Proyecto docente de Álgebra Lineal I

Adrián Rodrigo Escudero

8 de mayo de 2024

Este documento está colgado en `https://personal.unizar.es/rodrigo`

1. Introducción

Es buena idea empezar los ensayos con una cuestión interesante, para captar la atención del público desde el primer momento. ¿Y qué hay más interesante que un problema bonito de matemáticas? En efecto, no uno, sino *dos* problemas bonitos:

Ejercicio 1.22. Para cada $i = 0, \ldots, 5$, o bien encuentra un ejemplo de lo siguiente, o bien demuestra que no existe. Vectores $u_1, u_2, u_3, u_4, w \in \mathbb{Q}^5$ tales que:

$$\dim \operatorname{span}\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle = 3 \tag{1.81}$$

$$\dim \operatorname{span}\langle u_1 + w, u_2 + w, u_3 + w, u_4 + w \rangle = i \tag{1.82}$$

Problema 3 (18 de enero de 2021)**.** En cada apartado, o bien encuentra un ejemplo de lo que se pide, demostrando que cumple todas las propiedades, o bien prueba que no existe.

a) Una matriz $A \in M_4(\mathbb{Q})$ tal que $\operatorname{rango}(A^2) = 2$ y $\operatorname{rango}(A^3) = 2$.

b) Una matriz $B \in M_4(\mathbb{Q})$ tal que $\operatorname{rango}(B^2) = 2$ y $\operatorname{rango}(B^3) = 1$.

c) Una matriz $C \in M_4(\mathbb{Q})$ tal que $\operatorname{rango}(C^3) = 2$ y $\operatorname{rango}(C^4) = 1$.

Mi plaza de profesor ayudante doctor de la Universidad de Zaragoza va a convertirse en una plaza de profesor permanente. Esto significa que va a haber un nuevo concurso de méritos. Uno de los documentos que hay que presentar en dicho concurso es un proyecto docente de la asignatura que yo elija; y he elegido Álgebra I del doble grado en física y matemáticas y del grado en física.

Pero, ¿qué es un proyecto docente? Desde el primer curso en el que impartí la asignatura (2018-19 en la Universidad de La Rioja), ya me planteé muy seriamente qué contenidos debía enseñar, cuáles no, y cuál era la mejor forma de hacerlo. Por ello considero que realmente mi proyecto docente ya está hecho; son los apuntes de Álgebra Lineal I que están colgados en la misma web que este documento (`https://personal.unizar.es/rodrigo`). La última versión a día de hoy es la 2021-9-20.

No obstante, este texto me brinda la oportunidad de explicar algunas de las decisiones que tomé a la hora de planificar la asignatura. Lo cual no está mal, ya que tengo cierta tendencia a la brevedad.

Antes de nada aclaremos cuál es el nombre de la asignatura. En el doble grado en física y matemáticas de la Universidad de Zaragoza figura como *Álgebra I*. Pero en el doble grado en matemáticas e ingeniería informática de la Universidad de La Rioja se llama *Cálculo Matricial y Vectorial*. Yo pienso que *Álgebra Lineal I* es más adecuado, y por eso este es el título que aparece en mis apuntes.

Y sí, el sufijo "I" es porque hay una segunda parte, *Álgebra Lineal II*. También tengo los apuntes de este segundo semestre preparados, porque lo impartí durante los dos cursos que estuve en la Universidad de La Rioja. Sin embargo todavía no he tenido ocasión de pasar dichos apuntes a ordenador y colgarlos en la web.

Este es un buen momento para hacer un breve resumen de los contenidos de ambos semestres, tal y como yo los concibo y enseño. Por supuesto, la guía docente de Álgebra I coincide con mi planteamiento.

Álgebra Lineal I (6 créditos ECTS)**.**

1. **Espacios vectoriales;** el método de Gauss; subespacios; conjuntos generadores; dependencia lineal; dimensión; coordenadas; suma directa.

2. **Aplicaciones lineales y matrices;** núcleo e imagen; propiedades de las aplicaciones lineales; relación entre aplicaciones lineales y matrices; el espacio de las aplicaciones lineales; matrices regulares; matriz inversa; matrices elementales; cambios de bases; equivalencia y semejanza de matrices; rango; sistemas de ecuaciones lineales.

3. **Determinantes;** determinantes y operaciones por filas; propiedades de los determinantes; matriz adjunta; signatura; traza.

4. **Valores y vectores propios;** polinomio característico; subespacios fundamentales; multiplicidad geométrica y multiplicidad algebraica; criterio de diagonalización.

Álgebra Lineal II (6 créditos ECTS).

1. **Teoría del endomorfismo;** cuerpo de fracciones y conjunto cociente; matrices de números enteros y de polinomios; subespacios invariantes; polinomios mínimos; teorema de los factores invariantes; teorema de Cayley-Hamilton; divisores elementales; formas canónicas; símbolos de Segre y Weyr.

2. **Formas bilineales y hermitianas;** cambios de bases; ortogonalidad; formas cuadráticas; ley de inercia de Sylvester; menores angulares y criterio de Sylvester; espacios unitarios y euclídeos; matrices unitarias y ortogonales; Gram-Schmidt; sistemas de ecuaciones normales.

3. **Endomorfismos en espacios unitarios y en espacios euclídeos;** endomorfismo adjunto; endomorfismos normales; el teorema espectral; teoremas de diagonalización simultánea (de formas hermitianas y de endomorfismos); isometrías y su clasificación en dimensiones dos y tres.

Como nota personal quiero decir que, para mí, dar clase de matemáticas a los estudiantes de física es un deseo hecho realidad.

2. La asignatura en el grado

Nos podemos preguntar por qué estudiar álgebra lineal durante el primer curso del grado en física.

Lamentablemente muchos alumnos llegan a la universidad sin saber qué es una *demostración*, ya que las matemáticas que han visto en bachillerato se han reducido a la resolución de ejercicios tipo. Un curso de álgebra lineal es el marco perfecto para poder explicar qué son las matemáticas, de la única manera correcta de explicarlo, es decir, mediante ejemplos.

Volvamos la vista al ejercicio 1.22 y al problema 3 de la introducción. En los casos en los que no exista lo que pide el enunciado, no es suficiente probar con unos cuantos casos y ver que no se cumple, sino que hay que dar una demostración general. Observa que los enunciados de ambos problemas son muy sencillos, en términos de matrices de números. Se trata pues, no de la noción de demostración en el sentido de la lógica axiomática, sino de encontrar un motivo que convenza a cualquiera de que esto no va a suceder nunca.

Una anécdota. En una visita a mi hermano y mi cuñada en Reino Unido, me presentaron a varios compañeros suyos que, como ellos, eran ingenieros españoles trabajando en Jaguar Land Rover (JLR). Cuando se enteraron de que yo era profesor de matemáticas en la universidad, se plantearon qué utilidad tenían en su trabajo las matemáticas que habían estudiado durante la ingeniería. Me vi gratamente sorprendido al presenciar cómo se respondían a sí mismos que prácticamente nada de lo que les habían enseñado en la carrera se correspondía con su desempeño en JLR, pero que las asignaturas de matemáticas les habían servido para "amueblar la cabeza". De hecho varios echaban de menos que no hubiera más matemáticas en ingeniería. Lo que quiero decir es que a veces los matemáticos no somos conscientes de lo muy valorada que es nuestra labor.

Más adelante hablaremos del álgebra lineal como prerrequisito de otras asignaturas del grado. Este es evidentemente un argumento de gran peso para la inclusión del álgebra lineal en el plan de estudios. Pero en mi opinión, la razón más importante por la que se debe estudiar álgebra lineal en cualquier carrera de ciencias o ingeniería es, como ya hemos dicho, porque es el marco perfecto para explicar matemáticas.

Decir que hay que estudiar álgebra lineal, sin especificar numéricamente cuánto, es como no decir nada. (Esto lo saben bien mis alumnos de física). Quiero defender que es necesario un curso anual, es decir, dos semestres, y el motivo es el siguiente.

La asignatura tiene dos saltos cualitativos de abstracción; uno en cada semestre. El primer salto comienza con la definición de espacio vectorial, introduciendo un lenguaje y una forma de pensar totalmente nueva para la mayoría de alumnos. El segundo salto es el teorema de los factores invariantes. Este teorema tiene un nivel de dificultad comparable a las asignaturas de cursos superiores del grado en matemáticas.

Otra anécdota. Todavía recuerdo, de mi época de estudiante, la clase de presentación de física cuántica en tercero de licenciatura. En un momento dado el profesor se preguntó a sí mismo cuántas matemáticas hacían falta para esa asignatura. La respuesta que dio no podría ser más acertada: "todas".

Desafortunadamente es imposible que un físico que termina la carrera conozca "todas" las matemáticas; como también es imposible que conozca "toda" la física. Pero si ha estudiado un segundo semestre de álgebra lineal, al menos habrá visto un claro ejemplo de cómo son las asignaturas de cursos superiores del grado en matemáticas.

En este análisis de lo instructiva que es el álgebra lineal, no podemos dejar de mencionar el capítulo de valores y vectores propios. Este capítulo es especial. Muy especial. Quiero enfatizar hasta qué punto es un capítulo único, no solo dentro del álgebra, sino de todas las matemáticas. Hay conceptos muy abstractos, como la suma directa o los cambios de base, que no terminan de entenderse hasta que no llegamos a los valores y vectores propios. Y entonces todo cuadra de una manera totalmente natural. Aquí los profesores tenemos, afortunadamente, muy poco trabajo. En mi opinión este capítulo es perfecto para ilustrar lo que son las matemáticas.

Como ya hemos mencionado anteriormente, el álgebra lineal es requisito previo de muchas otras asignaturas tanto del grado en matemáticas como del grado en física. Por citar algunos ejemplos concretos en donde aparece: el espacio tangente a un punto de una variedad en geometría diferencial; la forma cuadrática hessiana de una función de varias variables en análisis; la exponencial de una matriz en la resolución de sistemas lineales en ecuaciones diferenciales; la matriz estocástica de una cadena de Márkov en probabilidad; la matriz de adyacencia en teoría de grafos; el tensor de inercia de un sólido rígido en mecánica clásica; los campos vectoriales en electromagnetismo; los prismas de polarización y los polaroides en la producción de luz linealmente polarizada en óptica; la red de Bravais de un sólido cristalino en física del estado sólido. Mención especial a dos asignaturas donde el álgebra lineal juega un papel totalmente protagonista:

- Geometría lineal.
- Mecánica cuántica.

3. Cronograma

Cuando tengo que impartir una asignatura que no había dado antes, una de mis principales preocupaciones es la distribución temporal de los temas, es decir, cuántas clases le voy a dedicar a cada capítulo. Esta cuestión me parece tan importante que, en mi segundo año como profesor de Álgebra Lineal I (curso 2020-21 en la Universidad de Zaragoza), se me ocurrió una idea loca:

Los apuntes están divididos por secciones, de forma que cada sección se corresponde con una clase de 50 minutos. Además, al final de cada sección hay una lista de ejercicios propuestos.

Debo confesar que me sorprendió lo bien que funcionó esta idea. Por supuesto, parte del truco consiste en acabar muchas de las secciones con ejemplos, de forma que si no da tiempo a acabarlos, se pueden terminar (o no) en la siguiente clase de ejercicios. La gracia es que así los conceptos más importantes y las demostraciones más densas se dan siempre al principio de la clase, cuando los alumnos están más frescos. Además, resulta más fácil sincronizar el ritmo entre el grupo de mañana y el de tardes.

Tal y como explico en la introducción de los apuntes, la mayor parte de los 100 ejercicios propuestos los hemos elaborado los profesores del Área de Álgebra de la Universidad de Zaragoza. A estos hay que sumar los problemas que cada curso se me van ocurriendo para los exámenes. Nos podemos sentir orgullosos de esta colección de ejercicios; probablemente sean el punto más fuerte de mi proyecto docente. La clave está en que hay ejercicios de muy distintos niveles de dificultad, desde los más mecánicos, hasta problemas "de olimpiada", pasando por una gran cantidad de niveles intermedios. Nunca me canso de repetir que los ejercicios son la parte más importante de cualquier asignatura, especialmente aquellos de dificultades intermedias.

Recordemos que esta asignatura tiene 6 créditos ECTS, por lo que en principio el calendario de Unizar debería reservarle 60 clases (de 50 minutos cada una). Teniendo esto en mente, mi cronograma de Álgebra Lineal I es el que figura en el cuadro 1. Hay 32 clases de teoría (tantas como secciones en los apuntes) y 24 de ejercicios. Quedan 4 clases libres, que se pueden usar para resolver dudas, hacer exámenes de años anteriores, imprevistos, hacer más ejercicios, etcétera.

A la hora de elaborar el cronograma, resulta útil el cuadro 2.

En la práctica, el calendario de la Universidad de Zaragoza es mucho más breve, tal y como se ve en el cuadro 3. Para mí esto ha supuesto un cambio drástico respecto a las directrices de la Universidad de La Rioja. Por ejemplo, durante los dos años que estuve en Logroño, el calendario reservaba 42 clases de 50 minutos y 15 clases de 80 minutos para Álgebra Lineal II, asignatura de 6 créditos ECTS.

Lo habitual en la Universidad de Zaragoza es que los 6 créditos ECTS de Álgebra Lineal I se traduzcan en unos 54 días de clase (de 50 minutos cada una). Aunque no es lo ideal, creo que con este tiempo es posible seguir dando el mismo temario; evidentemente a costa de hacer menos clases de ejercicios. Y si el calendario es aún más corto, mi recomendación es recortar tiempo del capítulo 3, tal y como veremos más adelante.

Sección 1.1. Método de Gauss. Dedicamos la clase de presentación de la asignatura a repasar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss. Estos conceptos, además de ser muy sencillos, ya se han visto en bachillerato. Es más, en mi caso recuerdo que mi profesor de matemáticas de primero de bachillerato, José Manuel Sádaba, también nos enseñó el método de Gauss en el primer día de clase.

Espero que mi forma de dar clase se parezca mucho a la de Sádaba.

Al final de esta sección están propuestos los cuatro primeros ejercicios de los apuntes, en cuyos enunciados aparecen un total de cinco sistemas de

	Teoría	Ejercicios
Espacios vectoriales	9	7
Aplicaciones lineales y matrices	13	9
Determinantes	5	3
Valores y vectores propios	5	5
	32	24

Cuadro 1: Cronograma de Álgebra Lineal I (6 créditos ECTS).

Capítulo	1	2	3	4	Total
Páginas de teoría	20	24	9	11	64
Páginas de ejercicios	8	10	3	5	26
Definiciones	9	7	4	5	25
Teoremas	1	2	0	1	4
Proposiciones	2	2	0	2	6
Ejemplos	14	8	2	7	31
Ejercicios	30	35	16	19	100

Cuadro 2: Algunas cifras sobre los apuntes de Álgebra Lineal I.

Curso 2020-21	grupo de mañana	54
	grupo de tardes	55
Curso 2022-23	grupo de mañana	52
	grupo de tardes	49
Curso 2023-24	grupo de mañana	53
	grupo de tardes	55

Cuadro 3: Número de clases de 50 minutos de Álgebra Lineal I en Unizar.

Sobre el capítulo 1 me parece que ...	Respuestas
tanto la teoría como los ejercicios son difíciles.	29 (33,33 %)
los ejercicios son difíciles, pero la teoría no.	50 (57,47 %)
la teoría es difícil, pero los ejercicios no.	7 (8,05 %)
ni la teoría ni los ejercicios son difíciles.	1 (1,15 %)
	87 (100,00 %)

Cuadro 4: Encuesta dificultad capítulo 1.

ecuaciones. En ningún caso nos piden resolver dichos sistemas. Se trata de un aviso a navegantes; en esta asignatura siempre habrá que leer los enunciados con detenimiento para ver qué nos preguntan. Interpretar qué hay que hacer suele ser la parte más difícil de cualquier problema.

Capítulo 1. Espacios vectoriales. Esta asignatura conlleva, para la mayoría de alumnos, un salto de abstracción respecto a las matemáticas que han visto en bachillerato.

Esta es una cuestión a la que le he dado muchas vueltas.

Mi conclusión es que el salto es inevitable. (La única forma de sortearlo sería impartir unos contenidos muy diferentes). Esto lo considero un hecho.

Mi planteamiento de la asignatura es empezar con la abstracción desde el primer día. Es decir, el salto, cuanto antes. Considero que esta es una de las muchas formas posibles de enfocar la asignatura, y que tiene sus ventajas y sus desventajas.

La bueno es que así los estudiantes tienen más tiempo para asimilar esta nueva forma de pensar. La dificultad de la asignatura va de más a menos, siendo el primer capítulo el más difícil, y el cuarto el más fácil.

Lo malo de este enfoque es que algunos alumnos se pueden desanimar. En clase repito constantemente que la mente humana no es un ordenador, así que no es un drama si al empezar el segundo capítulo hay conceptos del capítulo anterior que todavía no se han entendido. De hecho esto es lo normal para muchos alumnos. Según vayamos avanzando, los nuevos conceptos ayudarán a entender mejor todo lo anterior.

También insisto mucho en que esta asignatura, a diferencia de otras, hay que llevarla al día.

Así pues, este primer tema hay que abordarlo a un ritmo deliberadamente lento. Pero tampoco me gusta alargar la teoría de forma innecesaria, ya que da la impresión de que las cosas son más complicadas de lo que realmente son. La solución, por supuesto, está en hacer muchos ejercicios. A la hora de elaborar las hojas de problemas, tuve especial cuidado en que haya ejercicios que se puedan hacer desde el primer día, y en los que se trabajen los nuevos conceptos que tanto les cuestan.

De hecho mi impresión es que el salto de abstracción está principalmente en los ejercicios, y no tanto en la teoría. Por ello durante el curso 2023-24, al acabar el capítulo 1 de espacios vectoriales, decidí realizar la encuesta que figura en el cuadro 4, acerca de la dificultad de dicho capítulo. El 41,4 % de los alumnos respondieron que la teoría es difícil, mientras que el 90,8 % pensaban que los ejercicios son difíciles. No quiero darle a la encuesta más importancia de la que tiene, pero sus resultados no podrían haber sido mejores.

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices. El segundo tema es el más largo de la asignatura, y quizá por eso es el que más me costó organizarlo en secciones de 50 minutos. El resultado final alterna secciones más intensas (2, 4, 6, 8, 11, 12), con otras más relajadas (1, 3, 5, 7, 9, 10, 13). Al final de estas últimas puede dar tiempo a hacer algún problema.

Capítulo 3. Determinantes. Este tema es distinto a los demás en muchos sentidos. Sus demostraciones son probablemente las más difíciles de la asignatura. Además involucran técnicas que no son propias del álgebra lineal (excepto en la sección 3.3), y que por lo tanto tienen menos interés para nosotros. Por otro lado, los resultados en sí son los más sencillos de entender, y además han sido trabajados en bachillerato. La propiedad 3.8 es un ejemplo extremo de esto; un enunciado sencillísimo, y quizá la demostración más complicada de los apuntes.

El resultado es un pequeño capítulo que me gustaría tener en cualquier asignatura. Por un lado, los alumnos a los que se les hayan atragantado los temas anteriores pueden tomarse un pequeño respiro mientras repasan lo anterior. Por otro lado, los alumnos más entusiastas disfrutan enormemente de no dejar nada sin demostrar. Además los ejercicios son divertidísimos.

Y lo más importante; *si el calendario es incluso más corto de lo habitual, mi recomendación es recortar tiempo de este capítulo de determinantes.* (Esto ya sucedió en el curso 2022-23). Eso sí, no hay que olvidarse del ejercicio 3.1, en el que se define la traza de una matriz.

Capítulo 4. Valores y vectores propios. Mientras hablábamos de la asignatura en el grado, ya hemos comentado lo didáctico que es este tema. Tan solo una observación más: Los ejercicios tipo de diagonalización apenas requieren teoría. De hecho nosotros los vemos, como ejemplos, en las dos primeras secciones. Esta es parte de la magia de este capítulo. Aunque, por supuesto, los estudiantes de física no se quedarían contentos si después no viéramos el formalismo teórico que hay detrás.

4. Comentarios

Exámenes. La idea más importante que les transmito a mis alumnos acerca del examen es que no sigo ningún modelo. El examen del año anterior no tiene por qué parecerse al del año en curso. Es más, cuanto más distintos, mejor. El motivo es evitar que alguien se prepare la asignatura dejando de lado la teoría, y estudiando únicamente los exámenes de otros cursos.

La tendencia a no estudiar la teoría me parece uno de los problemas más graves a los que nos enfrentamos en el grado. Por ello les hago un pequeño regalo a los estudiantes de primero: Muchas veces alguna de las cuestiones del examen es simplemente *enunciar* una de las 25 definiciones o de los 4 teoremas que hay en los apuntes. (Esta es la razón por la que a cada teorema le he puesto un nombre). ¡Pero cuidado! A menudo prefiero poner, en lugar del enunciado tal cual, un cálculo sencillo que demuestre que se ha entendido. Y, por supuesto, de esta última forma también puedo preguntar el resto de la teoría, no solo las definiciones y los teoremas.

Demostraciones. ¿Hay que aprenderse las demostraciones de memoria? La respuesta es que en los exámenes puedo preguntar cualquier cosa que me parezca oportuna. Ahora bien, no soy muy aficionado a preguntar las demostraciones tal cual. Normalmente prefiero pensar un problema nuevo que se resuelva utilizando las técnicas de demostración vistas en clase. Pero nunca se sabe.

Mi recomendación es estudiar las demostraciones de la misma forma que los problemas. No tiene sentido aprenderse los 100 ejercicios que hay en los apuntes de memoria, para que luego resulte que en el examen me haya inventado otros nuevos. Lo que sí que tiene sentido es *trabajar* los ejercicios; y entenderlos. A este respecto creo que vale más comprender un problema bien, que leerse por encima media docena de soluciones. Todos estos mismos cálculos acerca de los ejercicios los podemos extrapolar a las demostraciones.

Matrículas de honor. Cuando preparo un examen, me gusta pensar algún problema un poco más difícil, para distinguir a los estudiantes que van a por sobresaliente o matrícula. Es con diferencia la parte del examen que más me cuesta elaborar, y reconozco que también es la que más disfruto. Lo mejor de todo es que siempre hay alumnos que son capaces de hacerlos. Por ejemplo, el problema 3 de la introducción lo resolvieron por completo 3 alumnos (de 116 que se presentaron al examen).

En general, el nivel de los alumnos es muy bueno, no solo los que sacan sobresaliente. Tampoco esperaba menos de estudiantes de física.

Completitud. A lo largo del semestre, podríamos marcarnos el objetivo de escribir en la pizarra, de manera explícita, las demostraciones de todas las propiedades enunciadas. Esta idea podría parecer tentadora a primera vista, sin embargo creo que se trataría de un error. Estoy de acuerdo en demostrar todos los contenidos; pero no porque sea necesario, sino porque es bonito, divertido, y motiva a los alumnos. Ahora bien, es importante entender que *hay que hacer ciertas demostraciones de cabeza; porque el ser humano no tiene otra alternativa.* En efecto, a quien (todavía) no pueda hacer la demostración mentalmente, el hecho de mostrársela escrita tampoco le va a ayudar, ya que se va a perder en la maraña de argumentos. Esta cuestión es especialmente importante en asignaturas de primer curso.

Un par de ejemplos concretos de esto: los apartados 2, 3, 4 de las notas 1.25; y la demostración de que $\mathrm{Hom}(V, W)$ cumple las ocho propiedades de espacio vectorial en las notas 2.22.

Demostraciones difíciles. Al hilo del punto anterior, quiero insistir en otra idea clave. De la misma forma que no es posible entender el concepto de teorema sin el de contraejemplo, también pienso que, para poder comprender del todo las demostraciones más sencillas, es necesario haber visto las más complicadas. Por ello, uno de los objetivos del primer capítulo es llegar cuanto antes al teorema 1.35 (teorema de la dimensión). Creo que tras haber visto esa demostración, y por supuesto haber hecho un montón de ejercicios, los alumnos comprenden mejor qué propiedades son triviales y cuáles no.

Entornos. Cada párrafo de los apuntes está envuelto en un entorno: definición, teorema, ejemplo, etcétera. En parte es una cuestión de estilo personal; pero creo que también resulta muy didáctico para los alumnos. El entorno escogido lleva implícita la importancia que en mi opinión tiene el resultado:

$$\text{teorema} \quad > \quad \text{proposición} \quad > \quad \text{propiedad} \quad > \quad \text{nota}$$

Como anécdota, recuerdo que un día al entrar en clase oí que una alumna le decía a sus compañeros, con cierta excitación, "¡hoy vamos a ver un teorema y dos corolarios!". Esta es la razón principal para haber denominado *teoremas* a los cuatro resultados más importantes del semestre: motivar a los alumnos.

Espacio dual. Lamento no tener tiempo de explicar el espacio dual en este primer semestre (más allá de dar la definición en la nota 2.23). Sería un muy adecuado capítulo quinto de los apuntes. De hecho durante el curso 2020-21, una de las ideas que tenía en la cabeza era incluir este tema, y abordarlo de forma distinta a los anteriores:

En lugar de explicar la teoría de la manera habitual, esta alternativa consistiría en preparar un esquema de los resultados, y dejar a los alumnos que completen las demostraciones.

Se trata solo de una idea, y es posible que tras ponerlo en práctica me diera cuenta de que el método no funciona. Pero me parece que puede ser un enfoque distinto e interesante para el final del semestre, cuando el grueso de la asignatura ya ha sido completado.

En cualquier caso, ya hemos visto que el calendario de Álgebra Lineal I en Unizar es muy apretado, y prefiero que los estudiantes entiendan y asimilen bien unos pocos conceptos, que enumerar por encima y sin profundizar un montón de resultados. Así que, lamentablemente, con tan pocas horas de clase, el espacio dual se queda fuera.

Espacio cociente. Considero que es mejor *no* explicar el espacio cociente en Álgebra Lineal I o en Álgebra Lineal II. El motivo es que la mayoría de alumnos no han asimilado todavía la noción de conjunto cociente; y el cociente de espacios vectoriales es un ejemplo muy poco pedagógico de esta construcción. En cuanto explicas que trabajar en el espacio cociente es lo mismo que hacerlo en un suplementario, los estudiantes se olvidan de toda la parafernalia teórica que hay detrás. Y hacen bien. Esto va totalmente en contra de mi idea de la didáctica, en la que teoría y ejercicios deben ser prácticamente indistinguibles.

En mi opinión, la aritmética modular, los cuerpos de fracciones, o (en cursos más avanzados) los grupos finitos son ejemplos mucho mejores para enseñar el conjunto cociente.

Precisamente suelo dedicar la clase de presentación de Álgebra Lineal II a repasar la construcción del cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$, a partir del anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$. También aprovecho para introducir el cuerpo de fracciones $\mathbb{F}(X)$ del anillo de polinomios $\mathbb{F}[X]$, ya que más adelante lo usamos para demostrar la existencia de los factores invariantes.

En Álgebra Lineal I hablamos brevemente del conjunto cociente en la sección 2.10 (equivalencia y semejanza de matrices) y en el teorema 2.58 (teorema del rango). Pero sin profundizar; simplemente queremos que a los estudiantes les vaya sonando el concepto.

Grupos y cuerpos. Quiero que los alumnos se estudien bien toda la teoría que vemos. De hecho las definiciones y los enunciados de los teoremas pueden ser, tal cual, pregunta de examen. Por ello he preferido omitir en los apuntes las definiciones de grupo y de cuerpo, ya que no son estrictamente necesarias.

Esto no quiere decir que no las mencione en clase de palabra. Además, en las propiedades 1.14 y los ejercicios 1.5, 1.7, 1.8 trabajamos las operaciones algebraicas. Finalmente, si da tiempo, el ejercicio 1.29 es la excusa perfecta para una pequeña introducción a los cuerpos.

Teoría de conjuntos. Como les suelo decir a mis alumnos; si fueran máquinas, el grado empezaría con una asignatura de teoría axiomática de conjuntos. Lamentablemente son personas, por lo que el álgebra lineal va primero.

Las matemáticas que desarrollamos en esta asignatura son completamente rigurosas, sin necesidad de recurrir a un formalismo abstracto.

Por otro lado, a lo largo del semestre iremos introduciendo poco a poco algunas nociones básicas de teoría de conjuntos, a medida que las vayamos necesitando. Por citar algunos ejemplos: conjunto vacío (nota 1.17.2); unión e intersección de conjuntos (propiedades 1.20); familia y conjunto (terminología 1.28); aplicación (repaso 2.1); imagen de una aplicación (definición 2.7.2); composición de aplicaciones (propiedad 2.13.1); permutación (observación 3.26).

En este sentido, los ejercicios 2.1, 2.2, y sobre todo el ejercicio 1.11, son ejemplos fundamentales que trabajamos con especial cuidado en clase de problemas.

Inducción. El principio de inducción lo explican nuestros compañeros de la asignatura Análisis Matemático. Por nuestra parte, creo que no debemos perder la oportunidad de trabajarlo en clase, para afianzarlo todavía más.

La propuesta estrella es el ejercicio 1.6 (todo el ejercicio, y especialmente el primer apartado). Simplemente hay que dejar que los alumnos hagan el caso $n = 5$. Si es necesario se les da alguna pista, pero muchos no la necesitarán. Una vez han calculado la solución, les pedimos el caso $n = 6$; y después el $n = 7$, etcétera. La respuesta pasa a ser inmediata. Acaban de hacer, sin ser conscientes, una inducción.

Según avance el semestre iremos poco a poco formalizando el concepto de inducción, principalmente en el capítulo 3 de determinantes, ya que uno de nuestros objetivos es aprender la notación propia de las matemáticas. La diferencia entre la inducción del teorema 1.35 y la de la proposición 4.26 es un claro ejemplo de esta progresión. Pero insisto en que la prioridad es que entiendan que una inducción no es más que una forma de pasar de un caso al siguiente.

Tensores. Evidentemente el primer semestre de primero de carrera no es el lugar adecuado para explicar el producto tensorial de espacios vectoriales. Y probablemente el segundo semestre tampoco. Lo que sí que podemos hacer es, con la propiedad 1.24 y el ejercicio 1.12, introducir la noción de propiedad universal, para que los alumnos vayan asimilando este concepto, que supone otro nivel más en la abstracción.

Entonces, ¿cuándo explicamos ciertos temas como los tensores, el espacio cociente, o las bases en dimensión infinita? ¿Hace falta un Álgebra Lineal III en cursos superiores? Bueno, no seré yo el que diga que no a incluir más álgebra en la carrera; pero en tal caso yo abogaría por otras asignaturas, como por ejemplo álgebra no conmutativa o curvas algebraicas.

Mi respuesta es que si un profesor de cursos superiores necesita uno de estos conceptos más avanzados para su materia, la solución es que dedique unas horas de clase a explicarlo. Lo digo sin ironía. Pienso que las áreas en las que dividimos las matemáticas son fronteras artificiales que resultan de utilidad para organizar la universidad, *y nada más.* Por otro lado, la posibilidad de que un mismo tema se repita en varias asignaturas, viéndose con distintos puntos de vista, me parece totalmente maravillosa.

Diapositivas. En mi opinión la pizarra es la mejor herramienta para enseñar matemáticas. Tu propia velocidad de escritura te obliga a llevar un ritmo lento, dando tiempo a los alumnos a asimilar los conceptos. Además, la experiencia resulta mucho más orgánica y divertida para todos, al haber un cierto punto de improvisación por parte del profesor.

Sin embargo, circunstancias como pandemias, enfermedades, o accidentes pueden hacer que en un momento dado no puedas hacer uso de la pizarra, y no te quede más remedio que tirar de diapositivas. No se trata de eventualidades improbables; todo esto nos ha pasado en el Área de Álgebra en los últimos años. Cuando llega una de estas situaciones, probablemente no tengas tiempo o capacidad de reacción. Por eso ahora he tomado conciencia de hasta qué punto puede ser importante tener preparadas de antemano unas diapositivas de la asignatura.

Esta es la razón por la que he colgado mis diapositivas de los apuntes en la web (`https://personal.unizar.es/rodrigo`).

Haciendo de la necesidad virtud, me doy cuenta de que las diapositivas también ofrecen algunas ventajas. Por ejemplo, la posibilidad de mostrar de forma instantánea cualquier parte de los apuntes. El principal problema de las diapositivas es que, aunque resulte paradójico, es mucho más difícil dar clase *bien* con diapositivas que con pizarra.

Primero de carrera. A la hora de preparar un proyecto docente para un concurso de méritos, hay que elegir una asignatura difícil e importante, para poder lucirse al máximo. Y eso es lo que he hecho.

Como profesor, las matemáticas de Álgebra Lineal I no me suponen un reto, al igual que tampoco me lo suponen las de cursos superiores.

La dificultad de impartir una asignatura está en ponerse en la piel de los alumnos, e intentar enseñarla de la forma más didáctica posible. Es decir, la complicación está en la docencia, y no en las matemáticas. En este sentido, de todas las materias que he llevado hasta ahora, la más difícil para mí ha sido Álgebra Lineal I, precisamente por ser del primer semestre de primero.

Además, las asignaturas de primero son las más importantes de cualquier grado. Es aquí donde se explican los fundamentos que se utilizarán en el resto de la carrera. Si no se hacen bien, resultará imposible que los alumnos entiendan las materias de cursos superiores.