_3 \in \operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$, pero $w_4 \notin \operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$.
3. Las coordenadas de w_1 en la base (v_1, v_2, v_3) son $(1, -2, 1)^T$, las de w_2 son $(3, 1, -5)^T$, y las de w_3 son $(1, 0, -2)^T$.

□

Ejercicios 1.48.

1.7. Coordenadas

- 1.22
- 1.23
- 1.24

Capítulo 1. Espacios vectoriales

Definición 1.49.

$$\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\right\} + \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}\right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \oplus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}\right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Definición 1.49.

Sean $S_1, \dots, S_n$ subespacios de un espacio vectorial V.

Decimos que la suma $S_1 + \cdots + S_n$ es directa si todo vector de $S_1 + \cdots + S_n$ se puede expresar de manera única como suma de vectores de $S_1, \dots, S_n$.

Es decir, si $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ con $a_i, b_i \in S_i$ implica que $a_i = b_i$ para todo i.

Cuando la suma es directa, escribimos $S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ en lugar de escribir $S_1 + \cdots + S_n$.

Proposición 1.50.

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V.

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

- ($\Longrightarrow$) Sea $v \in S \cap T$, nuestro objetivo es demostrar que $v = \bar{0}$.

  Observamos que:

$$\underbrace{v}_{\in S} + \underbrace{(-v)}_{\in T} = \bar{0} = \underbrace{\bar{0}}_{\in S} + \underbrace{\bar{0}}_{\in T}$$

  Por la unicidad de la suma directa, debe ser $v = \bar{0}$ y $-v = \bar{0}$.

Proposición 1.50.

Demostración.

- $\left(S \oplus T \quad \Longleftarrow \quad S \cap T = \{\bar{0}\} \right)$

  Sean $s_1, s_2 \in S$ y $t_1, t_2 \in T$ tales que $s_1 + t_1 = s_2 + t_2$, debemos probar que $s_1 = s_2$ y $t_1 = t_2$.

  Notamos que:

  $$\underbrace{s_1 - s_2}_{\in S} = \underbrace{t_2 - t_1}_{\in T} \in S \cap T$$

  Por tanto $s_1 - s_2 = \bar{0}$ y $t_2 - t_1 = \bar{0}$.

$\square$

Proposición 1.50.

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

2. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$\underbrace{\dim(S+T)}_{\text{¿ } r+m+n \text{ ?}} = \underbrace{\dim S}_{r+m} + \underbrace{\dim T}_{r+n} - \underbrace{\dim(S \cap T)}_{r}$$

Demostración.

Cogemos una base $(x_1, \ldots, x_r)$ del subespacio $S \cap T$.

La ampliamos con $\begin{Bmatrix} s_1, \ldots, s_m \\ t_1, \ldots, t_n \end{Bmatrix}$ hasta formar una base de $\begin{Bmatrix} S \\ T \end{Bmatrix}$.

Basta ver que $(x_1, \ldots, x_r, s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_n)$ es base de $S + T$.

Proposición 1.50.

Demostración.

a) Veamos que esta familia genera $S + T$:

$$S + T = \operatorname{span}\langle x_1, \ldots, x_r, s_1, \ldots, s_m\rangle + \operatorname{span}\langle x_1, \ldots, x_r, t_1, \ldots, t_n\rangle$$

$$= \operatorname{span}\langle x_1, \ldots, x_r, s_1, \ldots, s_m, x_1, \ldots, x_r, t_1, \ldots, t_n\rangle$$

$$= \operatorname{span}\langle x_1, \ldots, x_r, s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_n\rangle$$

Proposición 1.50.

Demostración.

b) Veamos que la familia es libre.

Suponemos que:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j s_j + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k t_k = \bar{0}$$

Hay que ver que necesariamente los α_i, los β_j y los γ_k son todos cero.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j s_j}_{\in S} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{n} \gamma_k t_k}_{\in T} \in S \cap T$$

Como $(x_1, \ldots, x_r)$ es base de $S \cap T$, existen $\delta_1, \ldots, \delta_r$ tales que:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j s_j = \sum_{i=1}^{r} \delta_i x_i + \sum_{j=1}^{m} 0 \cdot s_j$$

Pero $(x_1, \ldots, x_r, s_1, \ldots, s_m)$ es familia libre, luego $\alpha_i = \delta_i$ para todo i, y $\beta_j = 0$ para todo j.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

Así la ecuación inicial ahora es:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k t_k = \bar{0}$$

Aplicando que $(x_1, \ldots, x_r, t_1, \ldots, t_n)$ es familia libre, obtenemos que también los α_i y los γ_k son todos cero. □

Notas 1.51.

1.8. Suma directa I

1. Dos subespacios S y T de un espacio vectorial V se dicen suplementarios si $S \oplus T = V$, es decir, si tienen suma directa, y dicha suma es el total.
2. Si V es de dimensión finita, siempre podemos encontrar al menos un suplementario de un subespacio S dado.

Ejercicios 1.52.

1.8. Suma directa I

- 1.25
- 1.26
- 1.27
- 1.28
- 1.29

Capítulo 1. Espacios vectoriales

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Sean $S_1, \dots, S_n$ subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.

Son equivalentes:

1. Los subespacios $S_1, \dots, S_n$ tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i, entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i.
3. Al juntar una base de cada S_i, obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.
4. $\dim(S_1 + \cdots + S_n) = \dim S_1 + \cdots + \dim S_n$.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

1. Los subespacios $S_1, \dots, S_n$ tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i, entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i.

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Si $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$, con $a_i, b_i \in S_i$, entonces:

$$\underbrace{(a_1 - b_1)}_{\in S_1} + \cdots + \underbrace{(a_n - b_n)}_{\in S_n} = \bar{0}$$

  Luego $a_i - b_i = \bar{0}$ para todo i.

- $(1 \Rightarrow 2)$ Evidente.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i, entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i.
3. Al juntar una base de cada S_i, obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.

Demostración.

- $(3 \Rightarrow 2)$ Sean $v_i \in S_i$ tales que $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$.

  Para cada i, sea $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots)$ una base de S_i.

  Así, fijado i, existen escalares $\lambda_{i,j}$ tales que $v_i = \sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

  Luego $\bar{0} = \sum_i v_i = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j}\right) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

  Como $(a_{i,j})$ es familia libre, necesariamente todos los escalares $\lambda_{i,j}$ son 0, luego todos los v_i son $\bar{0}$.

- $(2 \Rightarrow 3)$ Muy similar a la implicación anterior.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

3. Al juntar una base de cada S_i, obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.
4. $\dim(S_1 + \cdots + S_n) = \dim S_1 + \cdots + \dim S_n$.

Demostración.

- $(4 \Rightarrow 3)$ En general siempre se cumple que, si juntamos una base de cada S_i, obtenemos una familia que genera el subespacio $S_1 + \cdots + S_n$.

  Por dimensiones dicha familia es base.

- $(3 \Rightarrow 4)$ Evidente.

□

Ejercicios 1.54.

1.9. Suma directa II

- 1.30

Capítulo 1. Espacios vectoriales

Ejercicios espacios vectoriales

Ejercicio 1.1.1.
Ejercicio 1.1.2.
Ejercicio 1.2.1.
Ejercicio 1.2.2.
Ejercicio 1.3.
Ejercicio 1.4.
Ejercicio 1.5.1.
Ejercicio 1.5.2.
Ejercicio 1.6.
Ejercicio 1.7.
Ejercicio 1.8.1.
Ejercicio 1.9.1.
Ejercicio 1.9.2.
Ejercicio 1.10.1.
Ejercicio 1.10.2.
Ejercicio 1.11.1.
Ejercicio 1.11.2.
Ejercicio 1.13.
Ejercicio 1.14.
Ejercicio 1.15.
Ejercicio 1.16.
Ejercicio 1.17.
Ejercicio 1.19.1.
Ejercicio 1.24.
Ejercicio 1.25.
Ejercicio 1.28.1.
Ejercicio 1.28.2.

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 3 & 1 & a_2 \\ 1 & 7 & a_3 \\ 2 & 4 & a_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 0 & 10 & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 10 & -a_1 + a_3 \\ 0 & 10 & -2a_1 + a_4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 0 & 10 & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & 2a_1 - a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & a_1 - a_2 + a_4 \end{array}\right)$$

Por tanto el sistema del enunciado es compatible determinado si y solo si:

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones de este nuevo sistema son:

$$a_4 = \lambda \qquad a_3 = \mu \qquad a_2 = -\mu + 2\lambda \qquad a_1 = -\mu + \lambda$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -2 & 5 & -b_1 + b_3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & -1 & -5b_1 + 2b_2 + b_3 \end{array}\right)$$

Por tanto el sistema del enunciado es compatible determinado siempre.

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Las soluciones del sistema inicial son:

$$x_2 = \lambda \qquad x_3 = 3 \qquad x_1 = \lambda/5 + 1/5$$

Ejercicio 1.2.2.

Al aplicar operaciones del método de Gauss por filas,
las soluciones del sistema no cambian.

Los valores $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$ son solución del sistema inicial ($\lambda = 0$).

Sin embargo dichos valores no cumplen la ecuación $x_1 - 2x_3 = 0$.

Por lo tanto ningún sistema al que podamos llegar,
partiendo desde el sistema inicial,
podrá contener la ecuación $x_1 - 2x_3 = 0$.

Ejercicio 1.3.

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} F_1 \\ F_1 + F_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} F_1 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -F_2 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.4.

Vamos a demostrar que todos los sistemas que cumplen las tres
propiedades del enunciado tienen la misma solución: $x = -1$, $y = 2$.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ x = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

Ejercicio 1.4.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ a+3d & a+4d & a+5d \\ a+6d & a+7d & a+8d \\ a+9d & a+10d & a+11d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 3d & 3d & 3d \\ 6d & 6d & 6d \\ 9d & 9d & 9d \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observamos que, aunque el sistema tenga tres o más ecuaciones, solo las dos primeras nos aportan información.

Además nos dicen que el sistema es compatible determinado, luego como mucho puede tener dos incógnitas.

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

Como el sistema es compatible determinado, $d \neq 0$.

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & d & 2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x & = -1 \\ & y = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 1.5.1.

Sí que es espacio vectorial.

Hay que demostrar que se cumplen las ocho propiedades.

¡Cuidado! En dichas propiedades tenemos dos sumas distintas:

La suma $\oplus$ de vectores.

La suma $+$ de escalares.

Y dos productos distintos:

El producto $\odot$ de escalar por vector.

El producto $\cdot$ de escalares.

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

   La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

$$x \oplus y = x \cdot y$$

$$y \oplus x = y \cdot x$$

3. El vector nulo es 1, porque $1 \oplus x = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in (0, \infty)$.
4. Dado $x \in (0, \infty)$, su vector opuesto es x^{-1}.

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^{\lambda}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^{\lambda}) \cdot (y^{\lambda})$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{(\lambda+\mu)}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) = (x^{\lambda}) \cdot (x^{\mu})$$

7. Asociatividad:

$$(\lambda \cdot \mu) \odot x = x^{(\lambda \cdot \mu)}$$

$$\lambda \odot (\mu \odot x) = \lambda \odot (x^{\mu}) = (x^{\mu})^{\lambda}$$

8. $1 \odot x = x^1 = x$.

Ejercicio 1.5.2.

No es espacio vectorial.

Sí que se cumplen las siete primeras propiedades, pero falla la octava ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Contraejemplo: $x = 7,\ y = 8,\ z = 9$.

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 \\ 1 \cdot 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Empecemos contando solamente los de la forma:

$$\Big[v_1 + v_2 + v_3 + v_4\Big] + v_5$$

Por ejemplo:

$$\Big[v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4))\Big] + v_5 \qquad \Big[((v_1 + v_2) + v_3) + v_4\Big] + v_5$$

Hay 5 en total; tantos como posibles sumas de 4 elementos.

$$\Big[v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4))\Big] + v_5 \qquad \Big[v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4)\Big] + v_5$$

$$\Big[(v_1 + v_2) + (v_3 + v_4)\Big] + v_5$$

$$\Big[(v_1 + (v_2 + v_3)) + v_4\Big] + v_5 \qquad \Big[((v_1 + v_2) + v_3) + v_4\Big] + v_5$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

$$\Big[v_1 + v_2 + v_3 + v_4\Big] + v_5 \longrightarrow 5 \text{ posibilidades}$$

$$\Big[v_1 + v_2 + v_3\Big] + \Big[v_4 + v_5\Big] \longrightarrow 2 \text{ posibilidades}$$

$$\Big[v_1 + v_2\Big] + \Big[v_3 + v_4 + v_5\Big] \longrightarrow 2 \text{ posibilidades}$$

$$v_1 + \Big[v_2 + v_3 + v_4 + v_5\Big] \longrightarrow 5 \text{ posibilidades}$$

En total la solución es 14 posibilidades.

Hemos resuelto el caso $n = 5$ utilizando los casos anteriores $n = 3, 4$. Esta técnica en matemáticas se llama inducción.

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Para quien quiera profundizar.

Sea C_n el número de posibles maneras de agrupar los paréntesis en una suma de n elementos.

$$C_1 = 1 \qquad C_2 = 1 \qquad C_3 = 2 \qquad C_4 = 5 \qquad C_5 = 14$$

$$C_n = \sum_{i=1}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i}$$

Estos son los números de Catalán.

$$C_n = \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1}$$

Ejercicio 1.6.

Apartados 2 y 3

$$\Big[v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4)\Big] + v_5 = \Big[v_1 + v_2 + v_3 + v_4\Big] + v_5$$
$$= \Big[(v_1 + v_2) + v_3 + v_4\Big] + v_5 = \Big[w + v_3 + v_4\Big] + v_5$$
$$= w + v_3 + v_4 + v_5$$

$$\Big[v_1 + (v_2 + v_3)\Big] + \Big[v_4 + v_5\Big] = \Big[v_1 + v_2 + v_3\Big] + \Big[v_4 + v_5\Big]$$
$$= \Big[(v_1 + v_2) + v_3\Big] + \Big[v_4 + v_5\Big] = \Big[w + v_3\Big] + \Big[v_4 + v_5\Big]$$
$$= w + v_3 + v_4 + v_5$$

Este argumento se puede repetir para demostrar el caso general a partir de los casos anteriores.

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \to V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

Hay que demostrar la octava propiedad ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Sea $v \in V$ cualquiera.
Por la sobreyectividad, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

$$1 \cdot v = 1 \cdot (\lambda \cdot w) = (1 \cdot \lambda) \cdot w = \lambda \cdot w = v$$

Ejercicio 1.8.1.

$$u + v = v + w \qquad \overset{?}{\Longrightarrow} \qquad u = w$$

Sumamos el opuesto de v en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{array}{l} (u + v) + (-v) = u + (v + (-v)) = u + \bar{0} = u \\ \qquad \| \\ (v + w) + (-v) = (w + v) + (-v) = w + (v + (-v)) = w + \bar{0} = w \end{array}$$

Ejercicio 1.9.1.

$$S_1 = \{(a,b,c,d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 0\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

El vector nulo $(0,0,0,0)^T$ está en S_1, ya que $0 + 2 \cdot 0 = 0$.

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para la suma.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in S_1 \iff \begin{cases} a_1 + 2d_1 = 0 \\ a_2 + 2d_2 = 0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{aligned} &(a_1 + a_2) + 2(d_1 + d_2) \\ &= a_1 + 2d_1 + a_2 + 2d_2 \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para el producto por escalares.

$$\lambda \in \mathbb{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in S_1 \iff a + 2d = 0 \implies$$

$$\begin{aligned} &(\lambda a) + 2(\lambda d) \\ &= \lambda(a + 2d) \\ &= \lambda \cdot 0 = 0 \end{aligned} \iff \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.2. $S_2 = \{(a,b,c,d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2 \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2 \qquad \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0 \qquad 5 + 2 \cdot (-2) = 1 \qquad 50 + 2 \cdot (-20) = 10$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_2 \qquad \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in S_2 \qquad \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$3 + 2 \cdot (-1) = 1 \qquad 9 + 2 \cdot (-4) = 1 \qquad 12 + 2 \cdot (-5) = 2$$

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \overline{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

No es subespacio.

Falla el producto por escalares. Contraejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2+3i \\ 2-3i \end{pmatrix} \in T \qquad i \cdot \begin{pmatrix} 2+3i \\ 2-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2i \\ +3+2i \end{pmatrix} \notin T$$

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \overline{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

$$\lambda \in \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} a+bi \\ a-bi \end{pmatrix} \in T \quad \Longrightarrow \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a+bi \\ a-bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda a)+(\lambda b)i \\ (\lambda a)-(\lambda b)i \end{pmatrix} \in T$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \operatorname{span}\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle = \{ \left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R} \} = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}$$

$$N = \operatorname{span}\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle = \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b \end{smallmatrix}\right) \mid b \in \mathbb{R} \} = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \}$$

$$L = \operatorname{span}\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle = \{ \left(\begin{smallmatrix} c \\ c \end{smallmatrix}\right) \mid c \in \mathbb{R} \} = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \}$$

$$M + N = \{ \left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \{ \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, \ y = 0 \} = \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \}$$

$$L \cap N = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, \ x = 0 \} = \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \}$$

$$L \cap (M + N) = L \cap \mathbb{R}^2 = L$$

$$(L \cap M) + (L \cap N) = \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \} + \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \} = \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \}$$

Ejercicio 1.11.2.

$\boxed{\subseteq}$ Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \overset{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\Longleftarrow \quad \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, \, x \in M}, \ \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, \, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

$$u \in L \cap (M + (L \cap N)) \quad \Longrightarrow \quad u \in L, \ u \in M + (L \cap N)$$

$$\Longrightarrow \quad \text{existen } a \in M, \ \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, \, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$. Nos falta comprobar que $a \in L$.

$$a = \underbrace{u}_{\in L} - \underbrace{b}_{\in L} \in L$$

Ejercicio 1.11.2.

$\boxed{\supseteq}$ Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$u \overset{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) \quad \Longleftarrow \quad \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \Longleftarrow$$

$$\Longleftarrow \quad \text{existen } x \in M,\ \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L,\, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

$$u \in (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\Longrightarrow \quad \text{existen } \underbrace{a \in L \cap M}_{a \in L,\, a \in M},\ \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L,\, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$. Nos falta comprobar que $u \in L$.

$$u = \underbrace{a}_{\in L} + \underbrace{b}_{\in L} \in L$$

Ejercicio 1.13.

S, T subespacios.

$$S \cup T \text{ es subespacio} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{o bien } S \subseteq T \quad \text{o bien } T \subseteq S$$

$\boxed{\text{I} \Longleftarrow \text{D}}$

Si por ejemplo $S \subseteq T$, entonces $S \cup T = T$.
Luego $S \cup T$ es subespacio, porque por hipótesis T es subespacio.

Análogamente si $T \subseteq S$.

Ejercicio 1.13.

$\boxed{\text{I} \Longrightarrow \text{D}}$ Probaremos el contrarrecíproco: $\boxed{\text{no I} \Longleftarrow \text{no D}}$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \quad \Longleftarrow \quad S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T & \Longrightarrow \quad \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S & \Longrightarrow \quad \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Veamos que $a + b$ no está en $S \cup T$ mediante reducción al absurdo.
Suponemos que $a + b \in S \cup T$, y llegaremos a una contradicción.

Si por ejemplo $a + b \in S$ (análogamente si $a + b \in T$), entonces:

$$b = \underbrace{(a + b)}_{\in S} - \underbrace{a}_{\in S} \in S \qquad \text{contradicción}$$

Ejercicio 1.14.

Fijamos un vector $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Existen } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 = t_1 \\ x_1 - \ \ x_2 = t_2 \\ x_1 + 2x_2 = t_3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q.} \quad x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = T$$

Por último, T es subespacio porque
sabemos que cualquier subconjunto de la forma $\operatorname{span}\langle v_1, v_2 \rangle$ es subespacio.

Ejercicio 1.15.

La familia es libre si y solo si

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ \beta \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

implica que necesariamente $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Transformamos esta ecuación vectorial en un sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + \alpha x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - x_3 + \beta x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Así el problema se reduce a calcular para qué valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
el sistema es compatible determinado.

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta+3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta+9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta+9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3\beta-24 & 0 \end{array}\right)$$

La familia es libre $\iff$ el sistema es compatible determinado $\iff$

$$\alpha \neq 2 \qquad \text{y} \qquad \beta \neq -8$$

Ejercicio 1.16.

Sea null el vector nulo de este espacio vectorial:

$$\begin{aligned} \text{null} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Sean λ, μ escalares tales que:

$$\lambda \cdot \text{sen} + \mu \cdot \cos = \text{null}$$

Debemos probar que necesariamente $\lambda = \mu = 0$.

Convertimos esta ecuación vectorial en un sistema de infinitas ecuaciones:

$$\lambda \cdot \text{sen}(x) + \mu \cdot \cos(x) = 0 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 1.16.

$$\text{sen}(x) \cdot \lambda + \cos(x) \cdot \mu = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \overset{?}{\Longrightarrow} \qquad \lambda = \mu = 0$$

Resolver estas infinitas ecuaciones nos llevaría mucho rato.

Idea: De las infinitas ecuaciones, vamos a coger unas pocas, con la esperanza de que el subsistema resultante sea compatible determinado.

$$\begin{cases} \text{sen}(0) \cdot \lambda + \cos(0) \cdot \mu = 0 \\ \text{sen}(\pi/6) \cdot \lambda + \cos(\pi/6) \cdot \mu = 0 \\ \text{sen}(\pi/4) \cdot \lambda + \cos(\pi/4) \cdot \mu = 0 \\ \text{sen}(\pi/3) \cdot \lambda + \cos(\pi/3) \cdot \mu = 0 \\ \text{sen}(\pi/2) \cdot \lambda + \cos(\pi/2) \cdot \mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 0 \\ (\sqrt{1}/2) \cdot \lambda + (\sqrt{3}/2) \cdot \mu = 0 \\ (\sqrt{2}/2) \cdot \lambda + (\sqrt{2}/2) \cdot \mu = 0 \\ (\sqrt{3}/2) \cdot \lambda + (\sqrt{1}/2) \cdot \mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.17.

$$(a_1, \dots, a_n) \text{ es libre} \iff \begin{cases} a_1 \neq \bar{0} \\ a_k \notin \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1}\rangle & \forall k = 2, \dots, n \end{cases}$$

$\boxed{\text{I} \implies \text{D}}$

Hemos visto en teoría que una familia es ligada si contiene al vector nulo, o si un vector se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Ejercicio 1.17.

$\boxed{\text{I} \impliedby \text{D}}$ Probaremos el contrarrecíproco: $\boxed{\text{no I} \implies \text{no D}}$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$
o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1}\rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea: Sea k tal que $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = \bar{0} \qquad \lambda_k \neq 0$$

Si $k = 1$, $\lambda_1 a_1 = \bar{0}$, con $\lambda_1 \neq 0$. Por lo tanto $a_1 = \bar{0}$.

Si $k \geq 2$, despejamos a_k:

$$a_k = \frac{-\lambda_1}{\lambda_k} \cdot a_1 + \cdots + \frac{-\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \cdot a_{k-1} \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1}\rangle$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \overset{a=1,\, b=0}{=\!=\!=} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \overset{a=0,\, b=1}{=\!=\!=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan S_1, y son linealmente independientes porque no son proporcionales, luego forman una base de S_1.

Ejercicio 1.19.1.

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid a + 2d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2\delta \\ \lambda \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} \mid \delta, \mu, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forman una base de T_1

(son linealmente independientes porque están escalonados).

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar una familia generadora de $S_1 + T_1$ juntamos las familias generadoras de S_1 y T_1.

$$S_1+T_1=\operatorname{span}\langle \begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$$

$$=\operatorname{span}\langle \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\rangle$$

$$=\operatorname{span}\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap T_1$ juntamos las ecuaciones implícitas de S_1 y T_1.

Empezamos calculando las ecuaciones implícitas de S_1.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in S_1 \iff \exists\, a,b\in\mathbb{C} \text{ t.q. } \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a\\a\\a-b\\b\end{pmatrix}$$

$$\iff \text{el sistema } \begin{cases}3a = x_1\\ a = x_2\\ a-b=x_3\\ b=x_4\end{cases} \text{ es compatible}$$

(a, b son las incógnitas; x_1, x_2, x_3, x_4 son parámetros fijos)

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c}3&0&x_1\\1&0&x_2\\1&-1&x_3\\0&1&x_4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x_2\\0&1&x_4\\1&-1&x_3\\3&0&x_1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x_2\\0&1&x_4\\0&0&-x_2+x_3+x_4\\0&0&x_1-3x_2\end{array}\right)$$

$$S_1\to\begin{cases}-x_2+x_3+x_4=0\\ x_1-3x_2=0\end{cases}\qquad T_1\to\left\{x_1+2x_4=0\right.$$

$$S_1\cap T_1\to\begin{cases}-x_2+x_3+x_4=0\\ x_1-3x_2=0\\ x_1+2x_4=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_3-x_2+x_4=0\\ -3x_2+x_1=0\\ x_1+2x_4=0\end{cases}$$

El vector $(6,2,5,-3)^T$ forma una base de $S_1\cap T_1$.

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w=(3a,a,a-b,b)^T$ es un vector genérico de S_1.

$$w\in T_1 \iff w \text{ cumple la ecuación } x_1+2x_4=0$$

$$\iff 3a+2b=0 \iff b=\frac{-3}{2}a$$

$$\iff w=\left(3a,a,\frac{5}{2}a,\frac{-3}{2}a\right)^T$$

$$S_1\cap T_1=\left\{\left(3a,a,\frac{5}{2}a,\frac{-3}{2}a\right)^T \mid a\in\mathbb{C}\right\}=\operatorname{span}\langle\left(3,1,\frac{5}{2},\frac{-3}{2}\right)^T\rangle$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la base (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en coordenadas.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Porque (B_1, B_2, B_3) es una familia libre.

Porque A_3 es linealmente independiente de B_1, B_2, B_3.

Las operaciones de Gauss son reversibles.

Ejercicio 1.24.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ejercicio 1.24.

Por último no debemos olvidarnos de deshacer el cambio a coordenadas, para escribir la solución como matrices 2×2:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned} \dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &\overset{*}{=} \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - \dim(S_1 \cap S_2) \\ &\qquad - \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 \\ &\qquad - \dim(S_1 \cap S_2) - \dim(S_1 \cap S_3) - \dim(S_2 \cap S_3) \\ &\qquad + \dim(\underbrace{S_1 \cap S_3 \cap S_2 \cap S_3}_{S_1 \cap S_2 \cap S_3}) \end{aligned}$$

El problema es que, en general:

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \quad \neq \quad (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Ejercicio 1.25.

Nuevo ejercicio. Prueba que:

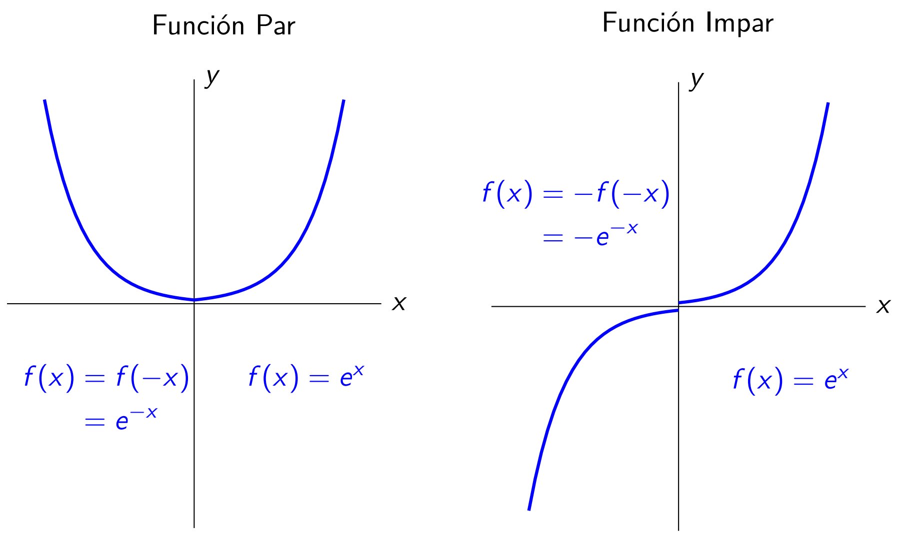
$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \quad \supseteq \quad (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Y encuentra un ejemplo en el que este contenido sea estricto.

$$\Longrightarrow \qquad \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \quad \geq \quad \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)]$$

$$\Longrightarrow \qquad -\dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \quad \leq \quad -\dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)]$$

Ejercicio 1.28.1.



Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P no es de dimensión finita.
Por ejemplo, $\dim P > 2$ porque la familia de vectores (p_1, p_2, p_3) es libre:

$$\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 = \text{null} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad p_1(x) \cdot \lambda_1 + p_2(x) \cdot \lambda_2 + p_3(x) \cdot \lambda_3 = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_1 & & & = & 0 & \text{si } x = 1 \\ & \lambda_2 & & = & 0 & \text{si } x = 2 \\ & & \lambda_3 & = & 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$\boxed{P \cap I = \{\text{null}\}}$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es a la vez par e impar.

Sea $x \in \mathbb{R}$ cualquiera:

$$f(x) = f(-x) = -f(x) \qquad \Rightarrow \qquad 2 \cdot f(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = 0$$

Ejercicio 1.28.2.

$\boxed{P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera.
Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$f(x) = p(x) + q(x)$$
$$f(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) - q(x)$$

Por lo tanto debe ser:

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad q(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Finalmente comprobamos:

$$p(-x) = p(x) \qquad q(-x) = -q(x) \qquad p(x) + q(x) = f(x)$$

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Una aplicación f entre dos conjuntos V y W, escrito $f : V \to W$, es una correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto inicial V un único elemento del conjunto final W.

2. Las dos aplicaciones siguientes son distintas, ya que aunque la regla de asignación es la misma, los conjuntos finales son distintos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3 + x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow [3, \infty) \\ x &\longmapsto 3 + x^2 \end{aligned}$$

3. La siguiente correspondencia no es una aplicación, ya que no hemos definido la imagen del número 5:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1/(x - 5) \end{aligned}$$

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

4. Una aplicación es inyectiva si todo elemento del conjunto final tiene a lo sumo una preimagen.

   Es decir, $f(u) = f(v)$ implica $u = v$.

5. Una aplicación es sobreyectiva si todo elemento del conjunto final tiene al menos una preimagen.

   Es decir, para todo $w \in W$ existe un $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

6. Una aplicación $f : V \to W$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

   En tal caso existe su aplicación inversa $f^{-1} : W \to V$.

Definición 2.2.

2.1. Aplicaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales

sobre el mismo cuerpo de escalares $\mathbb{F}$.

Sea $f : V \to W$ una aplicación entre los conjuntos V y W.

Se dice que la aplicación f es lineal si:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ para todos $u, v \in V$.
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$.

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \to W$ una aplicación $\mathbb{F}$-lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$

   (Denotamos $\bar{0}$ tanto al vector nulo de V como al de W).

Demostración.

$f(\bar{0}) = f(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot f(\bar{0}) = \bar{0}$. □

2. $f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)$

   para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Gracias a las notas 1.46 sabemos que,
   si en un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V de dimensión finita n
   fijamos una base $\mathcal{B}$,
   entonces queda definida una aplicación de V en $\mathbb{F}^n$
   que a cada vector lo envía a sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$.

   Denotaremos esta aplicación:

   $$f_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^n$$

   Observamos ahora que las ecuaciones
   $f_{\mathcal{B}}(v+w) = f_{\mathcal{B}}(v) + f_{\mathcal{B}}(w)$ y $f_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f_{\mathcal{B}}(v)$
   dicen exactamente que esta aplicación es lineal.

   También sabemos que $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva.

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

$$\begin{array}{cccc} h_A & : & \mathbb{F}^n \longrightarrow & \mathbb{F}^m \\ & & \underbrace{X}_{n\times 1} \longmapsto & \underbrace{A}_{m\times n} \cdot \underbrace{X}_{n\times 1} = \underbrace{Y}_{m\times 1} \end{array}$$

   Por esto escribimos los vectores de $\mathbb{F}^n$ por columnas,
   para poder interpretarlos como matrices de tamaño $n \times 1$,
   y que el producto $A \cdot X$ tenga sentido.

   La aplicación h_A es lineal;
   por ejemplo $h_A(X_1 + X_2) = h_A(X_1) + h_A(X_2)$
   debido a la propiedad distributiva de las matrices.

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

1. La siguiente aplicación es lineal porque es de la forma $h = h_A$.

$$\begin{array}{rccc} h & : & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$h\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}\right) = h\left(\begin{pmatrix} x_1+x_1' \\ x_2+x_2' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(x_1+x_1')-(x_2+x_2') \\ 0 \\ -3(x_2+x_2') \end{pmatrix}$$

$$h\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + h\left(\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1-x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_1'-x_2' \\ 0 \\ -3x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1-x_2+2x_1'-x_2' \\ 0 \\ -3x_2-3x_2' \end{pmatrix}$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

2. La aplicación que a cada polinomio le asocia su derivada es lineal:

$$\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$
$$a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \longmapsto a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}$$

3. La aplicación nula, que a cada $v \in V$ lo envía a $\bar{0} \in W$, es lineal.

   La aplicación identidad $\mathrm{id}_V : V \to V$, dada por $\mathrm{id}_V(v) = v$, es lineal.

Ejercicios 2.6.

2.1. Aplicaciones lineales

- 2.1
- 2.2
- 2.3

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el núcleo de una aplicación lineal $f : V \to W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$$

2. Recordamos que la imagen de una aplicación $f : V \to W$ es:

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid \text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = w\}$$

Notas 2.8. Sea $f : V \to W$ lineal.

1. $\ker f$ es un subespacio del espacio inicial V.
2. $\operatorname{im} f$ es un subespacio del espacio final W.

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.
Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente.

Supongamos pues que $\ker f = \{\bar{0}\}$,
y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$,
debemos probar que $v_1 = v_2$.

Observamos que $\bar{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$.
Luego el vector $v_1 - v_2$ está en el núcleo de f.
Por tanto $v_1 - v_2 = \bar{0}$, es decir, $v_1 = v_2$. □

4. f es sobreyectiva si y solo si $\operatorname{im} f = W$.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \to W$ lineal.
Supongamos que $\dim V < \infty$.

Entonces:

$$\underbrace{\dim V}_{n} - \underbrace{\dim(\ker f)}_{m} = \underbrace{\dim(\operatorname{im} f)}_{¿\, n-m\, ?}$$

Demostración.

Sea $n = \dim V$, y sea $m = \dim(\ker f)$.

Tomamos una base $(a_1, \dots, a_m)$ de $\ker f$,
y la ampliamos con $a_{m+1}, \dots, a_n$ hasta formar una base de V.

Basta que probemos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ es base de $\operatorname{im} f$.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\operatorname{im} f$.

   Cogemos un vector $w \in \operatorname{im} f$ cualquiera,
   esto significa que existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

   Como $(a_1, \dots, a_n)$ es base de V,
   existen escalares λ_i de manera que $v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$.

$$\begin{aligned} w = f(v) &= f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) \\ &= \lambda_1 f(a_1) + \cdots + \lambda_n f(a_n) \\ &= \lambda_1 \bar{0} + \cdots + \lambda_m \bar{0} + \lambda_{m+1} f(a_{m+1}) + \cdots + \lambda_n f(a_n) \\ &= \lambda_{m+1} f(a_{m+1}) + \cdots + \lambda_n f(a_n) \end{aligned}$$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

2. Veamos que $(f(a_{m+1}), \ldots, f(a_n))$ es familia libre.

   Sean $\mu_{m+1}, \ldots, \mu_n$ escalares tales que:

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \mu_{m+1} f(a_{m+1}) + \cdots + \mu_n f(a_n)\\ &= f(\mu_{m+1} a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n)\end{aligned}$$

   Por tanto el vector $u = \mu_{m+1} a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$ está en el núcleo de f.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

(Sabemos que el vector $u = \mu_{m+1} a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$ está en $\ker f$, y tenemos que probar que $\mu_{m+1} = \cdots = \mu_n = 0$).

Como $(a_1, \ldots, a_m)$ es base de $\ker f$, existen escalares $\mu_1, \ldots, \mu_m$ tales que:

$$\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_m a_m = u = \mu_{m+1} a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$$

Pero sabemos que $(a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n)$ es familia libre, por lo que necesariamente $\mu_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. □

Corolario 2.10 (de la demostración).

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal y biyectiva.

1. Si $(a_1, \ldots, a_n)$ es base de V, entonces $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ es base de W.
2. En particular, $\dim V = \dim W$.

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal tal que $\dim V = \dim W < \infty$.

Entonces:

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es sobreyectiva}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f \text{ es inyectiva} &\iff \ker f = \{\bar{0}\} \iff \dim(\ker f) = 0\\ &\iff \dim(\operatorname{im} f) = \dim V \iff \dim(\operatorname{im} f) = \dim W\\ &\iff \operatorname{im} f = W \iff f \text{ es sobreyectiva}\end{aligned}$$

Aplicando que $\dim V - \dim(\ker f) = \dim(\operatorname{im} f)$. □

Ejercicios 2.12.

2.2. Núcleo e imagen

- 2.4
- 2.5
- 2.6
- 2.7
- 2.8
- 2.9

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

1. La composición de aplicaciones lineales es lineal.

   Es decir, si tanto $f : V \to W$ como $g : W \to U$ son $\mathbb{F}$-lineales, entonces la aplicación $g \circ f : V \to U$ también es $\mathbb{F}$-lineal.

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \to W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \to V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.
Como f es biyectiva existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(w_1 + w_2) &= f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) \\ &= v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda w_1) &= f^{-1}(\lambda f(v_1)) = f^{-1}(f(\lambda v_1)) \\ &= \lambda v_1 = \lambda f^{-1}(w_1) \end{aligned}$$

□

Propiedad 2.14.

Sean V y W dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales.

Sea $(a_1, \ldots, a_n)$ una base de V,

y sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una familia de vectores de W.

Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \to W$

tal que $f(a_i) = b_i$ para todo i.

Ejemplos 2.15.

Antes de demostrar la propiedad 2.14, veamos qué puede pasar si la familia del espacio inicial no es base.

Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$.

1. Sean $a_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $a_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $a_3 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\qquad b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = 9$.

   No puede existir $f : V \to W$ lineal tal que $f(a_i) = b_i$ ya que:

$$f(a_3) = f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) = 2 + 5 = 7 \neq 9$$

Ejemplos 2.15.

2. Sean $a_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\qquad b_1 = 2$.

   Existe más de una aplicación lineal $f : V \to W$ tal que $f(a_1) = b_1$.

$$\begin{array}{rcl} f_1 \; : \; \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & 2x - 10y = \begin{pmatrix} 2 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_2 \; : \; \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & 2x - 24y = \begin{pmatrix} 2 & -24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Propiedad 2.14.

Sean V y W dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales.
Sea $(a_1, \ldots, a_n)$ una base de V,
y sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una familia de vectores de W.

Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \to W$
tal que $f(a_i) = b_i$ para todo i.

Demostración de la propiedad 2.14.

Recordamos que, como $(a_1, \ldots, a_n)$ es base de V, dado un vector $v \in V$, existen unos únicos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$.

Por lo tanto la existencia, la linealidad y la unicidad de la aplicación f son consecuencia de la ecuación:

$$f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$$

$\square$

Lema 2.16.

Sea $h : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ una aplicación lineal.

Llamemos $(e_1, \ldots, e_n)$ a la base canónica de $\mathbb{F}^n$.

Entonces $h = h_A$,

donde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es la matriz por columnas $A = (h(e_1)| \ldots |h(e_n))$.

Lema 2.16.

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1)| \ldots |h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

$$\begin{aligned} h_A(X) = AX &= x_1 h(e_1) + \cdots + x_n h(e_n) \\ &= h(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = h(X) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

□

Ejercicios 2.17.

- 2.10
- 2.11

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Sean V y W dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales de dimensión finita,

$\dim V = n$, $\dim W = m$.

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V,

y sea $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ una base de W.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{F}^n & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

1. Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$,

   podemos construir una aplicación lineal $f : V \to W$

   definiendo $f = f_{\mathcal{C}}^{-1} \circ h_A \circ f_{\mathcal{B}}$.

   Es decir, tomamos como f la única aplicación que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "h_A"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$

   ($f_{\mathcal{C}}^{-1} \circ h_A \circ f_{\mathcal{B}}$ es lineal por ser composición de aplicaciones lineales).

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \to W$ lineal, definimos $h = f_{\mathcal{C}} \circ f \circ f_{\mathcal{B}}^{-1}$, es decir, h es la única aplicación que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, dashed, "h"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$

   El lema 2.16 dice que existe una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ t.q. $h = h_A$.

   Si $(e_1, \ldots, e_n)$ es la base canónica de $\mathbb{F}^n$, entonces $f_{\mathcal{B}}(b_i) = e_i \quad \forall i$, es decir, $f_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i) = b_i \quad \forall i$; luego A es la matriz por columnas:

$$A = (h(e_1)| \ldots |h(e_n)) = \left(f_{\mathcal{C}}(f(b_1)) \middle| \ldots \middle| f_{\mathcal{C}}(f(b_n)) \right)$$

   Por definición, A es la matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

En conclusión:

3. Una vez que fijamos bases en V y W,
   tenemos una correspondencia biyectiva
   entre las aplicaciones lineales de V en W
   y las matrices de $M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

4. Dicha correspondencia biyectiva viene dada por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "h_A"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$

Observación 2.18.

5. Dada una aplicación lineal, construimos su matriz así:
   I) Partimos de los vectores de la base inicial.
   II) Calculamos sus imágenes.
   III) Los expresamos en coordenadas respecto de la base final.
   IV) El resultado son las columnas de la matriz.

6. Que A sea la matriz de f en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ significa lo siguiente. Si $X \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base $\mathcal{B}$, y $Y \in \mathbb{F}^m$ son las coordenadas de su imagen $f(v) \in W$ en la base $\mathcal{C}$, entonces:
$$Y = AX$$

Nota 2.19.

¿Cuál es la matriz de
$$\begin{aligned} h_A : \mathbb{F}^n &\longrightarrow \mathbb{F}^m \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$
respecto de las bases canónicas? Es la matriz A.

Ejemplo 2.20.

Calculemos la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$ respecto de las bases $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix})$ y $\mathcal{C} = (\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

Solución.

I) $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

II) $f(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(b_2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.20.

Solución.

III) Buscamos escalares λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
y μ_1, μ_2 tales que $\mu_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.
Podemos resolver estos dos sistemas a la vez:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -8 & -12 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

IV) La matriz que buscamos es $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

$\square$

Ejercicios 2.21.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

- 2.12
- 2.13

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales de dimensión finita, $\dim V = n$, $\dim W = m$.

1. Recordamos que $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2. Sea $\mathrm{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones $\mathbb{F}$-lineales del espacio inicial V al espacio final W, es decir:

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ lineal}\}$$

$\mathrm{Hom}(V, W)$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial con las operaciones siguientes.

- La suma de dos vectores $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $f(v) + g(v) \in W$.
- El producto del escalar λ por el vector $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $\lambda f(v) \in W$.

$\mathrm{Hom}(V, W)$ cumple las ocho propiedades de espacio vectorial gracias a que el espacio final W es espacio vectorial; aquí las propiedades del espacio inicial V no juegan ningún papel.

El vector neutro de $\mathrm{Hom}(V, W)$ es la aplicación nula, que a cada $v \in V$ lo envía a $\bar{0} \in W$.

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

3. Fijemos una base en V y una base en W.

   Obtenemos una aplicación biyectiva entre $\mathrm{Hom}(V, W)$ y $M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

   Además esta aplicación biyectiva es lineal.

   En otras palabras,
   si A es la matriz de f, y B es la matriz de g,
   entonces $A + B$ es la matriz de $f + g$;
   y si λ es un escalar, entonces λA es la matriz de λf.

Nota 2.23.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

La construcción anterior tiene especial interés en el caso $W = \mathbb{F}$.

Decimos que $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$ es el espacio vectorial dual del espacio vectorial V, y lo denotamos:

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F}) = \{f : V \to \mathbb{F} \mid f \text{ lineal}\}$$

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Componer aplicaciones lineales es equivalente a multiplicar matrices.

En términos precisos:
Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de $f : V \to W$ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$,
y $B \in M_{p\times m}(\mathbb{F})$ es la matriz de $g : W \to U$ en las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$,
entonces la matriz de la composición $g \circ f : V \to U$ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$
es el producto $BA \in M_{p\times n}(\mathbb{F})$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] & U \arrow[d, "f_{\mathcal{D}}"] \\
\mathbb{F}^n \arrow[r, "h_A"] \arrow[rr, bend right, "h_{BA}"'] & \mathbb{F}^m \arrow[r, "h_B"] & \mathbb{F}^p
\end{tikzcd}$$

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Demostración.

Basta comprobar que $h_B \circ h_A = h_{BA}$.

Pero esto es consecuencia de la asociatividad del producto de matrices, ya que para todo $X \in \mathbb{F}^n$:

$$h_B(h_A(X)) = B(AX) = (BA)X = h_{BA}(X)$$

□

Ejercicios 2.25.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

- 2.14
- 2.15

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Definiciones 2.26.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas en $\mathbb{F}$, i.e., sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

La matriz A se dice regular si la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

En tal caso,
sabemos que la aplicación inversa $(h_A)^{-1} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ es también lineal,
así que denotamos A^{-1} a su matriz respecto de las bases canónicas,
es decir, $(h_A)^{-1} = h_{A^{-1}}$.

Decimos que A^{-1} es la matriz inversa de A.

Notas 2.27.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz regular. Entonces:

1. A^{-1} también es regular, y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

Demostración.

$h_{AA^{-1}} = h_A \circ h_{A^{-1}} = h_A \circ (h_A)^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{F}^n} = h_{I_n}$. □

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.

Demostración.

Este es un resultado de la teoría de matrices, sin embargo para probarlo vamos a utilizar la teoría de aplicaciones lineales.

1. Veamos que la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

   $h_A \circ h_B = h_{AB} = h_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{F}^n}$, luego la aplicación $h_A \circ h_B$ es biyectiva.

   Por tanto $h_A \circ h_B$ es sobreyectiva, luego h_A es sobreyectiva,
   y como la dimensión del espacio inicial es igual a la del espacio final,
   $h_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Demostración.

2. Como h_A es biyectiva, A es regular, y existe A^{-1}.

   Calculamos $A^{-1}AB$:

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

   B es regular porque A^{-1} es regular.

□

Corolario 2.29.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas tales que $AB = I_n$.

1. Entonces las matrices A y B conmutan, $AB = BA = I_n$.
2. Si A' es otra matriz cuadrada tal que $A'B = I_n$, entonces $A = A'$.
3. Si B' es otra matriz cuadrada tal que $AB' = I_n$, entonces $B = B'$.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas.

1. La matriz producto AB es regular sii tanto A como B son regulares.
   En tal caso $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Recuerda que, al trasponer matrices, el orden de los productos también se invierte, es decir, $(AB)^T = B^TA^T$.
3. La matriz A es regular si y solo si su traspuesta A^T es regular.
   En tal caso $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Si A y B son regulares, entonces:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$$

Luego el teorema de las matrices inversas nos dice que AB y A^T son matrices regulares, y que sus inversas son $B^{-1}A^{-1}$ y $(A^{-1})^T$.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Recíprocamente, si la matriz AB es regular,
entonces la aplicación lineal $h_{AB} = h_A \circ h_B$ es biyectiva.

Por consiguiente h_A es sobreyectiva y h_B es inyectiva.

Luego tanto h_A como h_B son biyectivas, ya que la dimensión de sus espacios iniciales es igual a la de sus espacios finales. □

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Sea $A \in M_3(\mathbb{C})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Es A regular? En caso afirmativo, calcula su matriz inversa.

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

El teorema de las matrices inversas nos dice que simplemente debemos comprobar si existe una matriz tal que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad entre matrices 3×3 es equivalente a que se cumplan tres sistemas de ecuaciones a la vez:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gracias al método de Gauss, podemos averiguar si los tres sistemas son compatibles y hallar su solución mediante un único cálculo:

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

Luego A es regular, y su matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -5 & 2 & 10 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$\square$

Ejercicios 2.32.

2.6. Matrices regulares

- 2.16
- 2.17
- 2.18
- 2.19

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

1. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que intercambiarle las filas 1 y 2.

Demostración.

En efecto, por ejemplo si la matriz tiene 2 columnas:

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$\square$

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

2. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que multiplicar la segunda fila por λ.

Demostración.

Por ejemplo si la matriz tiene 3 columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

□

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

3. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que sumarle a la fila 3 la fila 1.

Demostración.

Por ejemplo si la matriz tiene 1 columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{11} + a_{31} \end{pmatrix}$$

□

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos matrices elementales a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35.

No es necesario que memoricemos la expresión de las matrices elementales, en su lugar aplicamos la operación elemental deseada a la matriz identidad.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la matriz elemental 4×4 correspondiente a sumarle a la fila 2 la fila 4; llamemos F a dicha matriz.

$$F \overset{\text{propiedad de } I_4}{=\!=\!=\!=} F \cdot I_4 \overset{\text{propiedad de } F}{=\!=\!=\!=} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.

2. Como las operaciones de Gauss son reversibles, las matrices elementales son regulares, y sus inversas también son matrices elementales.

Operación	Inversa
$F_i \to \lambda F_i$	$F_i \to \lambda^{-1} F_i$
$F_i \longleftrightarrow F_j$	$F_i \longleftrightarrow F_j$
$F_i \to F_i + F_j$	$F_i \to F_i - F_j$
$F_i \to F_i + \mu F_j$	$F_i \to F_i - \mu F_j$

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

3. Las matrices elementales, al multiplicarlas por la derecha en lugar de por la izquierda, actúan por columnas en lugar de por filas.

4. ¡Cuidado! La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

le suma a la fila 2 la fila 4 al multiplicarla por la izquierda,

le suma a la columna 4 la columna 2 al multiplicarla por la derecha.

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada. Son equivalentes:

1. A es regular.
2. A es producto de matrices elementales.
3. Existen $F_1, F_2, \ldots, F_r \in M_n(\mathbb{F})$ matrices elementales tales que:

$$F_r \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot A = I_n$$

Demostración.

- $(3 \Rightarrow 2)$ Despejando obtenemos $A = (F_1)^{-1} \cdot (F_2)^{-1} \cdots (F_r)^{-1}$. (Cuidado con el cambio de orden). Así, el resultado es consecuencia de que la inversa de una matriz elemental es también elemental.

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Las matrices elementales son regulares,
  y el producto de matrices regulares es regular.

- $(1 \Rightarrow 3)$ El algoritmo desarrollado en el ejemplo 2.31 nos dice que una matriz cuadrada es regular si y solo si existe
  una sucesión finita de operaciones del método de Gauss por filas,
  de manera que al aplicarlas a la matriz,
  obtenemos la matriz identidad.

$\square$

Ejercicios 2.38.

2.7. Matrices elementales

- 2.20

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Definición 2.39.

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de un mismo espacio vectorial V de dimensión finita.

La **matriz de cambio de bases** de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es la matriz de la aplicación identidad $\mathrm{id}_V : V \to V$ respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

Ejemplo 2.40.

Sean b_1, b_2, b_3 y b_1', b_2', b_3' los vectores de $\mathbb{Q}^3$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Observamos que $\dim \operatorname{span}\langle b_1, b_2, b_3\rangle = 3 = \dim \operatorname{span}\langle b_1', b_2', b_3'\rangle$, por lo tanto (b_1, b_2, b_3) y (b_1', b_2', b_3') son bases de $\mathbb{Q}^3$.

Calculemos la matriz de cambio de bases de (b_1, b_2, b_3) a (b_1', b_2', b_3').

Ejemplo 2.40.

Solución.

I) $b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $b_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

II) No hay que hacer nada.

III)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -5 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

IV) La matriz que buscamos es $\begin{pmatrix} -7 & -8 & -3 \\ -7 & -9 & -4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$\square$

Notas 2.41.

Sea P la matriz de cambio de bases de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ en el $\mathbb{F}$-espacio vectorial V.

1. P es una matriz cuadrada $n \times n$, es decir $P \in M_n(\mathbb{F})$, con $n = \dim V$.
2. Las columnas de P son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ respecto de $\mathcal{B}'$.
3. Como la aplicación identidad $\mathrm{id}_V : V \to V$ es biyectiva, la matriz P es regular, y su matriz inversa P^{-1} es la matriz de cambio de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.
4. Si $X \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base $\mathcal{B}$, y $X' \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas del mismo vector $v \in V$ en la base $\mathcal{B}'$, entonces:
$$X' = PX$$

Propiedad 2.42.

Recíprocamente,
dada una base $\mathcal{B}$ de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V,
con $\dim V = n < \infty$,
y dada una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ regular,

existe una única base $\mathcal{B}'$ de V tal que
P es la matriz de cambio de bases de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Ejemplo 2.43.

Observa que $\mathcal{B} = (b_1, b_2) = \left(\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right)\right)$ es una base de $\mathbb{R}^2$,
y que $P = \left(\begin{smallmatrix}-1 & 1\\-2 & 3\end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ es una matriz regular.

Halla la base $\mathcal{B}' = (b_1', b_2')$ de $\mathbb{R}^2$ tal que
la matriz de cambio de bases de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es P.

Ejemplo 2.43.

Solución.

Las columnas de P son los vectores de $\mathcal{B}$ expresados en coordenadas de $\mathcal{B}'$.

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, que es P^{-1}, ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de $\mathcal{B}'$, que buscamos, expresados en coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$, que conocemos.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}-3 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

$$b_1' = -3b_1 - 2b_2 = -3\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\-17\end{pmatrix} \qquad b_2' = b_1 + b_2 = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Comprobemos que $\mathcal{B}'$ es base.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b_1 = -1b_1' - 2b_2' & \implies b_1 \in \operatorname{span}\langle b_1', b_2' \rangle \\ b_2 = +1b_1' + 3b_2' & \implies b_2 \in \operatorname{span}\langle b_1', b_2' \rangle \end{cases}$$

$$\implies \operatorname{span}\langle b_1, b_2 \rangle \subseteq \operatorname{span}\langle b_1', b_2' \rangle$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \implies \cdots \implies \operatorname{span}\langle b_1', b_2' \rangle \subseteq \operatorname{span}\langle b_1, b_2 \rangle$$

En conclusión: $\operatorname{span}\langle b_1, b_2 \rangle = \operatorname{span}\langle b_1', b_2' \rangle$.

Por lo tanto $\mathcal{B}'$ es base de $\mathbb{R}^2$. □

Ejercicios 2.44.

2.8. Cambios de bases I

- 2.21

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Sea $f : V \to W$ una aplicación $\mathbb{F}$-lineal.

Supongamos que $\dim V = n < \infty$ y $\dim W = m < \infty$.

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de V, y sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ bases de W.

1. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ la matriz de f en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.
2. Sea $B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ la matriz de f en las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}'$.
3. Sea $P \in M_n(\mathbb{F})$ la matriz de cambio de bases de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.
4. Sea $Q \in M_m(\mathbb{F})$ la matriz de cambio de bases de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$.

Entonces:

$$B = QAP^{-1}$$

Propiedad 2.45.
2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V.

a) Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base $\mathcal{B}$.

b) Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base $\mathcal{B}'$.

c) Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base $\mathcal{C}$.

d) Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base $\mathcal{C}'$.

$$Y = AX \qquad Y' = BX' \qquad X' = PX \qquad Y' = QY$$

$$QAX = QY = Y' = BX' = BPX$$

Esto es cierto para todo $X \in \mathbb{F}^n$, ya que v puede ser cualquier vector, por lo tanto $QA = BP$. □

Propiedad 2.45.
2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "f_{\mathcal{B}'}"] \arrow[rrr, bend left, "f"] & V \arrow[l, "\mathrm{id}_V"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] & W \arrow[d, "f_{\mathcal{C}'}"] \\
\mathbb{F}^n \arrow[rrr, bend right, "h_B"'] & \mathbb{F}^n \arrow[l, "h_P"'] \arrow[r, "h_A"] & \mathbb{F}^m \arrow[r, "h_Q"] & \mathbb{F}^m
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $h_B = h_Q \circ h_A \circ (h_P)^{-1} = h_Q \circ h_A \circ h_{P^{-1}} = h_{QAP^{-1}}$. □

Ejemplo 2.46.
2.9. Cambios de bases II

En el ejemplo 2.20 vimos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$ respecto de las bases $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ y $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Calculemos la matriz de la aplicación respecto de las bases canónicas, y comprobemos que se cumple la propiedad 2.45.

Ejemplo 2.46.
2.9. Cambios de bases II

Solución.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$, en b. canón. es $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(Es fácil calcular matrices si la base final es la canónica).

En efecto, se cumple que $BP = QA$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

□

Notas 2.47.

2.9. Cambios de bases II

1. Un endomorfismo es una aplicacion lineal
   en la que el espacio inicial es igual al espacio final.
2. Cuando calculemos la matriz de un endomorfismo,
   exigiremos que la base inicial sea igual a la base final.
3. En tal caso en la propiedad 2.45
   tendríamos que $V = W$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ y $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$.
   Por tanto $P = Q$, y la ecuación se escribe:

$$B = PAP^{-1}$$

Ejercicios 2.48.

2.9. Cambios de bases II

- 2.22
- 2.23

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Definiciones 2.49.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ matrices $m \times n$.

   A es equivalente a B si
   existen matrices $P \in M_m(\mathbb{F})$ y $Q \in M_n(\mathbb{F})$ regulares t.q. $B = PAQ$.
2. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas $n \times n$.

   A es semejante a B si
   existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ regular tal que $B = PAP^{-1}$.

Nota 2.50.

Estas dos relaciones son reflexivas, simétricas y transitivas.

Veámoslo por ejemplo con la equivalencia.

1. Reflexiva. Toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es equivalente a sí misma.

Demostración.

Tomando $P = I_m$ y $Q = I_n$, tenemos que $A = I_m A I_n = PAQ$;
y tanto I_m como I_n son regulares. □

Nota 2.50.

2. Simétrica. Si A es equivalente a B, entonces B es equivalente a A.

Demostración.

Si $B = PAQ$, entonces $A = P^{-1}BQ^{-1}$;
y tanto P^{-1} como Q^{-1} son regulares. □

3. Transitiva. Si A es equivalente a B, y B es equivalente a C, entonces A es equivalente a C.

Demostración.

Si $B = PAQ$, y $C = RBS$, entonces $C = (RP)A(QS)$;
y tanto RP como QS son regulares. □

Notas 2.51.

1. Las matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes si y solo si son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.

   En términos precisos: A y B son equivalentes si y solo si existe
   - un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V de dimensión n,
   - un $\mathbb{F}$-espacio vectorial W de dimensión m,
   - una aplicación lineal $f : V \to W$,
   - bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V,
   - y bases $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ de W

   de manera que
   - A es la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$,
   - y B es la matriz de f respecto de $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}'$.

Notas 2.51.

2. Las matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ son semejantes si y solo si son matrices del mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

   En términos precisos: A y B son semejantes si y solo si existe
   - un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V de dimensión n,
   - un endomorfismo $f : V \to V$,
   - y bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V

   de manera que
   - A es la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$,
   - y B es la matriz de f respecto de $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}'$.

Ejercicios 2.52.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

- 2.24
- 2.25

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \to W$ lineal, y sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

1. El rango de f es la dimensión del subespacio $\operatorname{im} f$ de W.
2. El rango por columnas de A es la dimensión del subespacio de $\mathbb{F}^m$ generado por las columnas de A.
3. El rango por filas de A es la dimensión del subespacio de $\mathbb{F}^n$ generado por las filas de A.

Nota 2.54.

El rango por filas de una matriz A es igual
al rango por columnas de su matriz traspuesta A^T.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal.
Supongamos que $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de f respecto a algunas bases.

Entonces el rango de f es igual al rango por columnas de A.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

El diagrama que relaciona f y A es:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "h_A"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$

Recordamos que multiplicar la matriz A por el vector columna X es lo mismo que hacer una combinación lineal de las columnas de A con pesos las componentes de X.

Por lo tanto el rango de h_A es igual al rango por columnas de A,
y lo que tenemos que demostrar es que $\dim(\operatorname{im} f) = \dim(\operatorname{im} h_A)$.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "h_A"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned} \operatorname{im} f &\longrightarrow \operatorname{im} h_A \\ w &\longmapsto f_{\mathcal{C}}(w) \end{aligned}$$

Vamos a probar que esta aplicación está bien definida, es lineal y biyectiva.
Por lo tanto $\dim(\operatorname{im} f) = \dim(\operatorname{im} h_A)$ y habremos terminado.
La aplicación es lineal e inyectiva porque $f_{\mathcal{C}}$ es lineal e inyectiva.

1. Está bien definida.
   Dado $w \in \operatorname{im} f$ hay que ver que $f_{\mathcal{C}}(w)$ pertenece a $\operatorname{im} h_A$.
   Existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.
   $$f_{\mathcal{C}}(w) = f_{\mathcal{C}}(f(v)) = h_A(f_{\mathcal{B}}(v)) \in \operatorname{im} h_A$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "h_A"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned} \operatorname{im} f &\longrightarrow \operatorname{im} h_A \\ w &\longmapsto f_{\mathcal{C}}(w) \end{aligned}$$

2. Es sobreyectiva.
   Dado $Y \in \operatorname{im} h_A$ hay que ver que existe $w \in \operatorname{im} f$ tal que $f_{\mathcal{C}}(w) = Y$.
   Existe $X \in \mathbb{F}^n$ tal que $h_A(X) = Y$.
   Como $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva, existe $v \in V$ tal que $f_{\mathcal{B}}(v) = X$.
   Luego podemos tomar $w = f(v) \in \operatorname{im} f$ ya que:
   $$f_{\mathcal{C}}(w) = f_{\mathcal{C}}(f(v)) = h_A(f_{\mathcal{B}}(v)) = h_A(X) = Y$$

□

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Si el rango por columnas de una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es r,

entonces A es equivalente a la matriz por bloques:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$$

Lema 2.56.

Demostración.

Sea $f : V \to W$ lineal tal que A es la matriz de f respecto a algunas bases.

Simplificamos el problema a demostrar que
existen otras bases respecto de las cuales la matriz de f es:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$$

A y B son matrices de $f \implies$

$$\begin{cases} \xRightarrow{\text{notas 2.51}} & A \text{ y } B \text{ son equivalentes} \\ \xRightarrow{\text{proposición 2.55}} & r = \operatorname{rango} A = \operatorname{rango} f = \operatorname{rango} B = r' \end{cases}$$

Lema 2.56.

Demostración.

Sea $(a_1, \dots, a_s)$ una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con $a_{s+1}, \dots, a_n$ hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9.
Repitiendo argumentos, la familia $\mathcal{F} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\operatorname{im} f$.
Sin embargo ahora no hace falta que probemos que $\mathcal{F}$ es libre,
ya que sabemos que $\dim(\operatorname{im} f) = \dim V - \dim(\ker f) = n - s$,
luego $\mathcal{F}$ es base de $\operatorname{im} f$ por dimensiones.

Ampliamos $\mathcal{F}$ con $b_1, \dots, b_k$ hasta formar una base de W;
las bases que buscamos son:

$$\mathcal{B} = \big(a_{s+1}, \dots, a_n\,,\ a_1, \dots, a_s\big)$$

$$\mathcal{C} = \big(f(a_{s+1}), \dots, f(a_n)\,,\ b_1, \dots, b_k\big)$$

$\square$

Ejercicios 2.57.

- 2.26
- 2.27
- 2.28

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ matrices. Entonces:

1. El rango por columnas de A es igual al rango por filas de A. Así que simplemente escribiremos rango(A).
2. A y B son equivalentes si y solo si rango$(A) = $ rango(B).

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

1. Nuestro objetivo es demostrar que el rango por columnas de A es igual al rango por columnas de A^T.

   Sea r el rango por columnas de A, el lema 2.56 nos dice que existen matrices P y Q regulares tales que:

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$$

   Trasponiendo:

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

$$Q^T A^T P^T = (PAQ)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$$

Pero Q^T y P^T son matrices regulares,
luego A^T y $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices equivalentes.

Por la proposición 2.55,
estas dos matrices equivalentes tienen el mismo rango por columnas,
es decir, el rango por columnas de A^T también es r.

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

2. A y B son equivalentes $\iff$ rango$(A) = $ rango(B)

Demostración.

2. ($\Longrightarrow$) Esta implicación ya nos ha aparecido en un par de ocasiones; repitamos de nuevo el argumento.

   Si A y B son equivalentes, existe una aplicación lineal f de manera que A y B son matrices de f respecto de algunas bases. Luego la proposición 2.55 nos asegura que:

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(f) = \text{rango}(B)$$

Teorema 2.58 (del rango).

2. A y B son equivalentes $\iff$ rango$(A) =$ rango(B)

Demostración.

($\Longleftarrow$) Sea $r =$ rango$(A) =$ rango(B), el lema 2.56 nos dice que existen matrices P_1, Q_1, P_2, Q_2 regulares tales que:

$$P_1 A Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = P_2 B Q_2$$

Por tanto A y B son equivalentes entre sí,
ya que ambas son equivalentes a la matriz por bloques $\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. □

Propiedad 2.59.

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada $n \times n$.

Entonces:

$$A \text{ es regular} \iff \text{rango}(A) = n$$

Ejemplo 2.60.

Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Mediante un único cálculo, vamos a hallar matrices P y Q regulares t.q. PAQ es una matriz por bloques de la forma $\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

En particular, habremos calculado el rango de A, ya que rango$(A) = r$.

Ejemplo 2.60.

Solución.

La idea es hacer operaciones elementales de Gauss partiendo de la matriz por bloques:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_2 \\ \hline I_3 & \end{array}\right)$$

Cada vez que hacemos una operación por filas,
la aplicamos a los dos bloques superiores a la vez,

y cada vez que hacemos una operación por columnas,
la aplicamos a los dos bloques de la izquierda a la vez.

Ejemplo 2.60.

Solución.

Recordamos que hacer Gauss por filas/columnas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda/derecha.

Así obtendremos:

$$\left(\begin{array}{c|c} F_s\cdots F_2\cdot F_1\cdot A\cdot C_1\cdot C_2\cdots C_t & F_s\cdots F_2\cdot F_1\cdot I_2 \\ \hline I_3\cdot C_1\cdot C_2\cdots C_t & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} PAQ & P \\ \hline Q & \end{array}\right)$$

Ejemplo 2.60.

Solución.

Lo entenderemos mejor al hacer el ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right)$$

Ejemplo 2.60.

Solución.

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \end{array}\right)$$

Ejemplo 2.60.

Solución.

Luego:

$$P = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La propiedad 2.37 nos asegura que las matrices P y Q son regulares.

Observa que las matrices P y Q no son únicas. □

Ejercicios 2.61.

2.12. Rango II

- 2.29
- 2.30
- 2.31
- 2.32
- 2.33
- 2.34

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.
Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$,
y fijamos este vector v_p. Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$f(v) = w \iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} \iff f(v - v_p) = \bar{0}$$
$$\iff v - v_p \in \ker f \iff v = v_p + v_0 \quad \text{con } v_0 \in \ker f$$

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v_p + v_0 \mid v_0 \in \ker f\} =: \underbrace{v_p}_{\text{elemento}} + \underbrace{\ker f}_{\text{conjunto}}$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

2. Consideremos el caso particular en el que la aplicación es $h_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

   Fijado un vector columna $b \in \mathbb{F}^m$,
   vemos que $h_A^{-1}(\{b\})$ es el conjunto de soluciones del sistema $AX = b$.

   Así, en este caso el apartado anterior se traduce en la propiedad de que el conjunto de soluciones de un sistema lineal se obtiene hallando una solución particular, y sumándole todas las soluciones del sistema homogéneo asociado.

Nota 2.63.

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$,
donde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $b \in \mathbb{F}^m$.
Así, el sistema tiene m ecuaciones y n incógnitas.

Entonces:

1. Si rango$(A) <$ rango$(A|b)$, el sistema es incompatible.
2. Si rango$(A) =$ rango$(A|b) = n$, el sistema es compatible determinado.
3. Si rango$(A) =$ rango$(A|b) < n$, el sist. es compatible indeterminado.

Ejercicios 2.64.

- 2.35

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Ejercicio 2.1.1. Ejercicio 2.7. Ejercicio 2.16.1. Ejercicio 2.26.2.
Ejercicio 2.1.2. Ejercicio 2.9.1. Ejercicio 2.16.2. Ejercicio 2.26.3.
Ejercicio 2.3.3. Ejercicio 2.11.1. Ejercicio 2.16.3. Ejercicio 2.31.1.
Ejercicio 2.3.4. Ejercicio 2.11.2. Ejercicio 2.21.1. Ejercicio 2.31.2.
Ejercicio 2.4.1. Ejercicio 2.12.2. Ejercicio 2.24.1. Ejercicio 2.34.1.
Ejercicio 2.5.1. Ejercicio 2.14. Ejercicio 2.26.1. Ejercicio 2.34.3.

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.

$\boxed{\supseteq}$ $\begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$

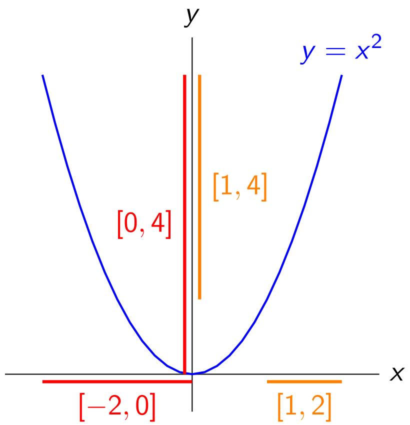
$\boxed{\subseteq}$ Sea $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

$\implies$ existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$

$\implies \begin{cases} \text{o bien existe } x \in A_1 \text{ tal que } y = f(x) \\ \text{o bien existe } x \in A_2 \text{ tal que } y = f(x) \end{cases}$

$\implies \begin{cases} \text{o bien } y \in f(A_1) \\ \text{o bien } y \in f(A_2) \end{cases} \implies y \in f(A_1) \cup f(A_2)$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

$A_1 = [-2, 0]$ $\quad f(A_1) = [0, 4]$

$A_2 = [1, 2]$ $\quad f(A_2) = [1, 4]$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$
$$f(A_1) \cap f(A_2) = [1, 4]$$

$$\begin{cases} f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal. Vamos a demostrarlo.

Fijamos dos vectores cualesquiera del espacio inicial:
$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \qquad q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$

Cálculo intermedio: $\quad p'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$

$$\begin{aligned} f(p) &= \begin{pmatrix} p(3) - p(1) \\ p'(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3) - (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a_1 + 8a_2 + 26a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3.3.

Cálculo intermedio:
$(p+q)(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + (a_3 + b_3)X^3$

$$f(q) = \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 2a_1 + 8a_2 + 26a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

$$f(p+q) = \begin{pmatrix} 2(a_1 + b_1) + 8(a_2 + b_2) + 26(a_3 + b_3) \\ (a_1 + b_1) + 4(a_2 + b_2) + 12(a_3 + b_3) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.3.

Fijamos además un escalar λ cualquiera.

Cálculo intermedio: $(\lambda \cdot p)(X) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)X + (\lambda a_2)X^2 + (\lambda a_3)X^3$

$$\lambda \cdot f(p) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 + 8a_2 + 26a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda \cdot p) = \begin{pmatrix} 2(\lambda a_1) + 8(\lambda a_2) + 26(\lambda a_3) \\ (\lambda a_1) + 4(\lambda a_2) + 12(\lambda a_3) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X \qquad q(X) = X^2$

(Por el apartado anterior, sabemos que sí que es lineal en la segunda componente, el problema estará en la primera componente).

$(p+q)(X) = 1 + X + X^2$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \cdot 1 \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ * \end{pmatrix}$$

$$f(p+q) = \begin{pmatrix} 13 \cdot 3 \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ * \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\boxed{\text{im } f}$

$$\begin{aligned}
\text{im } f &= \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{p''(X) + p(0) \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\} \\
&= \{(2a_2 + 6a_3X) + a_0 \mid a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\} \\
&= \{(a_0 + 2a_2) + 6a_3X \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{span}\langle 1, 0, 2, 6X\rangle \qquad \Big(= \text{span}\langle f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)\rangle \Big) \\
&= \text{span}\langle 1, X\rangle \qquad \longrightarrow \qquad \text{base} \quad 1, X
\end{aligned}$$

En general, para encontrar una familia generadora del subespacio imagen, basta con hallar las imágenes de una familia generadora del espacio inicial.

Ejercicio 2.4.1.

$\boxed{\ker f}$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio cualquiera de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned}
q(X) \in \ker f \quad &\Longleftrightarrow \quad f(q) = \text{vector nulo} \\
&\Longleftrightarrow \quad (b_0 + 2b_2) + 6b_3X = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3 \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b_0 + 2b_2 = 0 \\ 6b_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ker f &= \{ -2\lambda + \mu X + \lambda X^2 + 0X^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{span}\langle X, -2 + X^2\rangle \qquad \longrightarrow \qquad \text{base} \quad X \,,\ -2 + X^2
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.1.

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\langle 1, X\rangle \qquad \ker f = \operatorname{span}\langle X, -2+X^2\rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales,
así que no tiene sentido considerar su suma o su intersección.
Aquí, espacio inicial = espacio final, luego sí que podemos calcularlos.

$\boxed{\operatorname{im} f + \ker f}$

$$\operatorname{im} f + \ker f = \operatorname{span}\langle 1, X, X, -2+X^2\rangle \qquad \longrightarrow \qquad \text{base} \quad 1, X, X^2$$

$\boxed{\operatorname{im} f \cap \ker f}$

$$\begin{cases} X \in \operatorname{im} f \cap \ker f \\ \dim(\operatorname{im} f \cap \ker f) = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f - \dim(\operatorname{im} f + \ker f) = 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \text{base} \quad X$$

Ejercicio 2.5.1.

$\boxed{f^{-1}(T) \text{ contiene al vector nulo}}$

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \qquad \Longleftarrow \qquad f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W.
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W.

$\boxed{f^{-1}(T) \text{ es cerrado para la suma}}$

Sean $a, b \in f^{-1}(T)$. Esto quiere decir que $f(a), f(b) \in T$.

$$a + b \in f^{-1}(T) \qquad \Longleftarrow \qquad f(a+b) = f(a) + f(b) \in T$$

Como f es lineal, la imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes.
Como T es subespacio, es cerrado para la suma.

Ejercicio 2.5.1.

$\boxed{f^{-1}(T) \text{ es cerrado para el producto}}$

Sea $a \in f^{-1}(T)$ y sea λ un escalar. Esto quiere decir que $f(a) \in T$.

$$\lambda a \in f^{-1}(T) \qquad \Longleftarrow \qquad f(\lambda a) = \lambda f(a) \in T$$

Como f es lineal, la imagen del producto es el producto de las imágenes.
Como T es subespacio, es cerrado para el producto.

Ejercicio 2.7.

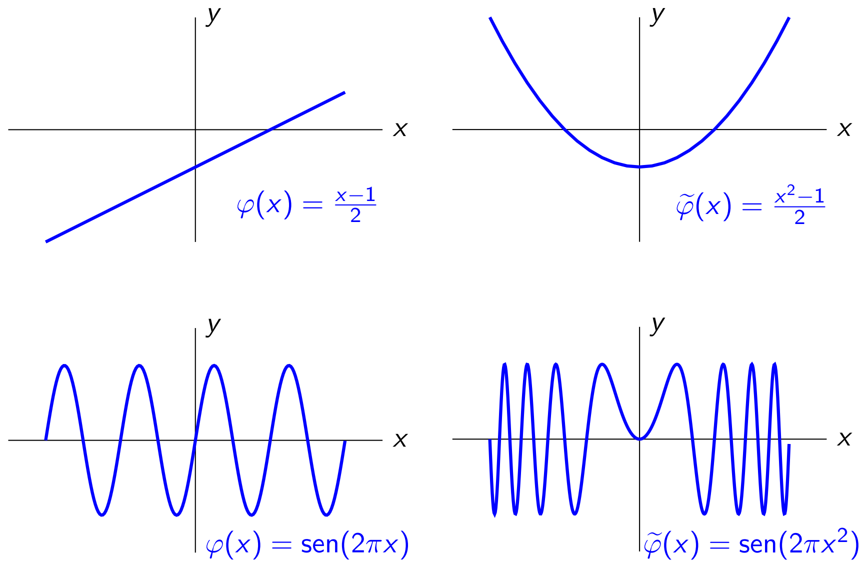
$$\begin{aligned} f \circ f &= \text{aplicación nula} \\ &\Longleftrightarrow \quad f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V \\ &\Longleftrightarrow \quad f(a) \in ker(f) \quad \text{para todo } a \in V \\ &\Longleftrightarrow \quad w \in ker(f) \quad \text{para todo } w \in \operatorname{im} f \\ &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{im} f \subseteq \ker f \end{aligned}$$

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$$

Ahora está claro que 1 implica 2. Vamos a probar que 2 implica 1.

$$\begin{cases} f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f \\ \dim(\ker f) = \dim V - \dim(\operatorname{im} f) = \dim(\operatorname{im} f) \end{cases} \implies \ker f = \operatorname{im} f$$

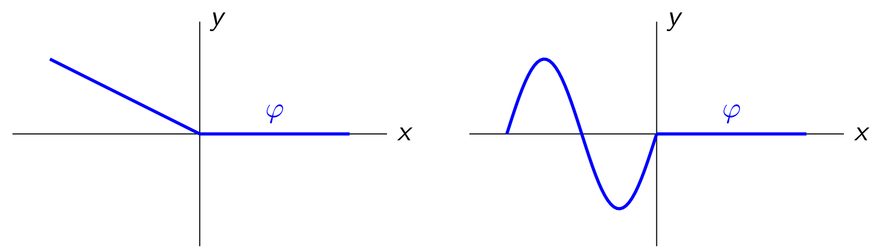
Ejercicio 2.9.1.



Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned}
\varphi \in \ker f \quad &\iff \quad f(\varphi) = \text{vector nulo} \quad \iff \quad \widetilde{\varphi} = \text{vector nulo} \\
&\iff \quad \widetilde{\varphi}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\
&\iff \quad \varphi(x^2) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\
&\iff \quad \varphi(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in [0, \infty)
\end{aligned}$$



Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como $(a_1, \ldots, a_n)$ es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ no todos nulos
tales que $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = \bar{0}$.

Para probar que $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ es ligada,
cogemos los mismos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
(esto nos asegura que no todos son nulos).

$$\lambda_1 f(a_1) + \cdots + \lambda_n f(a_n) = f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) = f(\bar{0}) = \bar{0}$$

Como f es lineal:
la combinación lineal de las imágenes
es igual a la imagen de la combinación lineal;
y la imagen del vector nulo es igual al vector nulo.

Ejercicio 2.11.2.

Es falsa. Veamos un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.12.2.

$$p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$p(1)(1+X^2) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2$$

$$p''(X) = 2a_2 + 6a_3 X$$

$$p''(0)X^3 = 2a_2 X^3$$

$$p(1)(1+X^2) + p''(0)X^3 = \left(\sum_{i=0}^{3} a_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{3} a_i\right) X^2 + 2a_2 X^3$$

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1+X^2) + p''(0)X^3 \qquad \text{base} \quad 1, X, X^2, X^3$$

I) $1, X, X^2, X^3$

II) $1+X^2 \qquad 1+X^2 \qquad 1+X^2+2X^3 \qquad 1+X^2$

III) $1+X^2 = 1 + 0X + 1X^2 + 0X^3$

Coordenadas: $1,0,1,0 \qquad 1,0,1,0 \qquad 1,0,1,2 \qquad 1,0,1,0$

IV)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.12.2.

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \longmapsto (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2 + 2a_2 X^3$$

$$h_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\
e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\
e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\
e_3 & \longmapsto & -v_1 & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\
e_4 & \longmapsto & -v_2 & \longmapsto & -e_2 + e_4
\end{array}$$

$$\dim\ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2 = 0 \implies h_A \text{ inyectiva}$$

$\implies$ cada vector tiene a lo sumo una preimagen

$(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$ familia libre $\implies$ (v_1, v_2) familia libre

$\implies$ (v_1, v_2) base de $\mathbb{R}^2$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad h_A \quad} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\quad h_B \quad} & \mathbb{R}^2 \\
v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\
v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 \\
\lambda v_1 + \mu v_2 & \longmapsto & \dots & \longmapsto & 2(\lambda v_1 + \mu v_2)
\end{array}$$

I) w_1, w_2

II) $2w_1, 2w_2$

III) $2w_1 = 2w_1 + 0w_2 \qquad 2w_2 = 0w_1 + 2w_2$

IV) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = BA$

Ejercicio 2.16.1.

$$L_A(B_1 + B_2) = A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = L_A(B_1) + L_A(B_2)$$

$$L_A(\lambda B) = A(\lambda B) = \lambda(AB) = \lambda L_A(B)$$

Ejercicio 2.16.2.

$\boxed{\text{I} \Longleftarrow \text{D}}$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A: $\quad L_{A^{-1}}$

$$\begin{array}{lcl}
L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B & \Longrightarrow & L_A \text{ es inyectiva} \\
L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B & \Longrightarrow & L_A \text{ es suprayectiva}
\end{array}$$

$\boxed{\text{I} \Longrightarrow \text{D}}$ Probaremos el contrarrecíproco: $\boxed{\text{no I} \Longleftarrow \text{no D}}$

A no es regular $\iff$ $h_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ no es biyectiva $\iff$
$h_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ no es inyectiva $\iff$ existe $\bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n$ tal que $AX = \bar{0}$

Ahora construimos la matriz por columnas $B = (X|X|\dots|X)$
$L_A(B) = A \cdot B = A \cdot (X|X|\dots|X) = (A \cdot X|A \cdot X|\dots|A \cdot X) =$ matriz nula

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4. $\qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

II) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$

III) Coordenadas: $\quad a, c, 0, 0 \qquad b, d, 0, 0 \qquad 0, 0, a, c \qquad 0, 0, b, d$

IV)

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

Ejercicio 2.21.1.

$$
\begin{aligned}
3v_1 + 3v_2 + v_3 = v_1' \quad &\Rightarrow \quad \text{las coord. de } v_1' \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 3, 3, 1 \\
-v_1 + v_3 = v_2' \quad &\Rightarrow \quad \text{las coord. de } v_2' \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } -1, 0, 1 \\
v_1 + v_2 = v_3' \quad &\Rightarrow \quad \text{las coord. de } v_3' \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 1, 1, 0
\end{aligned}
$$

La matriz de cambio de bases de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ es: $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Nos dan $X' = (1, 2, 3)^T$, y nos piden hallar X.

$$
X = PX' \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

Ejercicio 2.21.1.

$\mathcal{B}'$ es base de V porque la matriz P es regular.

$$
\begin{aligned}
3v_1 + 3v_2 + v_3 &= v_1' \\
-v_1 + v_3 &= v_2' \\
-v_1 + v_3 &= v_3'
\end{aligned}
\qquad \longrightarrow \qquad
P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Ejercicio 2.24.1.

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}
$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

¿Qué condiciones deben cumplir sus entradas a_{ij} para que A esté en Z?

Sea B la matriz elemental correspondiente a multiplicar la fila 1 por 2.

$$
\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = AB = BA = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
$$

Luego $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0$.

Repitiendo este argumento con las demás matrices elementales que multiplican una fila por 2, concluimos que la matriz A debe ser diagonal.

Ejercicio 2.24.1.

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}
$$

Sea B' la matriz elemental correspondiente a intercambiar las filas 1 y 2.

$$
\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 \\ a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = AB' = B'A = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}
$$

Luego $a_{11} = a_{22}$.

Repitiendo este argumento con las demás matrices elementales que intercambian filas, concluimos que:

$$
A = a_{11} \cdot I_3
$$

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4.

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

$\text{rango}(A) = 2 \qquad \text{rango}(B_1) = 3 \qquad \text{rango}(B_2) = 2 \qquad \text{rango}(B_4) = 2$

Respuesta: B_2, B_4.

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\boxed{\ker h}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \ker h &= \{(-3\lambda + 3\mu, \lambda - \mu, 2\mu, 2\lambda)^T \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\} \\ &= \text{span}\langle (3, -1, 2, 0)^T, (-3, 1, 0, 2)^T \rangle \end{aligned}$$

Ejercicio 2.26.2.

Ampliamos esta base del núcleo hasta formar una base del espacio inicial.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus imágenes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y de nuevo ampliamos:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de $\mathbb{C}^4$ y (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{C}^3$ respecto de las cuales la matriz de h sea B_4.

$$\begin{aligned} h(a_1) &= 1b_1 + 0b_2 + 0b_3 \qquad & h(a_2) &= 1b_1 + 0b_2 + 0b_3 \\ h(a_3) &= 0b_1 + 0b_2 + 1b_3 \qquad & h(a_4) &= 0b_1 + 0b_2 + 1b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(a_1) = h(a_2) \quad &\Longrightarrow \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo} \\ h(a_3) = h(a_4) \quad &\Longrightarrow \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo} \end{aligned}$$

$$a_1 = u_1 \qquad a_2 = u_1 + u_3 \qquad a_3 = u_2 \qquad a_4 = u_2 + u_4$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1 \qquad b_2 = w_3 \qquad b_3 = h(u_2) = w_2$$

$$\begin{aligned} \text{span}\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle &= \text{span}\langle u_1, u_1 + u_3, u_2, u_2 + u_4 \rangle \\ &= \text{span}\langle u_1, u_3, u_2, u_4 \rangle = \mathbb{C}^4 \quad \Longrightarrow \quad (a_1, a_2, a_3, a_4) \text{ es base} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{\quad P \quad} \text{canónica} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{\quad Q \quad} \text{canónica} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos la relación entre A, B_2, P, Q. Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.
Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4).
Sean Y las coordenadas de $h(v)$ en la base canónica.
Sean Y' las coordenadas de $h(v)$ en la base (w_1, w_2, w_3).

$$Y = AX \qquad Y' = B_2 X' \qquad X = PX' \qquad Y = QY'$$

$$QB_2X' = QY' = Y = AX = APX' \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{Q^{-1}AP = B_2}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{Q^{-1}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{P} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{B_2}$$

```
P = matrix([ [1,0,3,-3], [0,1,-1,1], [0,0,2,0], [0,0,0,2] ]); show(P)
Q = matrix([ [1,3,0], [0,2,1], [0,-2,0] ]); show(Q)
A = matrix([ [1,3,0,0], [0,2,1,-1], [0,-2,-1,1] ]); show(A)
R = Q.inverse(); show(R)
show( R*A*P )
```


Ejercicio 2.26.3.

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)}^{2\times 3} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}^{3\times 4} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)}^{4\times 2} =$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{2\times 4} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)}_{4\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{cases} Q^{-1}AP = B_2 \\ D_1B_2D_2 = I_2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad D_1Q^{-1}APD_2 = I_2$$

$$C_1 = D_1Q^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = PD_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^r \xrightarrow{h_{B_2}} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \xrightarrow{h_{B_1}} \mathbb{F}^r$$

Recordamos que:

$$h_{B_1AB_2} = h_{B_1} \circ h_A \circ h_{B_2} \qquad h_{I_r} = \mathrm{id}_{\mathbb{F}^r}$$

Así que el problema se reduce a construir dos aplicaciones lineales h_{B_1}, h_{B_2} tales que:

$$h_{B_1} \circ h_A \circ h_{B_2} = \mathrm{id}_{\mathbb{F}^r}$$

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{F}^r & \xrightarrow{h_{B_2}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & \xrightarrow{h_{B_1}} & \mathbb{F}^r \\
e_1 & \longmapsto & v_1 & \longmapsto & w_1 & \longmapsto & e_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_r & \longmapsto & v_r & \longmapsto & w_r & \longmapsto & e_r \\
\sum \lambda_i e_i & \longmapsto & \sum \lambda_i v_i & \longmapsto & \sum \lambda_i w_i & \longmapsto & \sum \lambda_i e_i
\end{array}$$

Sea $w_1, \dots, w_r$ una base de $\mathrm{im}\, h_A$, donde $r = \mathrm{rango}(A) = \dim(\mathrm{im}\, h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como $e_1, \dots, e_r$ es base de $\mathbb{F}^r$ (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2} tal que $h_{B_2}(e_i) = v_i$.

Como $w_1, \dots, w_r$ es familia libre, existe una aplicación lineal h_{B_1} tal que $h_{B_1}(w_i) = e_i$.

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que: $\overbrace{B_1}^{r\times m} \cdot \overbrace{A}^{m\times n} \cdot \overbrace{B_2}^{n\times r} = \overbrace{I_r}^{r\times r}$

Ahora $r = n$, luego: $\overbrace{B_1}^{n\times m} \cdot \overbrace{A}^{m\times n} \cdot \overbrace{B_2}^{n\times n} = \overbrace{I_n}^{n\times n}$

$$\begin{array}{lclcl}
\mathrm{rango}(B_1AB_2) = n & \Longrightarrow & \mathrm{rango}(B_2) = n & \Longrightarrow & B_2 \text{ es regular} \\
 & \Longrightarrow & \text{existe } B_2^{-1} & &
\end{array}$$

$$B_1AB_2 = I_n \quad \Longrightarrow \quad B_1A = B_2^{-1} \quad \Longrightarrow \quad B_2B_1A = I_n$$

$B = B_2B_1 \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ es la matriz que buscamos.

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\mathrm{rango}(A) = \dim(\mathrm{im}(h_A)) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rango}(AB) &= \dim(\mathrm{im}(h_{AB})) = \dim(h_{AB}(\mathbb{F}^p)) = \dim((h_A \circ h_B)(\mathbb{F}^p)) \\ &= \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))\end{aligned}$$

$$h_B(\mathbb{F}^p) \subseteq \mathbb{F}^n \quad \Longrightarrow \quad h_A(h_B(\mathbb{F}^p)) \subseteq h_A(\mathbb{F}^n) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{rango}(AB) \leq \mathrm{rango}(A)$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{\quad h_B \quad} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\quad h_A \quad} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{F}^m \end{array} \qquad h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n) \qquad \operatorname{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\operatorname{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p)) \qquad \operatorname{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n)) = n - \operatorname{rango}(A)$$

$$\dim(\ker(g)) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p)) - \dim(g(h_B(\mathbb{F}^p))) = \operatorname{rango}(B) - \operatorname{rango}(AB)$$

$$\ker(g) \subseteq \ker(h_A) \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{rango}(B) - \operatorname{rango}(AB) \leq n - \operatorname{rango}(A)$$

Capítulo 3. Determinantes

Definición 3.1.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

El menor (i, j) de A, denotado M_{ij}^A, es la matriz $(n-1) \times (n-1)$ formada al suprimir la fila i y la columna j de A.

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación determinante

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A| \end{aligned}$$

inductivamente mediante:

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$.
2. Supuesto definido el determinante para matrices $(n-1) \times (n-1)$, llamamos adjunto (i, j) de $A \in M_n(\mathbb{F})$ al número:

   $$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}^A$$

   Definimos:

   $$\det A = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

   (Suma de los elementos de la primera columna por sus adjuntos).

Ejemplos 3.3.

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}\, a_{22} \;-\; a_{21}\, a_{12}$$

2. Calculemos el determinante de una matriz 3×3:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -2(3-0) + 4(18-40) = -94$$

3. El ejercicio 3.3 nos dice que el determinante de la matriz identidad es igual a 1:

$$\det I_n = 1$$

Propiedades 3.4.

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. Sea $F_i(\alpha)$ la matriz elemental que multiplica la fila i por α. Entonces:

$$\det(F_i(\alpha)A) = \alpha \det A$$

Propiedades 3.4.

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n.

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n-1$ (con $n \geq 2$), y probemos que es cierta para n:

$$\det B = \sum_{k=1}^{n} b_{k1} B_{k1} = b_{i1} B_{i1} + \sum_{k \neq i} b_{k1} B_{k1}$$

$$\overset{\text{inducción}}{=\!=\!=\!=} (\alpha a_{i1}) A_{i1} + \sum_{k \neq i} a_{k1} (\alpha A_{k1})$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{k1} A_{k1} = \alpha \det A$$

□

Consecuencias 3.5.

1. $\det F_i(\alpha) = \alpha$, ya que $F_i(\alpha) = F_i(\alpha) I_n$.

   Por lo tanto podemos reescribir la propiedad 1 como $\det(F_i(\alpha) \cdot A) = (\det F_i(\alpha)) \cdot (\det A)$.

2. Si A tiene una fila nula, entonces $\det A = 0$.

   (Observa que la propiedad 1 es válida incluso si $\alpha = 0$, aunque entonces $F_i(\alpha)$ no es una matriz elemental).

Propiedades 3.6.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

2. El determinante es aditivo en cada fila, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1}+a''_{i1} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demostración.

Análoga a la demostración de la propiedad 1. □

Ejercicios 3.7.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

- 3.1
- 3.2
- 3.3

Capítulo 3. Determinantes

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

3. Sea F_{ij} la matriz elemental que intercambia las filas i, j.

   Entonces:
$$\det(F_{ij}A) = -\det A$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

1. Primero veamos que basta con que probemos el resultado para $i = 1$.

   Observamos que $\quad F_{ij} = F_{1i}F_{1j}F_{1i} \quad$ gracias al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}[row sep=large]
 & 1 \arrow[d] & i \arrow[d] & j \arrow[d] & \bullet \arrow[ddd, "F_{ij}"] \\
 {} \arrow[d, phantom, ""] & i \arrow[d] & 1 \arrow[d] & j \arrow[d] & \\
 & i \arrow[d] & j \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & 1 & j & i & \bullet
\end{tikzcd}$$

$$F_{1i}: \begin{pmatrix}1 & i & j\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}i & 1 & j\end{pmatrix}, \quad F_{1j}: \begin{pmatrix}i & 1 & j\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}i & j & 1\end{pmatrix}, \quad F_{1i}: \begin{pmatrix}i & j & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & j & i\end{pmatrix}$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

Por lo tanto, una vez que probemos el resultado para $i = 1$, tendremos:

$$\begin{aligned}\det(F_{ij}A) &= \det(F_{1i}F_{1j}F_{1i}A) = -\det(F_{1j}F_{1i}A) \\ &= \det(F_{1i}A) = -\det A\end{aligned}$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n. El caso $n = 2$ es claro. Veamos $n-1 \to n$ $(n \geq 3)$.

   Sea $B = F_{1j}A$, $\quad$ debemos ver que estos dos números son opuestos:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1} \qquad\qquad \det B = \sum_{k=1}^{n} b_{k1}B_{k1}$$

   a) Si $k \neq 1, j$,
   entonces M_{k1}^A , M_{k1}^B son iguales salvo por dos filas intercamb.
   Debido a la hipótesis de inducción, $B_{k1} = -A_{k1}$.
   Además $b_{k1} = a_{k1}$. $\quad$ Luego $b_{k1}B_{k1} = -a_{k1}A_{k1}$.

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $\quad b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ $\Big\}$ habremos acabado

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix}\text{fila } 1 \\ \cdots \\ \text{fila } j{-}2 \\ \text{fila } j{-}1 \\ \text{fila } j{+}1 \\ \cdots \\ \text{fila } n\end{pmatrix} \qquad\qquad M_{11}^B = \begin{pmatrix}\text{fila } 2 \\ \cdots \\ \text{fila } j{-}1 \\ \text{fila } 1 \\ \text{fila } j{+}1 \\ \cdots \\ \text{fila } n\end{pmatrix}$$

M_{11}^B se obtiene al hacer $j-2$ intercambios de filas a M_{j1}^A. $\qquad b_{11} = a_{j1}$.

$$\begin{aligned}b_{11}B_{11} = a_{j1}\det M_{11}^B &\xlongequal{\text{inducción}} a_{j1}(-1)^{j-2}\det M_{j1}^A \\ &= -a_{j1}(-1)^{j+1}\det M_{j1}^A = -a_{j1}A_{j1}\end{aligned}$$

$\square$

Consecuencias 3.9.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

1. Si dos filas de A son iguales, entonces $\det A = 0$.
2. $\det F_{ij} = -1$, por lo tanto $\det(F_{ij}A) = (\det F_{ij}) \cdot (\det A)$.

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i, α veces la fila j.
$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Demostración.

Sea B_α la matriz obtenida al sustituir la fila i de A por α veces la fila j.

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) \overset{(2)}{=\!=} \det A + \det B_\alpha \overset{(1)}{=\!=} \det A + \alpha \det B_1$$
$$\overset{(3)}{=\!=} \det A + \alpha \cdot 0 = \det A$$

□

Consecuencias 3.11.

- $\det F_{ij}(\alpha) = 1$, por lo tanto $\det(F_{ij}(\alpha)A) = (\det F_{ij}(\alpha)) \cdot (\det A)$.

Ejercicios 3.12.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

- 3.4
- 3.5
- 3.6

Capítulo 3. Determinantes

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$,
permiten calcular el determinante de cualquier matriz A.

1. Si A es regular,
   $\exists$ matrices elementales $F_1, \ldots, F_r$ tales que: $\quad A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

   $$\begin{aligned}\det A &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot I_n) = \det F_r \cdot \det(F_{r-1} \cdots F_1 \cdot I_n)\\ &= \ldots = \det F_r \cdots \det F_1\end{aligned}$$

2. Si A no es regular,
   $\exists$ matrices elementales $F_1, \ldots, F_r$ tales que $\quad A = F_r \cdots F_1 \cdot B$
   donde todas las entradas de la última fila de la matriz B son ceros.

   $$\det A = \ldots = \det F_r \cdots \det F_1 \cdot \underbrace{\det B}_{=0} = 0$$

Ejemplo 3.14.

3.3. Propiedades de los determinantes

Calculemos un determinante con este método:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -4 & 1 & 5 & 0\\ 3 & -4 & 0 & 3 & 2\\ -2 & 4 & -1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

Propiedades 3.15.

3.3. Propiedades de los determinantes

5. $\quad A$ es regular $\quad \Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0$

Demostración.
Es el argumento de la nota 3.13. □

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

6. $\quad \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$

Demostración.
Primero observamos que si uno de los términos es distinto de cero, entonces el otro también es distinto de cero.

$$\begin{aligned}\det(AB) \neq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad AB \text{ regular} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ y } B \text{ regulares}\\ &\Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0 \text{ y } \det B \neq 0\\ &\Longleftrightarrow \quad (\det A) \cdot (\det B) \neq 0\end{aligned}$$

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Supongamos pues que A y B son regulares.

$\exists$ matrices elementales F_i, Q_j tales que: $\quad A = F_r \cdots F_1 \quad B = Q_s \cdots Q_1$

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot Q_s \cdots Q_1)\\ &= (\det F_r) \cdots (\det F_1) \cdot (\det Q_s) \cdots (\det Q_1)\\ &= \det(F_r \cdots F_1) \cdot \det(Q_s \cdots Q_1) = (\det A) \cdot (\det B)\end{aligned}$$

$\square$

Consecuencia 3.17.

3.3. Propiedades de los determinantes

Si A es regular, entonces: $\qquad \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Demostración.

$(\det A) \cdot (\det(A^{-1})) = \det(A \cdot (A^{-1})) = \det(I_n) = 1$ $\square$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

7. $\qquad \det(A^T) = \det A$

Demostración.

El corolario 2.30 nos dice que, si A no es regular, tampoco lo es A^T.
En tal caso: $\quad \det A = 0 = \det A^T$

Supongamos pues que A es regular.
Existen matrices elementales F_i tales que: $\quad A = F_r \cdots F_1$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_2(\alpha) \qquad F_{12}^T = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_{12}$$

$$F_{31}(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ \alpha & & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = F_{13}(\alpha)$$

En los tres casos, si F es una matriz elemental,
entonces F^T también es elemental y: $\quad \det F^T = \det F$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Por tanto:

$$\begin{aligned} \det A^T &= \det(F_r \cdots F_1)^T = \det(F_1^T \cdots F_r^T) \\ &= (\det F_1^T) \cdots (\det F_r^T) = (\det F_1) \cdots (\det F_r) \\ &= (\det F_r) \cdots (\det F_1) = \det(F_r \cdots F_1) = \det A \end{aligned}$$

□

Ejercicios 3.19.

3.3. Propiedades de los determinantes

- 3.7
- 3.8

Capítulo 3. Determinantes

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

8. El determinante es suma de los elementos de una fila por sus adjuntos, o también suma de los elementos de una columna por sus adjuntos:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{rj} A_{rj} = \sum_{i=1}^{n} a_{is} A_{is}$$

Demostración.

Si $s = 1$, es la definición de determinante.

Si $r = 1$, es consecuencia de que $\det A^T = \det A$.

En la siguiente diapositiva probaremos el caso $r = 2$ a partir de $r = 1$. Repitiendo los mismos argumentos se harían los casos $r = 3, \ldots, n$.

Finalmente, como $\det A^T = \det A$, tenemos también los casos $s = 2, \ldots, n$.

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{rj} A_{rj}$$

Demostración.

Probemos el caso $r = 2$ a partir del caso $r = 1$.

Sea $B = F_{12}A$ la matriz formada al intercambiar las filas 1 y 2 de A:

$$\det A = -\det B = -\sum_{j=1}^{n} b_{1j} B_{1j} = -\sum_{j=1}^{n} b_{1j} (-1)^{1+j} \det M_{1j}^{B}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{2j} (-1)^{2+j} \det M_{2j}^{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} A_{2j}$$

□

Definición 3.21.

3.4. Matriz adjunta

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

La adjunta de A es la matriz traspuesta de la matriz de adjuntos.

Es decir, $\operatorname{adj} A \in M_n(\mathbb{F})$ y la entrada (i, j) de $\operatorname{adj} A$ es el adjunto (j, i) de A:

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = A_{ji}$$

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

9. $A \cdot (\operatorname{adj} A) = (\det A) \cdot I_n$

Demostración.

La entrada (i, i) de la matriz $A \cdot (\operatorname{adj} A)$ es
la suma de los elementos de la fila i por sus adjuntos, es decir, $\det A$.

Veamos que, si $i \neq j$, entonces la entrada (i, j) de dicha matriz es cero.

Sea B la matriz formada al sustituir la fila j de A por la fila i de A (luego las filas i y j de B coinciden).

$$(A \cdot (\operatorname{adj} A))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (\operatorname{adj} A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{jk} B_{jk} = \det B = 0$$

□

Corolario 3.23.

3.4. Matriz adjunta

Si A es regular, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz regular,
y sea $b \in \mathbb{F}^n$ un vector columna.

Entonces la solución del sistema $AX = b$ es

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A} \qquad j = 1, \dots, n$$

donde B_j es la matriz que resulta de sustituir la columna j de A por b.

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

Demostración.

Calculamos el determinante de B_j
sumando los elementos de la columna j por sus adjuntos:

$$\det B_j = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{adj} A)_{ji} \cdot b_i = (\text{fila } j \text{ de } \operatorname{adj} A) \cdot b$$

La solución del sistema es $\quad X = A^{-1} b = \frac{1}{\det A} \cdot (\operatorname{adj} A) \cdot b.$

$$x_j = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{fila } j \text{ de } \operatorname{adj} A) \cdot b = \frac{1}{\det A} \cdot \det B_j$$

$\square$

Ejercicios 3.25.

- 3.9
- 3.10
- 3.11
- 3.12

Capítulo 3. Determinantes

Observación 3.26.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{-2\cdot 8\cdot 9\cdot 15 + 1\cdot 8\cdot 10\cdot 15 \pm \cdots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$$

Observación 3.26.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos el polinomio p_n en las variables X_{ij} como $p_n = \det((X_{ij})_{i,j=1}^n)$.

$$p_1 = \begin{vmatrix} X_{11} \end{vmatrix} = X_{11}$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} = +X_{11}X_{22} - X_{21}X_{12}$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &+ X_{11}X_{22}X_{33} + X_{21}X_{32}X_{13} + X_{31}X_{12}X_{23} \\ &- X_{31}X_{22}X_{13} - X_{11}X_{32}X_{23} - X_{21}X_{12}X_{33} \end{aligned}$$

Por inducción, vemos que p_n es un polinomio homogéneo de grado n, es decir, es suma de monomios de grado n.

Observación 3.26.

¿Cuál es el coeficiente que multiplica a cada monomio? Para calcularlo, evaluamos el polinomio haciendo las variables del monomio igual a 1 y el resto 0. Por ejemplo, si $n = 3$:

- El coeficiente de $X_{11}X_{32}X_{23}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

- El coeficiente de $X_{11}X_{22}X_{23}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Observación 3.26.

Como el determinante de una matriz que tiene o bien una fila nula o bien una columna nula es cero, los únicos monomios con coeficiente distinto de cero son los de la forma

$$X_{\sigma(1),1}X_{\sigma(2),2}\cdots X_{\sigma(n),n} = \prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}$$

donde σ es una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$, es decir, $\sigma \in S_n$.

Por ejemplo, si $n = 3$, la permutación $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$ se corresponde con el monomio $X_{21}X_{32}X_{13}$.

Definición 3.27.
3.5. Signatura

A cada permutación $\sigma \in S_n$ le asociamos
la matriz por columnas $A_\sigma = (e_{\sigma(1)}| \dots |e_{\sigma(n)})$,
donde $e_1, \dots, e_n$ son los vectores de la base canónica.

Definimos la signatura de σ como el determinante de A_σ:

$$\operatorname{sgn} \sigma = \det A_\sigma \in \{\pm 1\}$$

Propiedades 3.28.
3.5. Signatura

10. El determinante es:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

Demostración.
Observación 3.26. □

Propiedad 3.29.
3.5. Signatura

Para todas permutaciones $\sigma, \tau \in S_n$ se cumple que:

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot (\operatorname{sgn} \tau)$$

Demostración.
Ejercicio 3.13. □

Ejercicios 3.30.
3.5. Signatura

- 3.13
- 3.14
- 3.15
- 3.16

Capítulo 3. Determinantes

Ejercicios determinantes

Ejercicio 3.1.1. Ejercicio 3.5.1. Ejercicio 3.12.

Ejercicio 3.1.2. Ejercicio 3.5.2. Ejercicio 3.13.

Ejercicio 3.1.3.

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}+b_{11}+\cdots+a_{nn}+b_{nn}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) = (a_{11}+\cdots+a_{nn}) + (b_{11}+\cdots+b_{nn})$$

$$\operatorname{tr}(\lambda A) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda a_{11}+\cdots+\lambda a_{nn}$$

$$\lambda(\operatorname{tr} A) = \lambda(a_{11}+\cdots+a_{nn})$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

$$\operatorname{tr}(BA) \xlongequal{\text{simetría } A\leftrightarrow B} \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{r,s=1}^{n} b_{rs}a_{sr} = \sum_{k,i=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

Ejercicio 3.1.3. $\boxed{n=2}$

Como $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ es base del espacio inicial, y f es lineal, f está determinada por:

$$\lambda_{11} = f\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) \qquad \lambda_{12} = f\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right) \qquad \lambda_{21} = f\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right) \qquad \lambda_{22} = f\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{smallmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{smallmatrix}\right) &= f\left(a_{11}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) + a_{12}\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right) + a_{21}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right) + a_{22}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \right) \\ &= a_{11}\lambda_{11} + a_{12}\lambda_{12} + a_{21}\lambda_{21} + a_{22}\lambda_{22} \end{aligned}$$

Recordamos que: $\operatorname{tr}\left(\begin{smallmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{smallmatrix}\right) = a_{11} + a_{22}$ Luego debemos probar que:

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0 \qquad\qquad \lambda_{11} = \lambda_{22}$$

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right) = f\left(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\cdot F \right) = f\left(F\cdot \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right) \right) = f\left(\begin{smallmatrix}0&2\\0&0\end{smallmatrix}\right) = 2\lambda_{12}$$

Luego $\lambda_{12} = 0$. Análogamente $\lambda_{21} = 0$.

Sea $G = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ la matriz elemental que intercambia las filas 1 y 2.
Como $G^2 = I_2$:

$$\lambda_{11} = f\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = f\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\cdot G\cdot G \right) = f\left(G\cdot \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\cdot G \right) = f\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \lambda_{22}$$

Ejercicio 3.5.
Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A.
Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\quad \operatorname{tr}(f) = 0$
Debemos demostrar: $f \circ f =$ aplicación nula $\iff$ $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ de forma que $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{array}{ccccccccc} f(v_1) & = & 0v_1 & + & \ldots & + & 0v_{n-1} & + & 0v_n \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ f(v_{n-1}) & = & 0v_1 & + & \ldots & + & 0v_{n-1} & + & 0v_n \\ f(v_n) & = & \lambda_1 v_1 & + & \ldots & + & \lambda_{n-1}v_{n-1} & + & \lambda_n v_n \end{array}$$

La traza de f no depende de la base escogida (base inicial = base final)
$\implies \quad 0 = \operatorname{tr}(f) = 0 + \cdots + 0 + \lambda_n \quad \implies \quad \lambda_n = 0$
$\implies \quad f(v_n) \in \ker f \quad \implies \quad \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

Ejercicio 3.5.
Solución 2

$$\operatorname{rango}(A) = 1 \qquad\qquad A = (X_1 | \ldots | X_n)$$

$$\implies \quad \operatorname{span}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle = \operatorname{span}\left\langle \begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}\right\rangle \quad \implies \quad X_i = v_i \begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\implies \quad A = \begin{pmatrix} v_1u_1 & \cdots & v_nu_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1u_n & \cdots & v_nu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = UV$$

$$0 = \operatorname{tr} A = v_1u_1 + \cdots + v_nu_n = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix} = VU$$

$$A^2 = UVUV = U(VU)V = \begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.12.

$\boxed{\Longrightarrow}$

$$
\begin{aligned}
AB = I_n \quad \text{en } M_n(\mathbb{Z}) \qquad &\Longrightarrow \qquad (\det A)(\det B) = 1 \quad \text{en } \mathbb{Z} \\
&\Longrightarrow \qquad \det A \in \{\pm 1\}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

Si $\det A \in \{\pm 1\}$, podemos construir su inversa sin salirnos de $M_n(\mathbb{Z})$ mediante la fórmula de la adjunta:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de $\mathbb{F}^n$, y trabajamos con endomorfismos.

$$
\begin{array}{ccccc}
\sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma \\
\tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau \\
\sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma\circ\tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma\circ\tau} \\
 & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau
\end{array}
\qquad ¿\ f_{\sigma\circ\tau} = f_\sigma \circ f_\tau\ ?
$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que las columnas de la matriz son las imágenes de los vect. de la base canónica:

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \qquad f_\tau(e_j) = e_{\tau(j)} \qquad f_{\sigma\circ\tau}(e_j) = e_{(\sigma\circ\tau)(j)}$$

Si dos aplicaciones coinciden en una base, es que son iguales.

$$(f_\sigma \circ f_\tau)(e_j) = f_\sigma(f_\tau(e_j)) = f_\sigma(e_{\tau(j)}) = e_{\sigma(\tau(j))} = e_{(\sigma\circ\tau)(j)} = f_{\sigma\circ\tau}(e_j)$$

Capítulo 4. Valores y vectores propios

Situación 4.1.

4.1. Valores propios

En este capítulo,

V es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita,

$n = \dim V$,

$A \in M_n(\mathbb{F})$ es una matriz cuadrada,

f es un endomorfismo de V.

(Es decir, $\quad f : V \to V \quad$ es una aplicación lineal en la que tanto el espacio inicial como el final son V).

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un valor propio del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

$$f(v) = \lambda v$$

2. Fijemos un valor propio λ.

   Un vector $v \in V$ es un vector propio de f de valor propio λ si $f(v) = \lambda v$.

   El conjunto de dichos vectores propios es el subespacio fundamental de valor propio λ, denotado $S_f(\lambda)$:

$$S_f(\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

Definición 4.3.

4.1. Valores propios

Los valores y vectores propios de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ son, por definición, los del endomorfismo $h_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ dado por $h_A(X) = AX$.

$$f(v) = \lambda v \qquad \longleftrightarrow \qquad AX = \lambda X$$

Notas 4.4.

4.1. Valores propios

1. El vector nulo es vector propio de cualquier valor propio, pero hace falta que haya al menos otro vector v tal que $f(v) = \lambda v$ para que hayamos dicho que el escalar λ es valor propio.

2. $S_f(\lambda)$ es en efecto un subespacio de V, ya que es el núcleo de la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} (\lambda \operatorname{id}_V - f) : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \lambda v - f(v) \end{aligned}$$

   Análogamente, $S_A(\lambda)$ es un subespacio de $\mathbb{F}^n$.

Ejemplo 4.5.

4.1. Valores propios

Sea $A \in M_2(\mathbb{Q})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ es vector propio de A de valor propio 4,

y $\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ es vector propio de valor propio 0.

Propiedad 4.6.

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

$$\begin{array}{ccc} \lambda \text{ es valor propio de } f & \Longleftrightarrow & \lambda \text{ es valor propio de } A \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \text{rango}(\lambda I_n - A) < n & \Longleftrightarrow & \det(\lambda I_n - A) = 0 \end{array}$$

Demostración.

λ es valor propio de f

$\Longleftrightarrow$ $\exists\, \bar{0} \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$

$\Longleftrightarrow$ $\exists\, \bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n$ tal que $AX = \lambda X$

$\Longleftrightarrow$ el sistema $(\lambda I_n - A)X = \bar{0}$ es indeterminado

$\Longleftrightarrow$ la matriz $\lambda I_n - A$ no es regular

□

Ejemplo 4.7.

Sea $A \in M_3(\mathbb{C})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -16 & -4 \\ 6 & 9 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculemos, de manera sistemática, todos los valores propios de A y sus subespacios fundamentales.

Ejemplo 4.7.

Solución.

Para hallar los valores propios debemos calcular los valores de λ que hacen que el siguiente determinante sea cero:

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 11 & 16 & 4 \\ -6 & \lambda - 9 & -2 \\ -6 & -8 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \cdots =$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 \overset{\text{Ruffini}}{=\!=\!=} (\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

Así que los valores propios de A son -1 y 1.

Ejemplo 4.7.

Solución.

$\boxed{S(-1)}$ $\quad AX = -1X \quad \Longleftrightarrow \quad (-I_3 - A)X = \bar{0}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow S(-1) = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\boxed{S(1)}$ $\quad AX = 1X \quad \Longleftrightarrow \quad (I_3 - A)X = \bar{0} \quad \Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 16 & 4 \\ -6 & -8 & -2 \\ -6 & -8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow S(1) = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

□

Ejercicios 4.8.

4.1. Valores propios

- 4.1
- 4.2
- 4.3

Capítulo 4. Valores y vectores propios

Nota 4.9.

4.2. Vectores propios

Si $(v_1, \dots, v_n)$ es una base de V de forma que
cada v_i es vector propio de f de valor propio λ_i,
entonces la matriz del endomorfismo f en la base $(v_1, \dots, v_n)$
es la matriz diagonal:

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Recíprocamente,
si la matriz de f en la base $(v_1, \dots, v_n)$ es $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,
entonces $f(v_i) = \lambda_i v_i$ para todo i.

Definiciones 4.10.

4.2. Vectores propios

1. Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F})$ es diagonalizable
   si es semejante a alguna matriz diagonal.

2. Un endomorfismo $f : V \to V$ es diagonalizable
   si existe alguna base de V en la que la matriz de f es diagonal,
   es decir, dicha base está formada por vectores propios.

   En otras palabras,
   f es diagonalizable si cualquiera de sus matrices es diagonalizable.

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base $\mathcal{C}$,
- D es la matriz de f en la base $\mathcal{B}$,
- P es la matriz de cambio de bases de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$,

entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

Demostración.

$Y_{\mathcal{C}} = AX_{\mathcal{C}}, \quad Y_{\mathcal{B}} = DX_{\mathcal{B}}, \quad X_{\mathcal{C}} = PX_{\mathcal{B}}, \quad Y_{\mathcal{C}} = PY_{\mathcal{B}}.$

$$AX_{\mathcal{C}} = Y_{\mathcal{C}} = PY_{\mathcal{B}} = PDX_{\mathcal{B}} = PDP^{-1}X_{\mathcal{C}}$$

□

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Veamos que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución.

Consideramos A como la matriz del endomorfismo $f = h_A$ en la base canónica $\mathcal{C} = \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$.

Hallamos una base $\mathcal{B} = \left(\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-4\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ formada por vectores propios de valores propios 4 y 0.

Calcular la matriz P de cambio de bases de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ es muy sencillo, gracias a que $\mathcal{C}$ es la base canónica, $P = \left(\begin{smallmatrix}0 & -4\\1 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Solución.

Llamemos D a la matriz de f en la base $\mathcal{B}$;
como la base $\mathcal{B}$ está formada por vectores propios,
D es diagonal, $D = \operatorname{diag}(4, 0) = \left(\begin{smallmatrix}4 & 0\\0 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

Aplicando el repaso 4.11 tenemos que $A = PDP^{-1}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

□

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Probemos que la siguiente matriz no es diagonalizable:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

Supongamos por reducción al absurdo que

sí que existe una matriz $D = \operatorname{diag}(\alpha, \beta) = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{smallmatrix}\right)$ diagonal

y una matriz $P \in M_2(\mathbb{F})$ regular

de manera que $N = PDP^{-1}$.

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Multiplicando a izquierda por P^{-1} y a derecha por P, vemos que D^2 es la matriz nula. Pero $D^2 = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{smallmatrix}\right)$.

Por lo tanto $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, es decir, $\alpha = \beta = 0$.
Así que D también es la matriz nula.

Volviendo a la expresión inicial $N = PDP^{-1}$, observamos que a su vez N también es la matriz nula, contradicción. □

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Dado un número natural $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, calculemos A^m.

Solución.

Calculamos los valores propios de A y sus subespacios fundamentales, y aplicando el repaso 4.11 obtenemos que:

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Solución.

Como la matriz D es diagonal, calcular sus potencias es sencillo:

$$D^m = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-1)^m & \\ & & (-2)^m \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$A^m = (PDP^{-1})^m = PD^mP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (-2)^{m+1}+2 & (-2)^{m+1}+2 \\ (-1)^{m+1}+1 & (-1)^{m+1}+2 & (-2)^{m+1}+2 \\ (-1)^m-1 & (-2)^m+(-1)^m-2 & (-2)^m+2\cdot(-1)^m-2 \end{pmatrix}$$

□

Ejercicios 4.15.

4.2. Vectores propios

- 4.4
- 4.5
- 4.6
- 4.7
- 4.8
- 4.9

Capítulo 4. Valores y vectores propios

Definición 4.16.

4.3. Polinomio característico

El polinomio característico de una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ cuadrada es el polinomio de $\mathbb{F}[X]$ dado por:

$$\det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & X - a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{F}[X]$$

Ejemplo 4.17.

4.3. Polinomio característico

Calculemos el polinomio característico de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 26 & 6 & 8 \\ 36 & 12 & 12 \\ -93 & -24 & -29 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} X - 26 & -6 & -8 \\ -36 & X - 12 & -12 \\ 93 & 24 & X + 29 \end{vmatrix} = \ldots = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$$

$$\overset{\text{Ruffini}}{=\!=\!=} (X-2)(X-3)(X-4)$$

$\square$

Nota 4.18.

4.3. Polinomio característico

Hemos definido el polinomio característico de una matriz de forma que sus raíces sean los valores propios de dicha matriz.

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$. Entonces:

1. $p(X)$ es un polinomio mónico de grado n, es decir:

$$p(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

2. $b_{n-1} = -\operatorname{tr} A$.
3. $b_0 = (-1)^n \det A$.

Demostración.

3. Basta evaluar $p(X)$ en $X = 0$:

$$b_0 = p(0) = \det(0 \cdot I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

2. Para calcular $\det(XI_n - A)$ sumamos todos los posibles productos de n entradas de la matriz $XI_n - A$ de manera que cojamos una entrada de cada fila y de cada columna.

Estos productos son polinomios de grado el número de entradas que hayamos cogido de la diagonal principal.

Luego solo contribuirán al término b_{n-1} si escogemos al menos $n-1$ entradas de la diagonal principal.

Pero si elegimos todas las entradas menos una de la diagonal principal, necesariamente la última entrada también estará en la diagonal principal, ya que hay que elegir una de cada fila y columna.

En conclusión, la única contribución proviene de multiplicar todas las entradas de la diagonal principal.

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

$$\begin{aligned}
&(X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}) = \\
&\quad = X^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) X^{n-1} + \\
&\qquad (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + \cdots + a_{n-1,n-1}a_{nn}) X^{n-2} + \cdots + \\
&\qquad (-1)^n \cdot a_{11} \cdots a_{nn}
\end{aligned}$$

Luego $b_{n-1} = -a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn} = -\operatorname{tr} A$. □

Corolario 4.20.

4.3. Polinomio característico

Supongamos que podemos factorizar el polinomio característico de la matriz A como $p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k}$.

(Esto siempre es posible si el cuerpo de escalares es $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Entonces:

1. $\operatorname{tr} A = M_1 \lambda_1 + \cdots + M_k \lambda_k$.
2. $\det A = \lambda_1^{M_1} \cdots \lambda_k^{M_k}$.

Nota 4.21.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) = \det(XI_n - A)$ el polinomio característico de A;
recuerda que es un polinomio mónico.

Sea $q(X) = \det(A - XI_n)$.

Entonces $q(X) = (-1)^n p(X)$.

Luego si n es impar estos dos polinomios no son iguales,
pero sí que tienen las mismas raíces.

Propiedad 4.22.

4.3. Polinomio característico

Si dos matrices son semejantes,
entonces tienen el mismo polinomio característico.

Demostración.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$,
y supongamos que existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ regular t.q. $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned}
|XI_n - B| &= |X(P^{-1}I_nP) - P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}(XI_n)P - P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}| \cdot |XI_n - A| \cdot |P| \\
&= |P|^{-1} \cdot |P| \cdot |XI_n - A| = |XI_n - A|
\end{aligned}$$

$\square$

Notas 4.23.

4.3. Polinomio característico

1. Ya sabíamos que si dos matrices son semejantes, entonces tienen el mismo determinante, la misma traza, y los mismos valores propios.

   La propiedad 4.22 es una demostración alternativa de esto.

2. Gracias a la propiedad 4.22 podemos definir el polinomio característico de un endomorfismo como el polinomio característico de su matriz respecto a una base cualquiera.

Ejercicios 4.24.

4.3. Polinomio característico

- 4.10
- 4.11
- 4.12

Capítulo 4. Valores y vectores propios

Nota 4.25.

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base.
Sea λ un valor propio de f (es decir, λ es un valor propio de A).
Entonces:

$$\dim S_f(\lambda) = \dim S_A(\lambda) = n - \text{rango}(\lambda I_n - A)$$

Demostración.

Recordamos que, si A es la matriz de f en la base fijada, entonces $\lambda I_n - A$ es la matriz del endomorfismo $\lambda \, \text{id}_V - f$ en esa misma base.

Por lo tanto, $\text{rango}(\lambda \, \text{id}_V - f) = \text{rango}(\lambda I_n - A)$.

$$\begin{aligned} \dim S_f(\lambda) &= \dim \ker(\lambda \, \text{id}_V - f) = \dim V - \text{rango}(\lambda \, \text{id}_V - f) \\ &= \dim \mathbb{F}^n - \text{rango}(\lambda I_n - A) = \dim \ker(\lambda I_n - A) = \dim S_A(\lambda) \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 4.26.

Los subespacios fundamentales
de un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita
tienen suma directa.

Demostración.

Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son k valores propios distintos de f.

Veamos que $S(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus S(\lambda_k)$ mediante inducción sobre k.

$$v_1 + \cdots + v_k = \bar{0}, \quad \text{con } v_i \in S(\lambda_i) \quad \forall i \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad v_i = \bar{0} \quad \forall i$$

El resultado es trivial para $k = 1$. Supongamos que es cierto para $k - 1$.

Proposición 4.26.

Demostración.

$$\bar{0} = f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

$$- \qquad \bar{0} = \lambda_k \cdot \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

$$\bar{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k) v_1}_{\in S_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1}}_{\in S_{k-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{inducción}} \quad (\lambda_i - \lambda_k) v_i = \bar{0} \quad \xrightarrow{\lambda_i \neq \lambda_k} \quad v_i = \bar{0}, \quad 1 \leq i \leq k-1$$

Finalmente, $v_k = -v_1 - \cdots - v_{k-1} = -\bar{0} - \cdots - \bar{0} = \bar{0}$. $\square$

Definiciones 4.27 y nota 4.28.

Definiciones 4.27.

Sea λ un valor propio del endomorfismo f.

1. La multiplicidad geométrica de λ es la dimensión del subespacio fundamental $S(\lambda)$.
2. La multiplicidad algebraica de λ es su multiplicidad como raíz en el polinomio característico.

Nota 4.28.

La multiplicidad geométrica de un valor propio es mayor o igual que 1.

Proposición 4.29.

La multiplicidad geométrica de un valor propio
es menor o igual que la multiplicidad algebraica.

Demostración.

Sea λ un valor propio de f, sea $m = \dim S(\lambda)$ su multiplicidad geométrica.

Sea $(v_1, \dots, v_m)$ una base de $S(\lambda)$, la ampliamos con $v_{m+1}, \dots, v_n$ hasta que $(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ sea base de V.

Proposición 4.29.

Demostración.

La matriz de f respecto de dicha base es la matriz por bloques:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m & B \\ \hline & C \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} m \times m & m \times (n-m) \\ \hline & (n-m) \times (n-m) \end{array}\right)$$

El polinomio característico de f es el polinomio característico de A:

$$\det(XI_n - A) = \det \left(\begin{array}{c|c} (X-\lambda)I_m & -B \\ \hline & XI_{n-m} - C \end{array}\right)$$

$$= (X-\lambda)^m \cdot \det(XI_{n-m} - C)$$

Así, la multiplicidad de λ en el polinomio característico es al menos m. $\square$

Ejercicios 4.30.

- 4.13
- 4.14
- 4.15

Capítulo 4. Valores y vectores propios

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita,
y sea f un endomorfismo de V.

Entonces son equivalentes:

1. f es diagonalizable.
2. La suma de los subespacios fundamentales es el espacio total V.
3. El polinomio característico puede factorizarse como producto de polinomios de grado 1 con coeficientes en el cuerpo de escalares $\mathbb{F}$, y las multiplicidades geométrica y algebraica de cada valor propio coinciden.

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Los subespacios fundamentales siempre tienen suma directa, y además sabemos por hipótesis que dicha suma es el total.

  Al juntar una base de cada $S(\lambda_i)$, obtenemos una base de V.

  $\exists$ una base formada por vectores propios, luego f es diagonalizable.

- $(1 \Rightarrow 2)$ f diagonaliz. $\Rightarrow \exists$ una base $(v_1, \ldots, v_n)$ de autovectores de V

  Cada v_i está en un $S(\lambda_j) \Rightarrow \operatorname{span}\langle v_1, \ldots, v_n\rangle \subseteq S(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus S(\lambda_k)$.

  $(v_1, \ldots, v_n)$ base $\Rightarrow \operatorname{span}\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = V \Rightarrow S(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus S(\lambda_k) = V$

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Ya sabemos: f diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$

Sea M_i la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i.

Siempre podemos escribir el polinomio característico $p(X)$ como:

$$p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k} q(X)$$

(El polinomio mónico $q(X)$ no tiene raíces en el cuerpo de escalares $\mathbb{F}$).

$$\begin{aligned} \dim V &= \deg p(X) = M_1 + \cdots + M_k + \deg q(X) \\ &\geq M_1 + \cdots + M_k \geq \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k) \end{aligned}$$

Las dos igualdades se cumplen si y solo si

$\deg q(X) = 0$ (es decir $q(X) = 1$), y $\dim S(\lambda_i) = M_i$ para todo i. $\square$

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

Veamos que la diagonalizabilidad de una matriz depende del cuerpo de escalares $\mathbb{F}$ en el que trabajamos.

1. Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   El polinomio característico de A es $X^2 + 4$.

   A es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, pero no es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (y por tanto tampoco es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$).

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

2. Sea B la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   El polinomio característico de B es $X^3 - 5X + 3$.

   B no es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, pero sí es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (y por tanto también es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$.

Sea $a/b \in \mathbb{Q}$ una raíz de dicho polinomio,
donde a y b son números enteros coprimos entre sí.

Entonces: $\quad a \mid c_0, \quad b \mid c_n.$

Demostración.

(Antes de empezar observamos que $a \neq 0$, $b \neq 0$).

$$c_0 + c_1 \cdot \frac{a}{b} + c_2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + c_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

$$\iff \quad b^n c_0 + ab^{n-1}c_1 + a^2b^{n-2}c_2 + \cdots + a^n c_n = 0$$

Luego $\quad a \mid b^n c_0 \xRightarrow{a,b \text{ coprimos}} a \mid c_0. \qquad$ Análogamente $b \mid c_n$. $\square$

Ejercicios 4.34.

4.5. Criterio de diagonalización

- 4.16
- 4.17
- 4.18
- 4.19