

Álgebra Lineal I

Adrián Rodrigo Escudero

<https://personal.unizar.es/rodrigo>
Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza
rodrigo@unizar.es

15 de diciembre de 2023

- Estas diapositivas corresponden a la versión 2021-9-20 de mis apuntes de Álgebra Lineal I.
- Tanto dichos apuntes como estas diapositivas se pueden descargar desde la web:

`https://personal.unizar.es/rodrigo`

- Una **advertencia** para los alumnos: tenéis que trabajar los ejercicios. Hacer un ejercicio por tu cuenta es considerablemente más difícil que entender la solución cuando la explica el profesor.
- Esta obra está sujeta a la Licencia CC BY 4.0.

Capítulo 1. Espacios vectoriales

1.1. Método de Gauss

1.2. Espacios vectoriales

1.3. Subespacios

1.4. Conjuntos generadores

1.5. Dependencia lineal

1.6. Dimensión

1.7. Coordenadas

1.8. Suma directa I

1.9. Suma directa II

Ejercicios espacios vectoriales

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Capítulo 3. Determinantes

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

3.3. Propiedades de los determinantes

3.4. Matriz adjunta

3.5. Signatura

Ejercicios determinantes

Capítulo 4. Valores y vectores propios

4.1. Valores propios

4.2. Vectores propios

4.3. Polinomio característico

4.4. Subespacios fundamentales

4.5. Criterio de diagonalización

Capítulo 1. Espacios vectoriales

1.1. Método de Gauss

1.2. Espacios vectoriales

1.3. Subespacios

1.4. Conjuntos generadores

1.5. Dependencia lineal

1.6. Dimensión

1.7. Coordenadas

1.8. Suma directa I

1.9. Suma directa II

Ejercicios espacios vectoriales

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$-x + y = 6$$

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$-x + y = 6 \quad \implies$$

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$-x + y = 6 \quad \implies \quad y = 6 + x$$

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$-x + y = 6 \quad \implies \quad y = 6 + x \quad \implies$$

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$-x + y = 6 \quad \implies \quad y = 6 + x \quad \implies \quad 7 = 3x + 2y$$

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$-x + y = 6 \quad \implies \quad y = 6 + x \quad \implies \quad 7 = 3x + 2(6 + x)$$

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$-x + y = 6 \quad \implies \quad y = 6 + x \quad \implies \quad 7 = 3x + 2(6 + x) = 5x + 12$$

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$-x + y = 6 \quad \implies \quad y = 6 + x \quad \implies \quad 7 = 3x + 2(6 + x) = 5x + 12$$

\implies

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x + y = 6 &\implies y = 6 + x &\implies 7 = 3x + 2(6 + x) = 5x + 12 \\ &\implies x = -1 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x + y = 6 &\implies y = 6 + x &\implies 7 = 3x + 2(6 + x) = 5x + 12 \\ &\implies x = -1 &\implies \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$-x + y = 6 \quad \Longrightarrow \quad y = 6 + x \quad \Longrightarrow \quad 7 = 3x + 2(6 + x) = 5x + 12$$

$$\Longrightarrow \quad x = -1 \quad \Longrightarrow \quad y = 5$$

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$-x + y = 6 \quad \Longrightarrow \quad y = 6 + x \quad \Longrightarrow \quad 7 = 3x + 2(6 + x) = 5x + 12$$

$$\Longrightarrow \quad x = -1 \quad \Longrightarrow \quad y = 5$$

¿Hemos acabado?

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$-x + y = 6 \quad \implies \quad y = 6 + x \quad \implies \quad 7 = 3x + 2(6 + x) = 5x + 12$$

$$\implies \quad x = -1 \quad \implies \quad y = 5$$

¿Hemos acabado?

¿Qué pasaría si cambiamos $4x + 3y = 11$ por $4x + 3y = 10$?

Ejemplo 1.1.

1.1. Método de Gauss

Queremos resolver este **sistema de ecuaciones lineales**:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$-x + y = 6 \quad \implies \quad y = 6 + x \quad \implies \quad 7 = 3x + 2(6 + x) = 5x + 12$$

$$\implies \quad x = -1 \quad \implies \quad y = 5$$

¿Hemos acabado?

¿Qué pasaría si cambiamos $4x + 3y = 11$ por $4x + 3y = 10$?

Hay que sustituir la solución en el sistema para asegurar que es correcta.

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ -4z \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ -4z = -4 \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ -4z = -4 \end{cases}$$

Calculamos las incógnitas, de la última a la primera:

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ -4z = -4 \end{cases}$$

Calculamos las incógnitas, de la última a la primera:

$$z = 1$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ -4z = -4 \end{cases}$$

Calculamos las incógnitas, de la última a la primera:

$$z = 1 \qquad y = 2$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ -4z = -4 \end{cases}$$

Calculamos las incógnitas, de la última a la primera:

$$z = 1$$

$$y = 2$$

$$x = -1$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ -4z = -4 \end{cases}$$

Calculamos las incógnitas, de la última a la primera:

$$z = 1$$

$$y = 2$$

$$x = -1$$

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ -4z = -4 \end{cases}$$

Calculamos las incógnitas, de la última a la primera:

$$z = 1 \qquad y = 2 \qquad x = -1$$

Una única solución

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ -4z = -4 \end{cases}$$

Calculamos las incógnitas, de la última a la primera:

$$z = 1 \qquad y = 2 \qquad x = -1$$

Una única solución \implies

Ejemplo 1.2.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y - 2z = -4 \\ -4z = -4 \end{cases}$$

Calculamos las incógnitas, de la última a la primera:

$$z = 1 \qquad y = 2 \qquad x = -1$$

Una única solución \implies sistema **compatible determinado**

Propiedad 1.3 (Método de Gauss).

1.1. Método de Gauss

Propiedad 1.3 (Método de Gauss).

1.1. Método de Gauss

Si en un sistema de ecuaciones lineales realizamos

Propiedad 1.3 (Método de Gauss).

1.1. Método de Gauss

Si en un sistema de ecuaciones lineales realizamos cualquiera de las siguientes tres operaciones,

Propiedad 1.3 (Método de Gauss).

1.1. Método de Gauss

Si en un sistema de ecuaciones lineales realizamos cualquiera de las siguientes tres operaciones, entonces las soluciones del nuevo sistema siguen siendo las mismas.

Propiedad 1.3 (Método de Gauss).

1.1. Método de Gauss

Si en un sistema de ecuaciones lineales realizamos cualquiera de las siguientes tres operaciones, entonces las soluciones del nuevo sistema siguen siendo las mismas.

1. Multiplicar una fila por un escalar

Propiedad 1.3 (Método de Gauss).

1.1. Método de Gauss

Si en un sistema de ecuaciones lineales realizamos cualquiera de las siguientes tres operaciones, entonces las soluciones del nuevo sistema siguen siendo las mismas.

1. Multiplicar una fila por un escalar **no nulo**.

Propiedad 1.3 (Método de Gauss).

1.1. Método de Gauss

Si en un sistema de ecuaciones lineales realizamos cualquiera de las siguientes tres operaciones, entonces las soluciones del nuevo sistema siguen siendo las mismas.

1. Multiplicar una fila por un escalar **no nulo**.
2. Sumar a una fila otra fila.

Propiedad 1.3 (Método de Gauss).

1.1. Método de Gauss

Si en un sistema de ecuaciones lineales realizamos cualquiera de las siguientes tres operaciones, entonces las soluciones del nuevo sistema siguen siendo las mismas.

1. Multiplicar una fila por un escalar **no nulo**.
2. Sumar a una fila otra fila.
3. Intercambiar dos filas.

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

Por tanto el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

Por tanto el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son:

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

Por tanto el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son:

$$z = \lambda$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

Por tanto el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son:

$$z = \lambda \qquad y = 4\lambda$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

Por tanto el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son:

$$z = \lambda \qquad y = 4\lambda \qquad x = -5\lambda$$

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

Por tanto el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son:

$$z = \lambda \qquad y = 4\lambda \qquad x = -5\lambda$$

Como el sistema tiene más de una solución (una para cada valor de λ),

Ejemplo 1.4.

1.1. Método de Gauss

Por tanto el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son:

$$z = \lambda \qquad y = 4\lambda \qquad x = -5\lambda$$

Como el sistema tiene más de una solución (una para cada valor de λ), se dice que es **compatible indeterminado**.

Definiciones 1.5.

1.1. Método de Gauss

Definiciones 1.5.

1.1. Método de Gauss

1. En cada fila de una matriz dada, llamamos **pivote**

Definiciones 1.5.

1.1. Método de Gauss

1. En cada fila de una matriz dada, llamamos **pivote** al primer elemento no nulo empezando por la izquierda.

Definiciones 1.5.

1.1. Método de Gauss

1. En cada fila de una matriz dada, llamamos **pivote** al primer elemento no nulo empezando por la izquierda.
2. Se dice que una matriz está **escalonada por filas** si

Definiciones 1.5.

1.1. Método de Gauss

1. En cada fila de una matriz dada, llamamos **pivote** al primer elemento no nulo empezando por la izquierda.
2. Se dice que una matriz está **escalonada por filas** si el pivote de cada fila (excepto la fila primera)

Definiciones 1.5.

1.1. Método de Gauss

1. En cada fila de una matriz dada, llamamos **pivote** al primer elemento no nulo empezando por la izquierda.
2. Se dice que una matriz está **escalonada por filas** si el pivote de cada fila (excepto la fila primera) está más a la derecha que el pivote de la fila anterior,

Definiciones 1.5.

1.1. Método de Gauss

1. En cada fila de una matriz dada, llamamos **pivote** al primer elemento no nulo empezando por la izquierda.
2. Se dice que una matriz está **escalonada por filas** si el pivote de cada fila (excepto la fila primera) está más a la derecha que el pivote de la fila anterior, y todas las filas nulas están abajo.

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases}$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-2 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array} \right)$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right)$$

$$a = 3$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right)$$

$$a = 3$$

$$z = \lambda$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right)$$

$$a = 3$$

$$z = \lambda$$

$$y = \frac{1}{4}\lambda$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right)$$

$$a = 3$$

$$z = \lambda$$

$$y = \frac{1}{4}\lambda$$

$$x = -\frac{1}{2}\lambda + 1$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right)$$

$$a = 3$$

$$z = \lambda$$

$$y = \frac{1}{4}\lambda$$

$$x = -\frac{1}{2}\lambda + 1$$

$$a \neq 3$$

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right)$$

$$a = 3$$

$$z = \lambda$$

$$y = \frac{1}{4}\lambda$$

$$x = -\frac{1}{2}\lambda + 1$$

$$a \neq 3$$

no hay soluciones

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right)$$

$$a = 3$$

$$z = \lambda$$

$$y = \frac{1}{4}\lambda$$

$$x = -\frac{1}{2}\lambda + 1$$

$$a \neq 3$$

no hay soluciones \implies

Ejemplo 1.6.

1.1. Método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x & + z = 2 \\ 3x + 2y + z & = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array} \right)$$

$$a = 3$$

$$z = \lambda$$

$$y = \frac{1}{4}\lambda$$

$$x = -\frac{1}{2}\lambda + 1$$

$$a \neq 3$$

no hay soluciones

\implies

sistema incompatible

Ejercicios 1.7.

1.1. Método de Gauss

- 1.1
- 1.2
- 1.3
- 1.4

Capítulo 1. Espacios vectoriales

1.1. Método de Gauss

1.2. Espacios vectoriales

1.3. Subespacios

1.4. Conjuntos generadores

1.5. Dependencia lineal

1.6. Dimensión

1.7. Coordenadas

1.8. Suma directa I

1.9. Suma directa II

Ejercicios espacios vectoriales

Notación 1.8.

1.2. Espacios vectoriales

Notación 1.8.

1.2. Espacios vectoriales

En esta asignatura,
la letra \mathbb{F} denotará siempre a uno de los tres siguientes **cueros**:

Notación 1.8.

1.2. Espacios vectoriales

En esta asignatura,
la letra \mathbb{F} denotará siempre a uno de los tres siguientes **cueros**:

- Los números racionales \mathbb{Q} .

Notación 1.8.

1.2. Espacios vectoriales

En esta asignatura,
la letra \mathbb{F} denotará siempre a uno de los tres siguientes **cueros**:

- Los números racionales \mathbb{Q} .
- Los números reales \mathbb{R} .

Notación 1.8.

1.2. Espacios vectoriales

En esta asignatura,
la letra \mathbb{F} denotará siempre a uno de los tres siguientes **cueros**:

- Los números racionales \mathbb{Q} .
- Los números reales \mathbb{R} .
- Los números complejos \mathbb{C} .

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial**

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F}

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$V \times V$$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$V \times V \longrightarrow$$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$V \times V \longrightarrow V$$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) & \end{aligned}$$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto \end{aligned}$$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$\begin{aligned}V \times V &\longrightarrow V \\(u, v) &\longmapsto u + v\end{aligned}$$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$\begin{aligned}V \times V &\longrightarrow V \\(u, v) &\longmapsto u + v\end{aligned}$$

y una operación externa

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$\begin{aligned}V \times V &\longrightarrow V \\(u, v) &\longmapsto u + v\end{aligned}$$

y una operación externa

$$\mathbb{F} \times V$$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$\begin{aligned}V \times V &\longrightarrow V \\(u, v) &\longmapsto u + v\end{aligned}$$

y una operación externa

$$\mathbb{F} \times V \longrightarrow$$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$\begin{aligned}V \times V &\longrightarrow V \\(u, v) &\longmapsto u + v\end{aligned}$$

y una operación externa

$$\mathbb{F} \times V \longrightarrow V$$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$\begin{aligned}V \times V &\longrightarrow V \\(u, v) &\longmapsto u + v\end{aligned}$$

y una operación externa

$$\begin{aligned}\mathbb{F} \times V &\longrightarrow V \\(\lambda, v) &\end{aligned}$$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$\begin{aligned}V \times V &\longrightarrow V \\(u, v) &\longmapsto u + v\end{aligned}$$

y una operación externa

$$\begin{aligned}\mathbb{F} \times V &\longrightarrow V \\(\lambda, v) &\longmapsto\end{aligned}$$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$\begin{aligned}V \times V &\longrightarrow V \\(u, v) &\longmapsto u + v\end{aligned}$$

y una operación externa

$$\begin{aligned}\mathbb{F} \times V &\longrightarrow V \\(\lambda, v) &\longmapsto \lambda v\end{aligned}$$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$\begin{aligned}V \times V &\longrightarrow V \\(u, v) &\longmapsto u + v\end{aligned}$$

y una operación externa

$$\begin{aligned}\mathbb{F} \times V &\longrightarrow V \\(\lambda, v) &\longmapsto \lambda v\end{aligned}$$

que satisfacen las siguientes ocho propiedades:

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad:

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad:

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro:

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto:

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.

5. Distributividad:

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.

5. Distributividad: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.
5. Distributividad: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$.

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.
5. Distributividad: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$.
6. Distributividad:

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.
5. Distributividad: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$.
6. Distributividad: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.
5. Distributividad: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$.
6. Distributividad: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $v \in V$.

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.
5. Distributividad: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$.
6. Distributividad: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $v \in V$.
7. Asociatividad:

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.
5. Distributividad: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$.
6. Distributividad: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $v \in V$.
7. Asociatividad: $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.
5. Distributividad: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$.
6. Distributividad: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $v \in V$.
7. Asociatividad: $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $v \in V$.

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.
5. Distributividad: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$.
6. Distributividad: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $v \in V$.
7. Asociatividad: $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $v \in V$.
8. Para todo $v \in V$

Definición 1.9.

1.2. Espacios vectoriales

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.
5. Distributividad: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$.
6. Distributividad: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $v \in V$.
7. Asociatividad: $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $v \in V$.
8. Para todo $v \in V$ se cumple que $1 \cdot v = v$.

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Suma

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Suma

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Suma

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Suma

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Suma

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Suma

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Producto por escalares

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3 $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Suma $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Producto por escalares $2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Suma

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Producto por escalares

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3 $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Suma $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Producto por escalares $2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$ $(-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Conjunto \mathbb{R}^3 $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Suma $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Producto por escalares $2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$ $(-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Dado un número entero n mayor o igual que 1,

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Dado un número entero n mayor o igual que 1,
 \mathbb{F}^n es el conjunto de las n -tuplas con coeficientes en \mathbb{F} :

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Dado un número entero n mayor o igual que 1,
 \mathbb{F}^n es el conjunto de las n -tuplas con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}^n = \left\{ \quad \quad \quad \right\}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Dado un número entero n mayor o igual que 1,
 \mathbb{F}^n es el conjunto de las n -tuplas con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Dado un número entero n mayor o igual que 1,
 \mathbb{F}^n es el conjunto de las n -tuplas con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \right\}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Dado un número entero n mayor o igual que 1,
 \mathbb{F}^n es el conjunto de las n -tuplas con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F} \right\}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Dado un número entero n mayor o igual que 1,
 \mathbb{F}^n es el conjunto de las n -tuplas con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F} \right\}$$

En esta asignatura escribimos los elementos de \mathbb{F}^n siempre en columnas o,

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

Dado un número entero n mayor o igual que 1, \mathbb{F}^n es el conjunto de las n -tuplas con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F} \right\}$$

En esta asignatura escribimos los elementos de \mathbb{F}^n siempre en columnas o, lo que es lo mismo, como vectores fila traspuestos.

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

\mathbb{F}^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{F}

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

\mathbb{F}^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{F} con la suma y producto siguientes:

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

\mathbb{F}^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{F} con la suma y producto siguientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

\mathbb{F}^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{F} con la suma y producto siguientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

\mathbb{F}^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{F} con la suma y producto siguientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

\mathbb{F}^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{F} con la suma y producto siguientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

\mathbb{F}^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{F} con la suma y producto siguientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

- El vector neutro es

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

\mathbb{F}^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{F} con la suma y producto siguientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

- El vector neutro es $(0, \dots, 0)^T$.

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

\mathbb{F}^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{F} con la suma y producto siguientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

- El vector neutro es $(0, \dots, 0)^T$.
- Dado un vector $(x_1, \dots, x_n)^T$, su vector opuesto es

Ejemplo 1.10.

1.2. Espacios vectoriales

\mathbb{F}^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{F} con la suma y producto siguientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

- El vector neutro es $(0, \dots, 0)^T$.
- Dado un vector $(x_1, \dots, x_n)^T$, su vector opuesto es $(-x_1, \dots, -x_n)^T$.

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

1. En las propiedades del vector neutro y el vector opuesto

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

1. En las propiedades del vector neutro y el vector opuesto el orden de los cuantificadores ('existe' y 'para todo') es fundamental.

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

1. En las propiedades del vector neutro y el vector opuesto el orden de los cuantificadores ('existe' y 'para todo') es fundamental.
 - En un espacio vectorial hay un vector neutro:

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

1. En las propiedades del vector neutro y el vector opuesto el orden de los cuantificadores ('existe' y 'para todo') es fundamental.
 - En un espacio vectorial hay un vector neutro:

Existe $\vec{0} \in V$

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

1. En las propiedades del vector neutro y el vector opuesto el orden de los cuantificadores ('existe' y 'para todo') es fundamental.
 - En un espacio vectorial hay un vector neutro:

Existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

1. En las propiedades del vector neutro y el vector opuesto el orden de los cuantificadores ('existe' y 'para todo') es fundamental.
 - En un espacio vectorial hay un vector neutro:

Existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

1. En las propiedades del vector neutro y el vector opuesto el orden de los cuantificadores ('existe' y 'para todo') es fundamental.

- En un espacio vectorial hay un vector neutro:

Existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.

- Mientras que cada vector tiene un vector opuesto:

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

1. En las propiedades del vector neutro y el vector opuesto el orden de los cuantificadores ('existe' y 'para todo') es fundamental.

- En un espacio vectorial hay un vector neutro:

Existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.

- Mientras que cada vector tiene un vector opuesto:

Para todo $v \in V$

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

1. En las propiedades del vector neutro y el vector opuesto el orden de los cuantificadores ('existe' y 'para todo') es fundamental.

- En un espacio vectorial hay un vector neutro:

Existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.

- Mientras que cada vector tiene un vector opuesto:

Para todo $v \in V$ existe $-v \in V$

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

1. En las propiedades del vector neutro y el vector opuesto el orden de los cuantificadores ('existe' y 'para todo') es fundamental.

- En un espacio vectorial hay un vector neutro:

Existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.

- Mientras que cada vector tiene un vector opuesto:

Para todo $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

2. La propiedad del vector neutro implica que

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

2. La propiedad del vector neutro implica que todo espacio vectorial tiene al menos un vector,

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

2. La propiedad del vector neutro implica que todo espacio vectorial tiene al menos un vector, el vector neutro $\bar{0}$.

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

2. La propiedad del vector neutro implica que todo espacio vectorial tiene al menos un vector, el vector neutro $\bar{0}$.

De hecho $V = \{\bar{0}\}$ es el espacio vectorial más pequeño posible.

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

3. La asociatividad de la suma y la asociatividad del producto por escalares nos ahorra escribir muchos paréntesis.

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

3. La asociatividad de la suma y la asociatividad del producto por escalares nos ahorra escribir muchos paréntesis.

Por ejemplo escribimos $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ en lugar de escribir cualquiera de las expresiones equivalentes siguientes:

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

3. La asociatividad de la suma y la asociatividad del producto por escalares nos ahorra escribir muchos paréntesis.

Por ejemplo escribimos $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ en lugar de escribir cualquiera de las expresiones equivalentes siguientes:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

3. La asociatividad de la suma y la asociatividad del producto por escalares nos ahorra escribir muchos paréntesis.

Por ejemplo escribimos $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ en lugar de escribir cualquiera de las expresiones equivalentes siguientes:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4)$$

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

3. La asociatividad de la suma y la asociatividad del producto por escalares nos ahorra escribir muchos paréntesis.

Por ejemplo escribimos $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ en lugar de escribir cualquiera de las expresiones equivalentes siguientes:

$$\begin{aligned}v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) \\ &= v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4))\end{aligned}$$

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

3. La asociatividad de la suma y la asociatividad del producto por escalares nos ahorra escribir muchos paréntesis.

Por ejemplo escribimos $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ en lugar de escribir cualquiera de las expresiones equivalentes siguientes:

$$\begin{aligned}v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) \\ &= v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) = v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4)\end{aligned}$$

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

3. La asociatividad de la suma y la asociatividad del producto por escalares nos ahorra escribir muchos paréntesis.

Por ejemplo escribimos $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ en lugar de escribir cualquiera de las expresiones equivalentes siguientes:

$$\begin{aligned}v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) \\ &= v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) = v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \\ &= ((v_1 + v_2) + v_3) + v_4\end{aligned}$$

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

3. La asociatividad de la suma y la asociatividad del producto por escalares nos ahorra escribir muchos paréntesis.

Por ejemplo escribimos $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ en lugar de escribir cualquiera de las expresiones equivalentes siguientes:

$$\begin{aligned}v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) \\ &= v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) = v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \\ &= ((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 = (v_1 + (v_2 + v_3)) + v_4\end{aligned}$$

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

3. La asociatividad de la suma y la asociatividad del producto por escalares nos ahorra escribir muchos paréntesis.

Por ejemplo escribimos $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ en lugar de escribir cualquiera de las expresiones equivalentes siguientes:

$$\begin{aligned}v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) \\ &= v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) = v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \\ &= ((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 = (v_1 + (v_2 + v_3)) + v_4\end{aligned}$$

Demostración.

Notas 1.11.

1.2. Espacios vectoriales

3. La asociatividad de la suma y la asociatividad del producto por escalares nos ahorra escribir muchos paréntesis.

Por ejemplo escribimos $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ en lugar de escribir cualquiera de las expresiones equivalentes siguientes:

$$\begin{aligned}v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) \\ &= v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) = v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \\ &= ((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 = (v_1 + (v_2 + v_3)) + v_4\end{aligned}$$

Demostración.

Ejercicio 1.6.



Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

1. Fijados dos enteros m, n mayores o iguales que 1,

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

1. Fijados dos enteros m, n mayores o iguales que 1, el conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{F})$,

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

1. Fijados dos enteros m, n mayores o iguales que 1,
el conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{F})$,
formado por las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en \mathbb{F} ,

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

1. Fijados dos enteros m, n mayores o iguales que 1,

el conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{F})$,

formado por las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en \mathbb{F} ,
es un \mathbb{F} -espacio vect. con la suma y producto por escalares habituales.

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

1. Fijados dos enteros m, n mayores o iguales que 1,

el conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{F})$,

formado por las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en \mathbb{F} ,
es un \mathbb{F} -espacio vect. con la suma y producto por escalares habituales.

Por ejemplo en el caso 3×2 estas operaciones vienen dadas por:

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

1. Fijados dos enteros m, n mayores o iguales que 1,

el conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{F})$,

formado por las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en \mathbb{F} ,
es un \mathbb{F} -espacio vect. con la suma y producto por escalares habituales.

Por ejemplo en el caso 3×2 estas operaciones vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

1. Fijados dos enteros m, n mayores o iguales que 1,

el conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{F})$,

formado por las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en \mathbb{F} ,
es un \mathbb{F} -espacio vect. con la suma y producto por escalares habituales.

Por ejemplo en el caso 3×2 estas operaciones vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

1. Fijados dos enteros m, n mayores o iguales que 1,

el conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{F})$,

formado por las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en \mathbb{F} ,
es un \mathbb{F} -espacio vect. con la suma y producto por escalares habituales.

Por ejemplo en el caso 3×2 estas operaciones vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

1. Fijados dos enteros m, n mayores o iguales que 1,

el conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{F})$,

formado por las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en \mathbb{F} ,
es un \mathbb{F} -espacio vect. con la suma y producto por escalares habituales.

Por ejemplo en el caso 3×2 estas operaciones vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} \end{pmatrix}$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$,

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{F} :

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}_n[X] = \{$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n\}$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

Dados $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$,

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

Dados $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$,
 $g(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$,

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

Dados $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$,
 $g(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$, y $\lambda \in \mathbb{F}$,

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

Dados $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$,
 $g(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$, y $\lambda \in \mathbb{F}$,
la suma y el producto vienen dados por:

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

Dados $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$,
 $g(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$, y $\lambda \in \mathbb{F}$,
la suma y el producto vienen dados por:

$$f(X) + g(X) =$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

Dados $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$,
 $g(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$, y $\lambda \in \mathbb{F}$,
la suma y el producto vienen dados por:

$$f(X) + g(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

Dados $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$,
 $g(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$, y $\lambda \in \mathbb{F}$,
la suma y el producto vienen dados por:

$$f(X) + g(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n$$

$$\lambda \cdot f(X) =$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

Dados $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$,
 $g(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$, y $\lambda \in \mathbb{F}$,
la suma y el producto vienen dados por:

$$f(X) + g(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n$$

$$\lambda \cdot f(X) = \lambda a_0 + \lambda a_1X + \cdots + \lambda a_nX^n$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

3. El conjunto de los polinomios de cualquier grado (pero grado finito) con coeficientes en \mathbb{F} :

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

3. El conjunto de los polinomios de cualquier grado (pero grado finito) con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}[X]$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

3. El conjunto de los polinomios de cualquier grado (pero grado finito) con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}[X] = \bigcup_{n=1}^{\infty}$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

3. El conjunto de los polinomios de cualquier grado (pero grado finito) con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}[X] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n[X]$$

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

3. El conjunto de los polinomios de cualquier grado (pero grado finito) con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}[X] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n[X]$$

4. Hemos visto que \mathbb{R}^3 es un \mathbb{R} -espacio vectorial,

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

3. El conjunto de los polinomios de cualquier grado (pero grado finito) con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}[X] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n[X]$$

4. Hemos visto que \mathbb{R}^3 es un \mathbb{R} -espacio vectorial, pero también podemos verlo como un \mathbb{Q} -espacio vectorial

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

3. El conjunto de los polinomios de cualquier grado (pero grado finito) con coeficientes en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}[X] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n[X]$$

4. Hemos visto que \mathbb{R}^3 es un \mathbb{R} -espacio vectorial, pero también podemos verlo como un \mathbb{Q} -espacio vectorial al restringir el producto de escalares a los números racionales.

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

5. El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$,

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

5. El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$,
formado por las aplicaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

5. El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$,
formado por las aplicaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

Dados $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

5. El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$,
formado por las aplicaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

Dados $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

- La aplicación suma $f + g$ es aquella que

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

5. El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$,
formado por las aplicaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

Dados $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

- La aplicación suma $f + g$ es aquella que a cada número $x \in \mathbb{R}$ le asocia el número $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

5. El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$,
formado por las aplicaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

Dados $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

- La aplicación suma $f + g$ es aquella que a cada número $x \in \mathbb{R}$ le asocia el número $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$.
- Mientras que la aplicación $\lambda \cdot f$ es aquella que

Ejemplos 1.12.

1.2. Espacios vectoriales

5. El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$,
formado por las aplicaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

Dados $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

- La aplicación suma $f + g$ es aquella que a cada número $x \in \mathbb{R}$ le asocia el número $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$.
- Mientras que la aplicación $\lambda \cdot f$ es aquella que a cada número $x \in \mathbb{R}$ le asocia el número $\lambda f(x) \in \mathbb{R}$.

Ejercicios 1.13.

1.2. Espacios vectoriales

- 1.5
- 1.6
- 1.7

Capítulo 1. Espacios vectoriales

1.1. Método de Gauss

1.2. Espacios vectoriales

1.3. Subespacios

1.4. Conjuntos generadores

1.5. Dependencia lineal

1.6. Dimensión

1.7. Coordenadas

1.8. Suma directa I

1.9. Suma directa II

Ejercicios espacios vectoriales

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial, entonces:

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial, entonces:

1. El vector neutro es único.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial, entonces:

1. El vector neutro es único.

Demostración.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial, entonces:

1. El vector neutro es único.

Demostración.

Sea $\bar{0}'$ un vector que cumple la misma propiedad que el neutro,

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial, entonces:

1. El vector neutro es único.

Demostración.

Sea $\bar{0}'$ un vector que cumple la misma propiedad que el neutro, $\bar{0}' + v = v$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial, entonces:

1. El vector neutro es único.

Demostración.

Sea $\bar{0}'$ un vector que cumple la misma propiedad que el neutro, $\bar{0}' + v = v$ para todo $v \in V$.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial, entonces:

1. El vector neutro es único.

Demostración.

Sea $\bar{0}'$ un vector que cumple la misma propiedad que el neutro, $\bar{0}' + v = v$ para todo $v \in V$.

$$\bar{0}' + \bar{0}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial, entonces:

1. El vector neutro es único.

Demostración.

Sea $\bar{0}'$ un vector que cumple la misma propiedad que el neutro, $\bar{0}' + v = v$ para todo $v \in V$.

$$\underline{\underline{\bar{0} \text{ es neutro}}} \quad \bar{0}' + \bar{0}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial, entonces:

1. El vector neutro es único.

Demostración.

Sea $\bar{0}'$ un vector que cumple la misma propiedad que el neutro, $\bar{0}' + v = v$ para todo $v \in V$.

$$\bar{0}' \xrightarrow{\bar{0} \text{ es neutro}} \bar{0}' + \bar{0}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial, entonces:

1. El vector neutro es único.

Demostración.

Sea $\bar{0}'$ un vector que cumple la misma propiedad que el neutro, $\bar{0}' + v = v$ para todo $v \in V$.

$$\bar{0}' \xrightarrow{\bar{0} \text{ es neutro}} \bar{0}' + \bar{0} \xrightarrow{\bar{0}' \text{ es neutro}}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial, entonces:

1. El vector neutro es único.

Demostración.

Sea $\bar{0}'$ un vector que cumple la misma propiedad que el neutro, $\bar{0}' + v = v$ para todo $v \in V$.

$$\bar{0}' \stackrel{\bar{0} \text{ es neutro}}{=} \bar{0}' + \bar{0} \stackrel{\bar{0}' \text{ es neutro}}{=} \bar{0}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial, entonces:

1. El vector neutro es único.

Demostración.

Sea $\bar{0}'$ un vector que cumple la misma propiedad que el neutro, $\bar{0}' + v = v$ para todo $v \in V$.

$$\bar{0}' \xrightarrow{\bar{0} \text{ es neutro}} \bar{0}' + \bar{0} \xrightarrow{\bar{0}' \text{ es neutro}} \bar{0}$$



Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial, entonces:

1. El vector neutro es único.

Demostración.

Sea $\bar{0}'$ un vector que cumple la misma propiedad que el neutro, $\bar{0}' + v = v$ para todo $v \in V$.

$$\bar{0}' \stackrel{\bar{0} \text{ es neutro}}{=} \bar{0}' + \bar{0} \stackrel{\bar{0}' \text{ es neutro}}{=} \bar{0}$$



Esto justifica que denotemos $\bar{0}$ al vector neutro.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

2. El vector opuesto de cualquier vector es único.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

2. El vector opuesto de cualquier vector es único.

Demostración.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

2. El vector opuesto de cualquier vector es único.

Demostración.

Fijamos un vector v .

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

2. El vector opuesto de cualquier vector es único.

Demostración.

Fijamos un vector v . Sean u, w opuestos de v .

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

2. El vector opuesto de cualquier vector es único.

Demostración.

Fijamos un vector v . Sean u, w opuestos de v .

u

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

2. El vector opuesto de cualquier vector es único.

Demostración.

Fijamos un vector v . Sean u, w opuestos de v .

$$u = u + \bar{0}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

2. El vector opuesto de cualquier vector es único.

Demostración.

Fijamos un vector v . Sean u, w opuestos de v .

$$u = u + \bar{0} = u + (w + v)$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

2. El vector opuesto de cualquier vector es único.

Demostración.

Fijamos un vector v . Sean u, w opuestos de v .

$$u = u + \bar{0} = u + (w + v) = w + (u + v)$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

2. El vector opuesto de cualquier vector es único.

Demostración.

Fijamos un vector v . Sean u, w opuestos de v .

$$u = u + \bar{0} = u + (w + v) = w + (u + v) = w + \bar{0}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

2. El vector opuesto de cualquier vector es único.

Demostración.

Fijamos un vector v . Sean u, w opuestos de v .

$$u = u + \bar{0} = u + (w + v) = w + (u + v) = w + \bar{0} = w$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

2. El vector opuesto de cualquier vector es único.

Demostración.

Fijamos un vector v . Sean u, w opuestos de v .

$$u = u + \bar{0} = u + (w + v) = w + (u + v) = w + \bar{0} = w$$



Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

2. El vector opuesto de cualquier vector es único.

Demostración.

Fijamos un vector v . Sean u, w opuestos de v .

$$u = u + \bar{0} = u + (w + v) = w + (u + v) = w + \bar{0} = w$$



Esto justifica que denotemos $-v$ al opuesto de v .

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Demostración.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Demostración.

$$\lambda \cdot \bar{0}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Demostración.

$$\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0})$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Demostración.

$$\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Demostración.

$$\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$$

Sumamos a ambos lados el opuesto de $\lambda \cdot \bar{0}$:

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Demostración.

$$\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$$

Sumamos a ambos lados el opuesto de $\lambda \cdot \bar{0}$:

$$\begin{array}{c} (\lambda \cdot \bar{0}) \\ \parallel \\ (\lambda \cdot \bar{0}) + (\lambda \cdot \bar{0}) \end{array}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Demostración.

$$\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$$

Sumamos a ambos lados el opuesto de $\lambda \cdot \bar{0}$:

$$\begin{aligned} & (\lambda \cdot \bar{0}) + (-(\lambda \cdot \bar{0})) \\ & \quad \parallel \\ & (\lambda \cdot \bar{0}) + (\lambda \cdot \bar{0}) \end{aligned}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Demostración.

$$\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$$

Sumamos a ambos lados el opuesto de $\lambda \cdot \bar{0}$:

$$\begin{aligned} & (\lambda \cdot \bar{0}) + (-(\lambda \cdot \bar{0})) \\ & \quad \parallel \\ & (\lambda \cdot \bar{0}) + (\lambda \cdot \bar{0}) + (-(\lambda \cdot \bar{0})) \end{aligned}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Demostración.

$$\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$$

Sumamos a ambos lados el opuesto de $\lambda \cdot \bar{0}$:

$$(\lambda \cdot \bar{0}) + (-(\lambda \cdot \bar{0})) = \bar{0}$$

||

$$(\lambda \cdot \bar{0}) + (\lambda \cdot \bar{0}) + (-(\lambda \cdot \bar{0}))$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Demostración.

$$\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$$

Sumamos a ambos lados el opuesto de $\lambda \cdot \bar{0}$:

$$(\lambda \cdot \bar{0}) + (-(\lambda \cdot \bar{0})) = \bar{0}$$

||

$$(\lambda \cdot \bar{0}) + (\lambda \cdot \bar{0}) + (-(\lambda \cdot \bar{0})) = (\lambda \cdot \bar{0}) + \bar{0}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Demostración.

$$\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$$

Sumamos a ambos lados el opuesto de $\lambda \cdot \bar{0}$:

$$(\lambda \cdot \bar{0}) + (-(\lambda \cdot \bar{0})) = \bar{0}$$

||

$$(\lambda \cdot \bar{0}) + (\lambda \cdot \bar{0}) + (-(\lambda \cdot \bar{0})) = (\lambda \cdot \bar{0}) + \bar{0} = (\lambda \cdot \bar{0})$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

3. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Demostración.

$$\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$$

Sumamos a ambos lados el opuesto de $\lambda \cdot \bar{0}$:

$$(\lambda \cdot \bar{0}) + (-(\lambda \cdot \bar{0})) = \bar{0}$$

||

$$(\lambda \cdot \bar{0}) + (\lambda \cdot \bar{0}) + (-(\lambda \cdot \bar{0})) = (\lambda \cdot \bar{0}) + \bar{0} = (\lambda \cdot \bar{0})$$



Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

4. Para todo vector $v \in V$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

4. Para todo vector $v \in V$ se cumple que $0 \cdot v = \bar{0}$.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

4. Para todo vector $v \in V$ se cumple que $0 \cdot v = \bar{0}$.

Demostración.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

4. Para todo vector $v \in V$ se cumple que $0 \cdot v = \bar{0}$.

Demostración.

Análoga al apartado anterior. □

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

5. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

5. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tales que $\lambda \cdot v = \bar{0}$,

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

5. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tales que $\lambda \cdot v = \bar{0}$,
entonces o bien $\lambda = 0$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

5. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tales que $\lambda \cdot v = \bar{0}$, entonces o bien $\lambda = 0$ o bien $v = \bar{0}$.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

5. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tales que $\lambda \cdot v = \bar{0}$, entonces o bien $\lambda = 0$ o bien $v = \bar{0}$.

Demostración.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

5. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tales que $\lambda \cdot v = \bar{0}$,
entonces o bien $\lambda = 0$ o bien $v = \bar{0}$.

Demostración.

Si $\lambda \neq 0$, entonces:

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

5. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tales que $\lambda \cdot v = \bar{0}$, entonces o bien $\lambda = 0$ o bien $v = \bar{0}$.

Demostración.

Si $\lambda \neq 0$, entonces:

$$\bar{0}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

5. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tales que $\lambda \cdot v = \bar{0}$,
entonces o bien $\lambda = 0$ o bien $v = \bar{0}$.

Demostración.

Si $\lambda \neq 0$, entonces:

$$\bar{0} = \lambda^{-1} \cdot \bar{0}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

5. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tales que $\lambda \cdot v = \bar{0}$,
entonces o bien $\lambda = 0$ o bien $v = \bar{0}$.

Demostración.

Si $\lambda \neq 0$, entonces:

$$\bar{0} = \lambda^{-1} \cdot \bar{0} = \lambda^{-1}(\lambda v)$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

5. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tales que $\lambda \cdot v = \bar{0}$, entonces o bien $\lambda = 0$ o bien $v = \bar{0}$.

Demostración.

Si $\lambda \neq 0$, entonces:

$$\bar{0} = \lambda^{-1} \cdot \bar{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

5. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tales que $\lambda \cdot v = \bar{0}$,
entonces o bien $\lambda = 0$ o bien $v = \bar{0}$.

Demostración.

Si $\lambda \neq 0$, entonces:

$$\bar{0} = \lambda^{-1} \cdot \bar{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1 \cdot v$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

5. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tales que $\lambda \cdot v = \bar{0}$, entonces o bien $\lambda = 0$ o bien $v = \bar{0}$.

Demostración.

Si $\lambda \neq 0$, entonces:

$$\bar{0} = \lambda^{-1} \cdot \bar{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1 \cdot v = v$$



Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

$$(-\lambda)v = -(\lambda v)$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) \iff$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) \iff \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [(-\lambda)v]$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

Como el vector opuesto es único, basta comprobar que:

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) \iff \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [(-\lambda)v]$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

Como el vector opuesto es único, basta comprobar que:

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) \iff \vec{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [(-\lambda)v] = [\lambda + (-\lambda)]v$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

Como el vector opuesto es único, basta comprobar que:

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) \iff \vec{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [(-\lambda)v] = [\lambda + (-\lambda)]v = 0v$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

Como el vector opuesto es único, basta comprobar que:

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) \iff \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [(-\lambda)v] = [\lambda + (-\lambda)]v = 0v = \bar{0}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

Como el vector opuesto es único, basta comprobar que:

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) \iff \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [(-\lambda)v] = [\lambda + (-\lambda)]v = 0v = \bar{0}$$

$$\lambda(-v) = -(\lambda v)$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

Como el vector opuesto es único, basta comprobar que:

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) \iff \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [(-\lambda)v] = [\lambda + (-\lambda)]v = 0v = \bar{0}$$

$$\lambda(-v) = -(\lambda v) \iff$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

Como el vector opuesto es único, basta comprobar que:

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) \iff \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [(-\lambda)v] = [\lambda + (-\lambda)]v = 0v = \bar{0}$$

$$\lambda(-v) = -(\lambda v) \iff \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [\lambda(-v)]$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

Como el vector opuesto es único, basta comprobar que:

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) \iff \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [(-\lambda)v] = [\lambda + (-\lambda)]v = 0v = \bar{0}$$

$$\lambda(-v) = -(\lambda v) \iff \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [\lambda(-v)] = \lambda[v + (-v)]$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

Como el vector opuesto es único, basta comprobar que:

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) \iff \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [(-\lambda)v] = [\lambda + (-\lambda)]v = 0v = \bar{0}$$

$$\lambda(-v) = -(\lambda v) \iff \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [\lambda(-v)] = \lambda[v + (-v)] = \lambda\bar{0}$$

Propiedades 1.14.

1.3. Subespacios

6. Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que:

$$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$$

Demostración.

Como el vector opuesto es único, basta comprobar que:

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) \iff \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [(-\lambda)v] = [\lambda + (-\lambda)]v = 0v = \bar{0}$$

$$\lambda(-v) = -(\lambda v) \iff \bar{0} \stackrel{?}{=} \lambda v + [\lambda(-v)] = \lambda[v + (-v)] = \lambda\bar{0} = \bar{0}$$



Truco 1.15.

1.3. Subespacios

Truco 1.15.

1.3. Subespacios

Más adelante veremos que
todo espacio vectorial (de dimensión finita) V es (isomorfo a) \mathbb{F}^n .

Truco 1.15.

1.3. Subespacios

Más adelante veremos que todo espacio vectorial (de dimensión finita) V es (isomorfo a) \mathbb{F}^n .

Luego en V se cumplen todas las propiedades que se cumplen en \mathbb{F}^n .

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$,

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$,

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \right\}$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\}$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \notin S_1$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \notin S_1$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \notin S_1$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \notin S_1$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \notin S_1$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S_2$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \notin S_1$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S_2 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \notin S_1$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S_2 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \in S_2$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \notin S_1$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S_2 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \in S_2 \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \notin S_1$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S_2 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \in S_2 \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in S_2$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \notin S_1$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S_2 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \in S_2 \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in S_2 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Definición 1.16.

1.3. Subespacios

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto S de V tal que:

1. El vector neutro está en S .
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25 \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \notin S_1$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S_2 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \in S_2 \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in S_2 \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} \in S_2$$

Notas 1.17.

1.3. Subespacios

Notas 1.17.

1.3. Subespacios

1. Un subespacio vectorial es a su vez un espacio vectorial

Notas 1.17.

1.3. Subespacios

1. Un subespacio vectorial es a su vez un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalares heredadas.

Notas 1.17.

1.3. Subespacios

1. Un subespacio vectorial es a su vez un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalares heredadas.
2. Un subconjunto S de un \mathbb{F} -espacio vectorial V es subespacio

Notas 1.17.

1.3. Subespacios

1. Un subespacio vectorial es a su vez un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalares heredadas.
2. Un subconjunto S de un \mathbb{F} -espacio vectorial V es subespacio si y solo si se cumplen las siguientes dos propiedades:

Notas 1.17.

1.3. Subespacios

1. Un subespacio vectorial es a su vez un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalares heredadas.
2. Un subconjunto S de un \mathbb{F} -espacio vectorial V es subespacio si y solo si se cumplen las siguientes dos propiedades:
 - a) El conjunto S es no vacío.

Notas 1.17.

1.3. Subespacios

1. Un subespacio vectorial es a su vez un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalares heredadas.
2. Un subconjunto S de un \mathbb{F} -espacio vectorial V es subespacio si y solo si se cumplen las siguientes dos propiedades:
 - a) El conjunto S es no vacío.
 - b) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ y $v_1, v_2 \in S$,

Notas 1.17.

1.3. Subespacios

1. Un subespacio vectorial es a su vez un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalares heredadas.
2. Un subconjunto S de un \mathbb{F} -espacio vectorial V es subespacio si y solo si se cumplen las siguientes dos propiedades:
 - a) El conjunto S es no vacío.
 - b) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ y $v_1, v_2 \in S$, entonces $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in S$.

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

1. Tenemos la siguiente cadena de subespacios:

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

1. Tenemos la siguiente cadena de subespacios:

$$\mathbb{F}_3[X]$$

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

1. Tenemos la siguiente cadena de subespacios:

$$\mathbb{F}_2[X] \leq \mathbb{F}_3[X]$$

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

1. Tenemos la siguiente cadena de subespacios:

$$\mathbb{F}_1[X] \leq \mathbb{F}_2[X] \leq \mathbb{F}_3[X]$$

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

1. Tenemos la siguiente cadena de subespacios:

$$\mathbb{F}_0[X] \leq \mathbb{F}_1[X] \leq \mathbb{F}_2[X] \leq \mathbb{F}_3[X]$$

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

1. Tenemos la siguiente cadena de subespacios:

$$\mathbb{F}_0[X] \leq \mathbb{F}_1[X] \leq \mathbb{F}_2[X] \leq \mathbb{F}_3[X] \leq \mathbb{F}_4[X]$$

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

1. Tenemos la siguiente cadena de subespacios:

$$\mathbb{F}_0[X] \leq \mathbb{F}_1[X] \leq \mathbb{F}_2[X] \leq \mathbb{F}_3[X] \leq \mathbb{F}_4[X] \leq \cdots \leq \mathbb{F}[X]$$

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

1. Tenemos la siguiente cadena de subespacios:

$$\mathbb{F}_0[X] \leq \mathbb{F}_1[X] \leq \mathbb{F}_2[X] \leq \mathbb{F}_3[X] \leq \mathbb{F}_4[X] \leq \cdots \leq \mathbb{F}[X]$$

Observa que $\mathbb{F}_0[X] = \mathbb{F}$.

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

1. Tenemos la siguiente cadena de subespacios:

$$\mathbb{F}_0[X] \leq \mathbb{F}_1[X] \leq \mathbb{F}_2[X] \leq \mathbb{F}_3[X] \leq \mathbb{F}_4[X] \leq \dots \leq \mathbb{F}[X]$$

Observa que $\mathbb{F}_0[X] = \mathbb{F}$.

2. Sea V un espacio vectorial cualquiera.

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

1. Tenemos la siguiente cadena de subespacios:

$$\mathbb{F}_0[X] \leq \mathbb{F}_1[X] \leq \mathbb{F}_2[X] \leq \mathbb{F}_3[X] \leq \mathbb{F}_4[X] \leq \dots \leq \mathbb{F}[X]$$

Observa que $\mathbb{F}_0[X] = \mathbb{F}$.

2. Sea V un espacio vectorial cualquiera.

Tanto V como $\{\bar{0}\}$ son subespacios de V .

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

3. Sea $V = \mathbb{C}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_i \in \mathbb{C}\}$,

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

3. Sea $V = \mathbb{C}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_i \in \mathbb{C}\}$, y sea S el subconjunto de vectores que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

3. Sea $V = \mathbb{C}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_i \in \mathbb{C}\}$, y sea S el subconjunto de vectores que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

El subconjunto S es un subespacio vectorial de \mathbb{C}^4 ,

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

3. Sea $V = \mathbb{C}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_i \in \mathbb{C}\}$, y sea S el subconjunto de vectores que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

El subconjunto S es un subespacio vectorial de \mathbb{C}^4 , ya que el sistema es **homogéneo**,

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

3. Sea $V = \mathbb{C}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_i \in \mathbb{C}\}$, y sea S el subconjunto de vectores que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

El subconjunto S es un subespacio vectorial de \mathbb{C}^4 , ya que el sistema es **homogéneo**, es decir, los coeficientes que aparecen en la parte derecha de cada igualdad son nulos.

Ejemplos 1.18.

1.3. Subespacios

3. Sea $V = \mathbb{C}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_i \in \mathbb{C}\}$, y sea S el subconjunto de vectores que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

El subconjunto S es un subespacio vectorial de \mathbb{C}^4 , ya que el sistema es **homogéneo**, es decir, los coeficientes que aparecen en la parte derecha de cada igualdad son nulos.

$$S = \left\{ \left(\begin{array}{c} -2\delta + 6\mu \\ \delta - 3\mu \\ \mu \\ \delta \end{array} \right) \mid \delta, \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

Ejercicios 1.19.

1.3. Subespacios

- 1.8
- 1.9
- 1.10

Capítulo 1. Espacios vectoriales

1.1. Método de Gauss

1.2. Espacios vectoriales

1.3. Subespacios

1.4. Conjuntos generadores

1.5. Dependencia lineal

1.6. Dimensión

1.7. Coordenadas

1.8. Suma directa I

1.9. Suma directa II

Ejercicios espacios vectoriales

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \end{pmatrix} \right\}$$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -\mu \end{pmatrix} \right\}$$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -\mu \end{pmatrix} \right\}$$

2. $S_1 + \dots + S_n$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -\mu \end{pmatrix} \right\}$$

2. $S_1 + \dots + S_n$

también es subespacio de V .

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -\mu \end{pmatrix} \right\}$$

2. $S_1 + \dots + S_n = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_i \in S_i\}$ también es subespacio de V .

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -\mu \end{pmatrix} \right\}$$

2. $S_1 + \dots + S_n = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_i \in S_i\}$ también es subespacio de V .

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -\mu \end{pmatrix} \right\}$$

2. $S_1 + \dots + S_n = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_i \in S_i\}$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \right\}$$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -\mu \end{pmatrix} \right\}$$

2. $S_1 + \dots + S_n = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_i \in S_i\}$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -\mu \end{pmatrix} \right\}$$

2. $S_1 + \dots + S_n = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_i \in S_i\}$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \quad \quad \quad \right\}$$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -\mu \end{pmatrix} \right\}$$

2. $S_1 + \dots + S_n = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_i \in S_i\}$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \right\}$$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -\mu \end{pmatrix} \right\}$$

2. $S_1 + \dots + S_n = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_i \in S_i\}$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V . Entonces:

1. $S_1 \cap \dots \cap S_n$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -\mu \end{pmatrix} \right\}$$

2. $S_1 + \dots + S_n = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_i \in S_i\}$ también es subespacio de V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \end{pmatrix} \right\}$$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$,

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$,
con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3$,

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)$$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$$

S_1 es subespacio

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$$

S_1 es subespacio \implies

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$$

$$S_1 \text{ es subespacio} \implies a_1 + b_1 \in S_1$$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$$

S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1$ $(a_2 + b_2 \in S_2,$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$$

S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1 \quad (a_2 + b_2 \in S_2, a_3 + b_3 \in S_3)$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \in S_1 + S_2 + S_3$
 S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1 \quad (a_2 + b_2 \in S_2, a_3 + b_3 \in S_3)$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \in S_1 + S_2 + S_3$
 S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1 \quad (a_2 + b_2 \in S_2, a_3 + b_3 \in S_3)$

Hemos usado la propiedad conmutativa.

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \in S_1 + S_2 + S_3$
 S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1 \quad (a_2 + b_2 \in S_2, a_3 + b_3 \in S_3)$

Hemos usado la propiedad conmutativa.

* Cerrado para el producto por escalares

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \in S_1 + S_2 + S_3$
 S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1 \quad (a_2 + b_2 \in S_2, a_3 + b_3 \in S_3)$

Hemos usado la propiedad conmutativa.

* Cerrado para el producto por escalares

Hay que usar la propiedad distributiva.

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \in S_1 + S_2 + S_3$$

S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1$ $(a_2 + b_2 \in S_2, a_3 + b_3 \in S_3)$

Hemos usado la propiedad conmutativa.

* Cerrado para el producto por escalares

Hay que usar la propiedad distributiva.

* Vector nulo

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \in S_1 + S_2 + S_3$
 S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1 \quad (a_2 + b_2 \in S_2, a_3 + b_3 \in S_3)$

Hemos usado la propiedad conmutativa.

* Cerrado para el producto por escalares

Hay que usar la propiedad distributiva.

* Vector nulo

$\vec{0} \in S_1 + S_2 + S_3$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \in S_1 + S_2 + S_3$
 S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1 \quad (a_2 + b_2 \in S_2, a_3 + b_3 \in S_3)$

Hemos usado la propiedad conmutativa.

* Cerrado para el producto por escalares

Hay que usar la propiedad distributiva.

* Vector nulo

$\bar{0} \in S_1 + S_2 + S_3$ porque $\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} + \bar{0}$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \in S_1 + S_2 + S_3$
 S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1 \quad (a_2 + b_2 \in S_2, a_3 + b_3 \in S_3)$

Hemos usado la propiedad conmutativa.

* Cerrado para el producto por escalares

Hay que usar la propiedad distributiva.

* Vector nulo

$\vec{0} \in S_1 + S_2 + S_3$ porque $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0}$ con $\vec{0} \in S_1$,

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \in S_1 + S_2 + S_3$
 S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1 \quad (a_2 + b_2 \in S_2, a_3 + b_3 \in S_3)$

Hemos usado la propiedad conmutativa.

* Cerrado para el producto por escalares

Hay que usar la propiedad distributiva.

* Vector nulo

$\vec{0} \in S_1 + S_2 + S_3$ porque $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0}$ con $\vec{0} \in S_1, \vec{0} \in S_2,$

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \in S_1 + S_2 + S_3$
 S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1 \quad (a_2 + b_2 \in S_2, a_3 + b_3 \in S_3)$

Hemos usado la propiedad conmutativa.

* Cerrado para el producto por escalares

Hay que usar la propiedad distributiva.

* Vector nulo

$\vec{0} \in S_1 + S_2 + S_3$ porque $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0}$ con $\vec{0} \in S_1, \vec{0} \in S_2, \vec{0} \in S_3$.

Propiedades 1.20.

1.4. Conjuntos generadores

Demostración de que $S_1 + S_2 + S_3$ es subespacio.

* Cerrado para la suma

Sean $a_1 + a_2 + a_3$ y $b_1 + b_2 + b_3$ dos vectores cualesquiera de $S_1 + S_2 + S_3$, con $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, a_3 \in S_3, b_1 \in S_1, b_2 \in S_2, b_3 \in S_3$.

$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \in S_1 + S_2 + S_3$
 S_1 es subespacio $\implies a_1 + b_1 \in S_1 \quad (a_2 + b_2 \in S_2, a_3 + b_3 \in S_3)$

Hemos usado la propiedad conmutativa.

* Cerrado para el producto por escalares

Hay que usar la propiedad distributiva.

* Vector nulo

$\vec{0} \in S_1 + S_2 + S_3$ porque $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0}$ con $\vec{0} \in S_1, \vec{0} \in S_2, \vec{0} \in S_3$. □

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores.

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ se dice que es **combinación lineal** de v_1, \dots, v_n .

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ se dice que es **combinación lineal** de v_1, \dots, v_n .
2. Sea C un subconjunto no vacío (y posiblemente infinito) de V .

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ se dice que es **combinación lineal** de v_1, \dots, v_n .
2. Sea C un subconjunto no vacío (y posiblemente infinito) de V . El **subespacio generado** por C ,

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ se dice que es **combinación lineal** de v_1, \dots, v_n .
2. Sea C un subconjunto no vacío (y posiblemente infinito) de V . El **subespacio generado** por C , denotado $\text{span}\langle C \rangle$,

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ se dice que es **combinación lineal** de v_1, \dots, v_n .
2. Sea C un subconjunto no vacío (y posiblemente infinito) de V . El **subespacio generado** por C , denotado $\text{span}\langle C \rangle$, es por definición el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) de vectores de C :

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ se dice que es **combinación lineal** de v_1, \dots, v_n .
2. Sea C un subconjunto no vacío (y posiblemente infinito) de V . El **subespacio generado** por C , denotado $\text{span}\langle C \rangle$, es por definición el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) de vectores de C :

$$\text{span}\langle C \rangle =$$

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ se dice que es **combinación lineal** de v_1, \dots, v_n .
2. Sea C un subconjunto no vacío (y posiblemente infinito) de V . El **subespacio generado** por C , denotado $\text{span}\langle C \rangle$, es por definición el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) de vectores de C :

$$\text{span}\langle C \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid$$

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ se dice que es **combinación lineal** de v_1, \dots, v_n .
2. Sea C un subconjunto no vacío (y posiblemente infinito) de V . El **subespacio generado** por C , denotado $\text{span}\langle C \rangle$, es por definición el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) de vectores de C :

$$\text{span}\langle C \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid m \geq 1, \}$$

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ se dice que es **combinación lineal** de v_1, \dots, v_n .
2. Sea C un subconjunto no vacío (y posiblemente infinito) de V . El **subespacio generado** por C , denotado $\text{span}\langle C \rangle$, es por definición el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) de vectores de C :

$$\text{span}\langle C \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid m \geq 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F} \}$$

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ se dice que es **combinación lineal** de v_1, \dots, v_n .
2. Sea C un subconjunto no vacío (y posiblemente infinito) de V . El **subespacio generado** por C , denotado $\text{span}\langle C \rangle$, es por definición el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) de vectores de C :

$$\text{span}\langle C \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid m \geq 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F} \\ v_1, \dots, v_m \in C \}$$

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ se dice que es **combinación lineal** de v_1, \dots, v_n .
2. Sea C un subconjunto no vacío (y posiblemente infinito) de V . El **subespacio generado** por C , denotado $\text{span}\langle C \rangle$, es por definición el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) de vectores de C :

$$\text{span}\langle C \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid m \geq 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F} \\ v_1, \dots, v_m \in C \}$$

3. Por convenio definimos $\text{span}\langle \emptyset \rangle =$

Definiciones 1.21.

1.4. Conjuntos generadores

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y v_1, \dots, v_n vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ se dice que es **combinación lineal** de v_1, \dots, v_n .
2. Sea C un subconjunto no vacío (y posiblemente infinito) de V . El **subespacio generado** por C , denotado $\text{span}\langle C \rangle$, es por definición el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) de vectores de C :

$$\text{span}\langle C \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid m \geq 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F} \\ v_1, \dots, v_m \in C \}$$

3. Por convenio definimos $\text{span}\langle \emptyset \rangle = \{ \vec{0} \}$.

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle =$$

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{ \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid$$

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\}$$

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\}$$

1. En efecto, $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\}$$

1. En efecto, $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\}$$

1. En efecto, $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

$$\text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\}$$

1. En efecto, $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

$$\begin{cases} 2u_1 + 5u_2 - 3u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 5u_3 \end{cases} \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\}$$

1. En efecto, $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

$$\begin{cases} 2u_1 + 5u_2 - 3u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 5u_3 \end{cases} \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad 5u_1 + 9u_2 + 2u_3$$

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\}$$

1. En efecto, $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

$$\begin{cases} 2u_1 + 5u_2 - 3u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 5u_3 \end{cases} \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad 5u_1 + 9u_2 + 2u_3 \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\}$$

1. En efecto, $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

$$\begin{cases} 2u_1 + 5u_2 - 3u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 5u_3 \end{cases} \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad 5u_1 + 9u_2 + 2u_3 \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

$$\bar{0} \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\}$$

1. En efecto, $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

$$\begin{cases} 2u_1 + 5u_2 - 3u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 5u_3 \end{cases} \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad 5u_1 + 9u_2 + 2u_3 \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

$$0u_1 + 0u_2 + 0u_3 = \bar{0} \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\}$$

1. En efecto, $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

$$\begin{cases} 2u_1 + 5u_2 - 3u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 5u_3 \end{cases} \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad 5u_1 + 9u_2 + 2u_3 \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

$$0u_1 + 0u_2 + 0u_3 = \bar{0} \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

3. Si existen vectores u_1, \dots, u_n tales que $V = \text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$,

Notas 1.22.

1.4. Conjuntos generadores

2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ en lugar de escribir $\text{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ escribimos $\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$\text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\}$$

1. En efecto, $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio vectorial de V .

$$\begin{cases} 2u_1 + 5u_2 - 3u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 5u_3 \end{cases} \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad 5u_1 + 9u_2 + 2u_3 \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

$$0u_1 + 0u_2 + 0u_3 = \bar{0} \in \text{span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

3. Si existen vectores u_1, \dots, u_n tales que $V = \text{span}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$, decimos que V es **finitamente generado**.

Ejemplo 1.23.

1.4. Conjuntos generadores

Ejemplo 1.23.

1.4. Conjuntos generadores

Seguimos con el ejemplo 1.18:

$$S = \left\{ \left(\begin{array}{c} -2\delta + 6\mu \\ \delta - 3\mu \\ \mu \\ \delta \end{array} \right) \mid \delta, \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

Ejemplo 1.23.

1.4. Conjuntos generadores

Seguimos con el ejemplo 1.18:

$$S = \left\{ \left(\begin{array}{c} -2\delta + 6\mu \\ \delta - 3\mu \\ \mu \\ \delta \end{array} \right) \mid \delta, \mu \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \mid \delta, \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

Ejemplo 1.23.

1.4. Conjuntos generadores

Seguimos con el ejemplo 1.18:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2\delta + 6\mu \\ \delta - 3\mu \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} \mid \delta, \mu \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \delta, \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

Ejemplo 1.23.

1.4. Conjuntos generadores

Seguimos con el ejemplo 1.18:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2\delta + 6\mu \\ \delta - 3\mu \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} \mid \delta, \mu \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \delta, \mu \in \mathbb{C} \right\}$$
$$= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Propiedad 1.24.

1.4. Conjuntos generadores

Propiedad 1.24.

1.4. Conjuntos generadores

Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V .

Propiedad 1.24.

1.4. Conjuntos generadores

Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V .

Entonces $\text{span}\langle C \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a C , es decir:

Propiedad 1.24.

1.4. Conjuntos generadores

Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V .

Entonces $\text{span}\langle C \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a C , es decir:

1. $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio de V .

Propiedad 1.24.

1.4. Conjuntos generadores

Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V .

Entonces $\text{span}\langle C \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a C , es decir:

1. $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio de V .
2. $C \subseteq \text{span}\langle C \rangle$.

Propiedad 1.24.

1.4. Conjuntos generadores

Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V .

Entonces $\text{span}\langle C \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a C , es decir:

1. $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio de V .
2. $C \subseteq \text{span}\langle C \rangle$.
3. Si S es

Propiedad 1.24.

1.4. Conjuntos generadores

Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V .

Entonces $\text{span}\langle C \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a C , es decir:

1. $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio de V .
2. $C \subseteq \text{span}\langle C \rangle$.
3. Si S es otro subespacio de V

Propiedad 1.24.

1.4. Conjuntos generadores

Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V .

Entonces $\text{span}\langle C \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a C , es decir:

1. $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio de V .
2. $C \subseteq \text{span}\langle C \rangle$.
3. Si S es otro subespacio de V tal que $C \subseteq S$,

Propiedad 1.24.

1.4. Conjuntos generadores

Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V .

Entonces $\text{span}\langle C \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a C , es decir:

1. $\text{span}\langle C \rangle$ es un subespacio de V .
2. $C \subseteq \text{span}\langle C \rangle$.
3. Si S es otro subespacio de V tal que $C \subseteq S$, entonces $\text{span}\langle C \rangle \subseteq S$.

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

1. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

1. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$

Demostración.

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

1. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$

Demostración.

$$v_1 =$$

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

1. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$

Demostración.

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3$$

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

1. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$

Demostración.

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3$$

\Rightarrow

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

1. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$

Demostración.

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3$$

$$\implies v_1 \in \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle$$

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

1. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$

Demostración.

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3$$

$$v_2 =$$

$$\implies v_1 \in \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle$$

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

$$1. \text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$$

Demostración.

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot (v_2 + v_3) + (-1) \cdot v_3$$

$$\implies v_1 \in \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle$$

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

$$1. \text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$$

Demostración.

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot (v_2 + v_3) + (-1) \cdot v_3$$

$$\implies v_1, v_2 \in \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle$$

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

1. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$

Demostración.

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot (v_2 + v_3) + (-1) \cdot v_3$$

$$v_3 =$$

$$\implies v_1, v_2 \in \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle$$

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

$$1. \text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$$

Demostración.

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot (v_2 + v_3) + (-1) \cdot v_3$$

$$v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 1 \cdot v_3$$

$$\implies v_1, v_2 \in \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle$$

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

$$1. \text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$$

Demostración.

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot (v_2 + v_3) + (-1) \cdot v_3$$

$$v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 1 \cdot v_3$$

$$\implies v_1, v_2, v_3 \in \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle$$

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

1. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$

Demostración.

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot (v_2 + v_3) + (-1) \cdot v_3$$

$$v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 1 \cdot v_3$$

$$\implies v_1, v_2, v_3 \in \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle$$

Por la propiedad 1.24,

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

1. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$

Demostración.

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot (v_2 + v_3) + (-1) \cdot v_3$$

$$v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 1 \cdot v_3$$

$$\implies v_1, v_2, v_3 \in \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle$$

Por la propiedad 1.24, $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle$

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

$$1. \text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle.$$

Demostración.

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot (v_2 + v_3) + (-1) \cdot v_3$$

$$v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 1 \cdot v_3$$

$$\implies v_1, v_2, v_3 \in \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle$$

Por la propiedad 1.24, $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \text{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3 \rangle$

Análogamente el otro contenido. □

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

$$2. \text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle \lambda v_1, v_2, v_3 \rangle$$

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

2. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle \lambda v_1, v_2, v_3 \rangle$ si $\lambda \neq 0$.

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

2. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle \lambda v_1, v_2, v_3 \rangle$ si $\lambda \neq 0$.

3. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_2, v_1, v_3 \rangle$.

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

2. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle \lambda v_1, v_2, v_3 \rangle$ si $\lambda \neq 0$.

3. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_2, v_1, v_3 \rangle$.

4. $w \in \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle \iff$

Notas 1.25.

1.4. Conjuntos generadores

2. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle \lambda v_1, v_2, v_3 \rangle$ si $\lambda \neq 0$.

3. $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \text{span}\langle v_2, v_1, v_3 \rangle$.

4. $w \in \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle \iff \text{span}\langle v_1, \dots, v_n, w \rangle = \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

$$S = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas,

$$S = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$S = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$S = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$S = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$S = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$S = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$S = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$S = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \\ \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$S = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$S = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$S = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$\begin{aligned} S &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$\begin{aligned} S &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Ejemplo 1.26.

1.4. Conjuntos generadores

Al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo.

$$S = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejercicios 1.27.

1.4. Conjuntos generadores

- 1.11
- 1.12
- 1.13
- 1.14

Capítulo 1. Espacios vectoriales

1.1. Método de Gauss

1.2. Espacios vectoriales

1.3. Subespacios

1.4. Conjuntos generadores

1.5. Dependencia lineal

1.6. Dimensión

1.7. Coordenadas

1.8. Suma directa I

1.9. Suma directa II

Ejercicios espacios vectoriales

Terminología 1.28.

1.5. Dependencia lineal

Terminología 1.28.

1.5. Dependencia lineal

Distinguiremos entre **familias** y **conjuntos**.

Terminología 1.28.

1.5. Dependencia lineal

Distinguiremos entre **familias** y **conjuntos**.

En una familia puede haber elementos repetidos;

Terminología 1.28.

1.5. Dependencia lineal

Distinguiremos entre **familias** y **conjuntos**.

En una familia puede haber elementos repetidos;
además en las familias finitas tenemos en cuenta el orden de los elementos.

Terminología 1.28.

1.5. Dependencia lineal

Distinguiremos entre **familias** y **conjuntos**.

En una familia puede haber elementos repetidos;
además en las familias finitas tenemos en cuenta el orden de los elementos.

Por lo tanto los siguientes tres conjuntos de números son iguales:

$$\{2, 2, 5\} = \{2, 5\} = \{5, 2\}$$

Terminología 1.28.

1.5. Dependencia lineal

Distinguiremos entre **familias** y **conjuntos**.

En una familia puede haber elementos repetidos;
además en las familias finitas tenemos en cuenta el orden de los elementos.

Por lo tanto los siguientes tres conjuntos de números son iguales:

$$\{2, 2, 5\} = \{2, 5\} = \{5, 2\}$$

Mientras que las siguientes tres familias son distintas dos a dos:

$$(2, 2, 5) \quad (2, 5) \quad (5, 2)$$

Terminología 1.28.

1.5. Dependencia lineal

Distinguiremos entre **familias** y **conjuntos**.

En una familia puede haber elementos repetidos;
además en las familias finitas tenemos en cuenta el orden de los elementos.

Por lo tanto los siguientes tres conjuntos de números son iguales:

$$\{2, 2, 5\} = \{2, 5\} = \{5, 2\}$$

Mientras que las siguientes tres familias son distintas dos a dos:

$$(2, 2, 5) \quad (2, 5) \quad (5, 2)$$

Usamos llaves para denotar los conjuntos y paréntesis para las familias.

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sea (v_1, \dots, v_n) una familia finita de vectores de V .

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sea (v_1, \dots, v_n) una familia finita de vectores de V .
Se dice que dicha familia es **ligada** (o linealmente dependiente)

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sea (v_1, \dots, v_n) una familia finita de vectores de V .
Se dice que dicha familia es **ligada** (o linealmente dependiente) si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sea (v_1, \dots, v_n) una familia finita de vectores de V .
Se dice que dicha familia es **ligada** (o linealmente dependiente) si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$$

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sea (v_1, \dots, v_n) una familia finita de vectores de V .
Se dice que dicha familia es **ligada** (o linealmente dependiente) si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$$

y tales que al menos uno de estos λ_i es distinto de 0.

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sea (v_1, \dots, v_n) una familia finita de vectores de V .
Se dice que dicha familia es **ligada** (o linealmente dependiente) si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$$

y tales que al menos uno de estos λ_i es distinto de 0.

2. La familia (v_1, \dots, v_n) es **libre** (o linealmente independiente)

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sea (v_1, \dots, v_n) una familia finita de vectores de V .
Se dice que dicha familia es **ligada** (o linealmente dependiente) si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$$

y tales que al menos uno de estos λ_i es distinto de 0.

2. La familia (v_1, \dots, v_n) es **libre** (o linealmente independiente) si no es ligada, es decir, si:

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sea (v_1, \dots, v_n) una familia finita de vectores de V .
Se dice que dicha familia es **ligada** (o linealmente dependiente) si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$$

y tales que al menos uno de estos λ_i es distinto de 0.

2. La familia (v_1, \dots, v_n) es **libre** (o linealmente independiente) si no es ligada, es decir, si:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$$

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sea (v_1, \dots, v_n) una familia finita de vectores de V .
Se dice que dicha familia es **ligada** (o linealmente dependiente) si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$$

y tales que al menos uno de estos λ_i es distinto de 0.

2. La familia (v_1, \dots, v_n) es **libre** (o linealmente independiente) si no es ligada, es decir, si:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0} \implies$$

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial.

1. Sea (v_1, \dots, v_n) una familia finita de vectores de V .
Se dice que dicha familia es **ligada** (o linealmente dependiente) si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$$

y tales que al menos uno de estos λ_i es distinto de 0.

2. La familia (v_1, \dots, v_n) es **libre** (o linealmente independiente) si no es ligada, es decir, si:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

3. Una familia infinita de vectores es ligada

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

3. Una familia infinita de vectores es ligada si tiene **al menos una** subfamilia finita ligada,

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

3. Una familia infinita de vectores es ligada si tiene **al menos una** subfamilia finita ligada, y es libre en caso contrario, es decir,

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

3. Una familia infinita de vectores es ligada si tiene **al menos una** subfamilia finita ligada, y es libre en caso contrario, es decir, si **todas** sus subfamilias finitas son libres.

Definiciones 1.29.

1.5. Dependencia lineal

3. Una familia infinita de vectores es ligada si tiene **al menos una** subfamilia finita ligada, y es libre en caso contrario, es decir, si **todas** sus subfamilias finitas son libres.
4. Por convenio decimos que la familia vacía es libre.

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de \mathcal{F} .

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de \mathcal{F} .

Demostración.

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de \mathcal{F} .

Demostración.



Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de \mathcal{F} .

Demostración.



$$3v_1 + 5v_2 + 0v_3 - 2v_4 = \bar{0}$$

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de \mathcal{F} .

Demostración.

$$\boxed{\implies} \quad 3v_1 + 5v_2 + 0v_3 - 2v_4 = \bar{0} \quad \implies$$

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de \mathcal{F} .

Demostración.

$$\boxed{\implies} \quad 3v_1 + 5v_2 + 0v_3 - 2v_4 = \bar{0} \quad \implies \quad v_2 =$$

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de \mathcal{F} .

Demostración.

$$\boxed{\implies} \quad 3v_1 + 5v_2 + 0v_3 - 2v_4 = \bar{0} \quad \implies \quad v_2 = \frac{-3}{5}v_1 + \frac{-0}{5}v_3 + \frac{2}{5}v_4$$

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de \mathcal{F} .

Demostración.

$$\boxed{\implies} \quad 3v_1 + 5v_2 + 0v_3 - 2v_4 = \bar{0} \quad \implies \quad v_2 = \frac{-3}{5}v_1 + \frac{-0}{5}v_3 + \frac{2}{5}v_4$$



Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de \mathcal{F} .

Demostración.

$$\boxed{\implies} \quad 3v_1 + 5v_2 + 0v_3 - 2v_4 = \bar{0} \quad \implies \quad v_2 = \frac{-3}{5}v_1 + \frac{-0}{5}v_3 + \frac{2}{5}v_4$$

$$\boxed{\impliedby} \quad v_3 = 4v_1 - 2v_2$$

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de \mathcal{F} .

Demostración.

$$\boxed{\implies} \quad 3v_1 + 5v_2 + 0v_3 - 2v_4 = \bar{0} \quad \implies \quad v_2 = \frac{-3}{5}v_1 + \frac{-0}{5}v_3 + \frac{2}{5}v_4$$

$$\boxed{\impliedby} \quad v_3 = 4v_1 - 2v_2 \quad \implies$$

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de \mathcal{F} .

Demostración.

$$\boxed{\implies} \quad 3v_1 + 5v_2 + 0v_3 - 2v_4 = \bar{0} \quad \implies \quad v_2 = \frac{-3}{5}v_1 + \frac{-0}{5}v_3 + \frac{2}{5}v_4$$

$$\boxed{\impliedby} \quad v_3 = 4v_1 - 2v_2 \quad \implies \quad -4v_1 + 2v_2 + 1v_3 + 0v_4 = \bar{0}$$

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de \mathcal{F} .

Demostración.

$$\boxed{\implies} \quad 3v_1 + 5v_2 + 0v_3 - 2v_4 = \bar{0} \quad \implies \quad v_2 = \frac{-3}{5}v_1 + \frac{-0}{5}v_3 + \frac{2}{5}v_4$$

$$\boxed{\impliedby} \quad v_3 = 4v_1 - 2v_2 \quad \implies \quad -4v_1 + 2v_2 + \mathbf{1}v_3 + 0v_4 = \bar{0}$$

Propiedad 1.30.

1.5. Dependencia lineal

Sea \mathcal{F} una familia de vectores.

Supongamos que \mathcal{F} tiene al menos dos vectores.

Entonces \mathcal{F} es ligada si y solo si existe un vector de \mathcal{F} que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de \mathcal{F} .

Demostración.

$$\boxed{\implies} \quad 3v_1 + 5v_2 + 0v_3 - 2v_4 = \bar{0} \quad \implies \quad v_2 = \frac{-3}{5}v_1 + \frac{-0}{5}v_3 + \frac{2}{5}v_4$$

$$\boxed{\impliedby} \quad v_3 = 4v_1 - 2v_2 \quad \implies \quad -4v_1 + 2v_2 + 1v_3 + 0v_4 = \bar{0} \quad \square$$

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores,

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.
2. Una familia formada por un único vector es ligada

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.
2. Una familia formada por un único vector es ligada si y solo si dicho vector es el vector nulo.

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.
2. Una familia formada por un único vector es ligada si y solo si dicho vector es el vector nulo.

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.
2. Una familia formada por un único vector es ligada si y solo si dicho vector es el vector nulo.

$$\lambda_1 v_1 = \bar{0}$$

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.
2. Una familia formada por un único vector es ligada si y solo si dicho vector es el vector nulo.

$$\lambda_1 v_1 = \bar{0} \quad \text{con} \quad \lambda_1 \neq 0$$

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.
2. Una familia formada por un único vector es ligada si y solo si dicho vector es el vector nulo.

$$\lambda_1 v_1 = \bar{0} \quad \text{con} \quad \lambda_1 \neq 0 \quad \implies$$

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.
2. Una familia formada por un único vector es ligada si y solo si dicho vector es el vector nulo.

$$\lambda_1 v_1 = \bar{0} \quad \text{con} \quad \lambda_1 \neq 0 \quad \implies \quad v_1 = \bar{0}$$

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.
2. Una familia formada por un único vector es ligada si y solo si dicho vector es el vector nulo.

$$\lambda_1 v_1 = \bar{0} \quad \text{con} \quad \lambda_1 \neq 0 \quad \implies \quad v_1 = \bar{0}$$

3. Toda familia que contiene a una subfamilia ligada es ligada.

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.
2. Una familia formada por un único vector es ligada si y solo si dicho vector es el vector nulo.

$$\lambda_1 v_1 = \bar{0} \quad \text{con} \quad \lambda_1 \neq 0 \quad \implies \quad v_1 = \bar{0}$$

3. Toda familia que contiene a una subfamilia ligada es ligada.
En otras palabras, toda subfamilia de una familia libre es libre.

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.
2. Una familia formada por un único vector es ligada si y solo si dicho vector es el vector nulo.

$$\lambda_1 v_1 = \vec{0} \quad \text{con} \quad \lambda_1 \neq 0 \quad \implies \quad v_1 = \vec{0}$$

3. Toda familia que contiene a una subfamilia ligada es ligada.
En otras palabras, toda subfamilia de una familia libre es libre.
4. Si una familia contiene vectores repetidos,

Notas 1.31.

1.5. Dependencia lineal

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.
2. Una familia formada por un único vector es ligada si y solo si dicho vector es el vector nulo.

$$\lambda_1 v_1 = \vec{0} \quad \text{con} \quad \lambda_1 \neq 0 \quad \implies \quad v_1 = \vec{0}$$

3. Toda familia que contiene a una subfamilia ligada es ligada.
En otras palabras, toda subfamilia de una familia libre es libre.
4. Si una familia contiene vectores repetidos, entonces es ligada.

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Sean a, b, c los vectores de \mathbb{Q}^4 :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Sean a, b, c los vectores de \mathbb{Q}^4 :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La familia (a, b, c) está **escalonada**:

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Sean a, b, c los vectores de \mathbb{Q}^4 :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La familia (a, b, c) está **escalonada**:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Sean a, b, c los vectores de \mathbb{Q}^4 :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La familia (a, b, c) está **escalonada**:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \boxed{0} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Sean a, b, c los vectores de \mathbb{Q}^4 :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La familia (a, b, c) está **escalonada**:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Sean a, b, c los vectores de \mathbb{Q}^4 :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La familia (a, b, c) está **escalonada**:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Veamos que el escalonamiento implica que la familia (a, b, c) es libre.

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

En efecto, supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ cumplen que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \bar{0}$.

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

En efecto, supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ cumplen que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \bar{0}$.

Entonces:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

En efecto, supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ cumplen que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \vec{0}$.

Entonces:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comparamos la tercera componente,

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

En efecto, supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ cumplen que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \vec{0}$.

Entonces:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comparamos la tercera componente, y obtenemos que α debe ser 0.

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

En efecto, supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ cumplen que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \vec{0}$.
Entonces:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comparamos la tercera componente, y obtenemos que α debe ser 0.

Ahora que sabemos que $\alpha = 0$,

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

En efecto, supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ cumplen que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \bar{0}$.
Entonces:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comparamos la tercera componente, y obtenemos que α debe ser 0.

Ahora que sabemos que $\alpha = 0$, comparamos la segunda componente,

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

En efecto, supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ cumplen que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \bar{0}$.
Entonces:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comparamos la tercera componente, y obtenemos que α debe ser 0.

Ahora que sabemos que $\alpha = 0$, comparamos la segunda componente, y obtenemos que β debe ser 0.

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

En efecto, supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ cumplen que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \bar{0}$.
Entonces:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comparamos la tercera componente, y obtenemos que α debe ser 0.

Ahora que sabemos que $\alpha = 0$, comparamos la segunda componente, y obtenemos que β debe ser 0.

Finalmente sabiendo que $\alpha = \beta = 0$,

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

En efecto, supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ cumplen que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \bar{0}$.
Entonces:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comparamos la tercera componente, y obtenemos que α debe ser 0.

Ahora que sabemos que $\alpha = 0$, comparamos la segunda componente, y obtenemos que β debe ser 0.

Finalmente sabiendo que $\alpha = \beta = 0$, comparamos la primera componente,

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

En efecto, supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ cumplen que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \bar{0}$.
Entonces:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comparamos la tercera componente, y obtenemos que α debe ser 0.

Ahora que sabemos que $\alpha = 0$, comparamos la segunda componente, y obtenemos que β debe ser 0.

Finalmente sabiendo que $\alpha = \beta = 0$, comparamos la primera componente, y obtenemos que γ debe ser 0.

Ejemplo 1.32.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

En efecto, supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ cumplen que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \bar{0}$.
Entonces:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comparamos la tercera componente, y obtenemos que α debe ser 0.

Ahora que sabemos que $\alpha = 0$, comparamos la segunda componente, y obtenemos que β debe ser 0.

Finalmente sabiendo que $\alpha = \beta = 0$, comparamos la primera componente, y obtenemos que γ debe ser 0.

Por tanto la familia (a, b, c) es libre. □

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada,

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Como la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada,

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Como la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, existen escalares x_1, x_2, x_3 no todos nulos tales que:

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Como la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, existen escalares x_1, x_2, x_3 no todos nulos tales que:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = \vec{0}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Como la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, existen escalares x_1, x_2, x_3 no todos nulos tales que:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = \vec{0}$$

Buscamos escalares y_1, y_2, y_3 tales que:

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Como la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, existen escalares x_1, x_2, x_3 no todos nulos tales que:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = \bar{0}$$

Buscamos escalares y_1, y_2, y_3 tales que:

$$y_1(v_1 + v_2) + y_2(v_2 + v_3) + y_3(v_3 + v_1) = \bar{0}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

Podemos reescribir esta ecuación como:

$$(y_1 + y_3)v_1 + (y_2 + y_1)v_2 + (y_3 + y_2)v_3 = \vec{0}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

Podemos reescribir esta ecuación como:

$$(y_1 + y_3)v_1 + (y_2 + y_1)v_2 + (y_3 + y_2)v_3 = \vec{0}$$

Por tanto podemos hacer que y_1, y_2, y_3 cumplan lo pedido si satisfacen:

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

Podemos reescribir esta ecuación como:

$$(y_1 + y_3)v_1 + (y_2 + y_1)v_2 + (y_3 + y_2)v_3 = \vec{0}$$

Por tanto podemos hacer que y_1, y_2, y_3 cumplan lo pedido si satisfacen:

$$\begin{cases} y_1 & + y_3 = x_1 \\ y_1 + y_2 & = x_2 \\ & y_2 + y_3 = x_3 \end{cases}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

Podemos reescribir esta ecuación como:

$$(y_1 + y_3)v_1 + (y_2 + y_1)v_2 + (y_3 + y_2)v_3 = \vec{0}$$

Por tanto podemos hacer que y_1, y_2, y_3 cumplan lo pedido si satisfacen:

$$\begin{cases} y_1 + y_3 = x_1 \\ y_1 + y_2 = x_2 \\ y_2 + y_3 = x_3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss:

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_1 - x_2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_1 - x_2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_1 - x_2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_1 - x_2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_1 - x_2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_1 - x_2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & 0 & (x_2 + x_3 - x_1)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_1 - x_2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & (x_2 + x_3 - x_1)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_1 - x_2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (x_2 + x_3 - x_1)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_1 - x_2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & (x_1 + x_2 - x_3)/2 \\ 0 & 1 & 0 & (x_2 + x_3 - x_1)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_1 - x_2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (x_1 + x_2 - x_3)/2 \\ 0 & 1 & 0 & (x_2 + x_3 - x_1)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

La solución es:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2}$$

$$y_2 = \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2}$$

$$y_3 = \frac{x_3 + x_1 - x_2}{2}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

La solución es:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2} \quad y_2 = \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2} \quad y_3 = \frac{x_3 + x_1 - x_2}{2}$$

Por último observamos que no pueden ser los tres y_i iguales a 0,

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

La solución es:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2} \quad y_2 = \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2} \quad y_3 = \frac{x_3 + x_1 - x_2}{2}$$

Por último observamos que no pueden ser los tres y_i iguales a 0, porque el sistema de ecuaciones

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

La solución es:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2} \quad y_2 = \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2} \quad y_3 = \frac{x_3 + x_1 - x_2}{2}$$

Por último observamos que no pueden ser los tres y_i iguales a 0, porque el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y_1 & + y_3 = x_1 \\ y_1 + y_2 & = x_2 \\ & y_2 + y_3 = x_3 \end{cases}$$

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

La solución es:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2} \quad y_2 = \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2} \quad y_3 = \frac{x_3 + x_1 - x_2}{2}$$

Por último observamos que no pueden ser los tres y_i iguales a 0, porque el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y_1 & + y_3 = x_1 \\ y_1 + y_2 & = x_2 \\ & y_2 + y_3 = x_3 \end{cases}$$

nos dice que entonces los tres x_i serían iguales a 0.

Ejemplo 1.33.

1.5. Dependencia lineal

Solución.

La solución es:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2} \quad y_2 = \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2} \quad y_3 = \frac{x_3 + x_1 - x_2}{2}$$

Por último observamos que no pueden ser los tres y_i iguales a 0, porque el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y_1 & + y_3 = x_1 \\ y_1 + y_2 & = x_2 \\ & y_2 + y_3 = x_3 \end{cases}$$

nos dice que entonces los tres x_i serían iguales a 0.

Así, hemos probado que $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ es ligada. □

Ejercicios 1.34.

1.5. Dependencia lineal

- 1.15
- 1.16
- 1.17

Capítulo 1. Espacios vectoriales

1.1. Método de Gauss

1.2. Espacios vectoriales

1.3. Subespacios

1.4. Conjuntos generadores

1.5. Dependencia lineal

1.6. Dimensión

1.7. Coordenadas

1.8. Suma directa I

1.9. Suma directa II

Ejercicios espacios vectoriales

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial.

Supongamos que la familia de vectores (a_1, \dots, a_m) es libre,

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial.

Supongamos que la familia de vectores (a_1, \dots, a_m) es libre,
y supongamos que la familia de vectores (b_1, \dots, b_n) genera V .

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial.

Supongamos que la familia de vectores (a_1, \dots, a_m) es libre, y supongamos que la familia de vectores (b_1, \dots, b_n) genera V .

Entonces $m \leq n$.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

1. Sabemos que $\text{span}\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

1. Sabemos que $\text{span}\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$.

Luego existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $a_1 = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

1. Sabemos que $\text{span}\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$.

Luego existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $a_1 = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (a_1, \dots, a_m) es familia libre,

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

1. Sabemos que $\text{span}\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$.

Luego existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $a_1 = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (a_1, \dots, a_m) es familia libre, el vector a_1 no es el vector nulo,

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

1. Sabemos que $\text{span}\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$.

Luego existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $a_1 = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (a_1, \dots, a_m) es familia libre, el vector a_1 no es el vector nulo, luego existe un índice i tal que $\lambda_i \neq 0$.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

1. Sabemos que $\text{span}\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$.

Luego existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $a_1 = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (a_1, \dots, a_m) es familia libre, el vector a_1 no es el vector nulo, luego existe un índice i tal que $\lambda_i \neq 0$.

Reordenando los índices si es necesario, podemos suponer que $i = 1$.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

1. Sabemos que $\text{span}\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$.

Luego existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $a_1 = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (a_1, \dots, a_m) es familia libre, el vector a_1 no es el vector nulo, luego existe un índice i tal que $\lambda_i \neq 0$.

Reordenando los índices si es necesario, podemos suponer que $i = 1$.

Despejando:

$$b_1 = \frac{1}{\lambda_1} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} b_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} b_n$$

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

1. Sabemos que $\text{span}\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$.

Luego existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $a_1 = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (a_1, \dots, a_m) es familia libre, el vector a_1 no es el vector nulo, luego existe un índice i tal que $\lambda_i \neq 0$.

Reordenando los índices si es necesario, podemos suponer que $i = 1$.

Despejando:

$$b_1 = \frac{1}{\lambda_1} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} b_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} b_n$$

Por lo tanto $\text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = \text{span}\langle b_1, \dots, b_n \rangle$

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

1. Sabemos que $\text{span}\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$.

Luego existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $a_1 = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (a_1, \dots, a_m) es familia libre, el vector a_1 no es el vector nulo, luego existe un índice i tal que $\lambda_i \neq 0$.

Reordenando los índices si es necesario, podemos suponer que $i = 1$.

Despejando:

$$b_1 = \frac{1}{\lambda_1} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} b_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} b_n$$

Por lo tanto $\text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = \text{span}\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

2. Ahora que sabemos que $\text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$,

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

2. Ahora que sabemos que $\text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$, repetimos el proceso con a_2 .

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

2. Ahora que sabemos que $\text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$, repetimos el proceso con a_2 .

Existen escalares μ_j tales que $a_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

2. Ahora que sabemos que $\text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$, repetimos el proceso con a_2 .

Existen escalares μ_j tales que $a_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$.

Si fuera $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$,

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

2. Ahora que sabemos que $\text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$, repetimos el proceso con a_2 .

Existen escalares μ_i tales que $a_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$.

Si fuera $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$,
entonces $(-\mu_1)a_1 + 1 \cdot a_2 = \bar{0}$,

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

2. Ahora que sabemos que $\text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$, repetimos el proceso con a_2 .

Existen escalares μ_i tales que $a_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$.

Si fuera $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$, entonces $(-\mu_1)a_1 + 1 \cdot a_2 = \bar{0}$, y (a_1, \dots, a_m) no sería libre.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

2. Ahora que sabemos que $\text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$, repetimos el proceso con a_2 .

Existen escalares μ_j tales que $a_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$.

Si fuera $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$,
entonces $(-\mu_1)a_1 + 1 \cdot a_2 = \bar{0}$,
y (a_1, \dots, a_m) no sería libre.

Luego $\mu_j \neq 0$ para algún índice $j \geq 2$;

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

2. Ahora que sabemos que $\text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$, repetimos el proceso con a_2 .

Existen escalares μ_j tales que $a_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$.

Si fuera $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$, entonces $(-\mu_1)a_1 + 1 \cdot a_2 = \bar{0}$, y (a_1, \dots, a_m) no sería libre.

Luego $\mu_j \neq 0$ para algún índice $j \geq 2$; reordenando, $j = 2$.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

2. Ahora que sabemos que $\text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$, repetimos el proceso con a_2 .

Existen escalares μ_j tales que $a_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$.

Si fuera $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$,
entonces $(-\mu_1)a_1 + 1 \cdot a_2 = \bar{0}$,
y (a_1, \dots, a_m) no sería libre.

Luego $\mu_j \neq 0$ para algún índice $j \geq 2$;
reordenando, $j = 2$.

Despejando b_2 , obtenemos que

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

2. Ahora que sabemos que $\text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$, repetimos el proceso con a_2 .

Existen escalares μ_j tales que $a_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$.

Si fuera $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$, entonces $(-\mu_1)a_1 + 1 \cdot a_2 = \bar{0}$, y (a_1, \dots, a_m) no sería libre.

Luego $\mu_j \neq 0$ para algún índice $j \geq 2$; reordenando, $j = 2$.

Despejando b_2 , obtenemos que $\text{span}\langle a_1, a_2, b_3, \dots, b_n \rangle = \text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle$

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

2. Ahora que sabemos que $\text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$, repetimos el proceso con a_2 .

Existen escalares μ_j tales que $a_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$.

Si fuera $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$, entonces $(-\mu_1)a_1 + 1 \cdot a_2 = \bar{0}$, y (a_1, \dots, a_m) no sería libre.

Luego $\mu_j \neq 0$ para algún índice $j \geq 2$; reordenando, $j = 2$.

Despejando b_2 , obtenemos que $\text{span}\langle a_1, a_2, b_3, \dots, b_n \rangle = \text{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

3. Si fuera $m > n$,

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

3. Si fuera $m > n$,
podríamos repetir este proceso hasta obtener $\text{span}\langle a_1, \dots, a_n \rangle = V$.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

3. Si fuera $m > n$,
podríamos repetir este proceso hasta obtener $\text{span}\langle a_1, \dots, a_n \rangle = V$.

Así, a_{n+1} sería combinación lineal de a_1, \dots, a_n ,

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

3. Si fuera $m > n$,
podríamos repetir este proceso hasta obtener $\text{span}\langle a_1, \dots, a_n \rangle = V$.

Así, a_{n+1} sería combinación lineal de a_1, \dots, a_n ,
contradicción.

Teorema 1.35 (de la dimensión).

1.6. Dimensión

Demostración.

3. Si fuera $m > n$,
podríamos repetir este proceso hasta obtener $\text{span}\langle a_1, \dots, a_n \rangle = V$.

Así, a_{n+1} sería combinación lineal de a_1, \dots, a_n ,
contradicción.

Por lo tanto $m \leq n$.



Definición 1.36 y corolario 1.37.

1.6. Dimensión

Definición 1.36 y corolario 1.37.

1.6. Dimensión

Definición 1.36.

Definición 1.36 y corolario 1.37.

1.6. Dimensión

Definición 1.36.

Sea V un espacio vectorial.

Definición 1.36 y corolario 1.37.

1.6. Dimensión

Definición 1.36.

Sea V un espacio vectorial.

Una **base** es una familia libre y que genera V .

Definición 1.36 y corolario 1.37.

1.6. Dimensión

Definición 1.36.

Sea V un espacio vectorial.

Una **base** es una familia libre y que genera V .

Corolario 1.37.

Definición 1.36 y corolario 1.37.

1.6. Dimensión

Definición 1.36.

Sea V un espacio vectorial.

Una **base** es una familia libre y que genera V .

Corolario 1.37.

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Definición 1.36 y corolario 1.37.

1.6. Dimensión

Definición 1.36.

Sea V un espacio vectorial.

Una **base** es una familia libre y que genera V .

Corolario 1.37.

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Entonces todas las bases de V tienen el mismo número de vectores.

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Entonces cualquier familia libre se puede expandir

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Entonces cualquier familia libre se puede expandir
hasta formar una base.

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Entonces cualquier familia libre se puede expandir (añadiendo vectores) hasta formar una base.

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Entonces cualquier familia libre se puede expandir (añadiendo vectores) hasta formar una base.

Demostración.

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Entonces cualquier familia libre se puede expandir (añadiendo vectores) hasta formar una base.

Demostración.

Si la familia no genera V ,

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Entonces cualquier familia libre se puede expandir (añadiendo vectores) hasta formar una base.

Demostración.

Si la familia no genera V ,
es porque existe algún vector en V

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Entonces cualquier familia libre se puede expandir (añadiendo vectores) hasta formar una base.

Demostración.

Si la familia no genera V ,
es porque existe algún vector en V
que no se puede expresar como su combinación lineal.

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Entonces cualquier familia libre se puede expandir (añadiendo vectores) hasta formar una base.

Demostración.

Si la familia no genera V ,
es porque existe algún vector en V
que no se puede expresar como su combinación lineal.

Por lo tanto, al añadirlo, la familia sigue siendo libre.

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Entonces cualquier familia libre se puede expandir (añadiendo vectores) hasta formar una base.

Demostración.

Si la familia no genera V ,
es porque existe algún vector en V
que no se puede expresar como su combinación lineal.

Por lo tanto, al añadirlo, la familia sigue siendo libre.

El teorema de la dimensión nos asegura que,

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Entonces cualquier familia libre se puede expandir (añadiendo vectores) hasta formar una base.

Demostración.

Si la familia no genera V ,
es porque existe algún vector en V
que no se puede expresar como su combinación lineal.

Por lo tanto, al añadirlo, la familia sigue siendo libre.

El teorema de la dimensión nos asegura que,
después de añadir un número finito de vectores,

Corolario 1.38.

1.6. Dimensión

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Entonces cualquier familia libre se puede expandir (añadiendo vectores) hasta formar una base.

Demostración.

Si la familia no genera V ,
es porque existe algún vector en V
que no se puede expresar como su combinación lineal.

Por lo tanto, al añadirlo, la familia sigue siendo libre.

El teorema de la dimensión nos asegura que,
después de añadir un número finito de vectores,
obtenemos una familia generadora (y libre). □

Nota 1.39 y definición 1.40.

1.6. Dimensión

Nota 1.39 y definición 1.40.

1.6. Dimensión

Nota 1.39.

Nota 1.39 y definición 1.40.

1.6. Dimensión

Nota 1.39.

Cualquier familia finita de vectores que genere un espacio vectorial

Nota 1.39 y definición 1.40.

1.6. Dimensión

Nota 1.39.

Cualquier familia finita de vectores que genere un espacio vectorial se puede reducir hasta formar una base.

Nota 1.39 y definición 1.40.

1.6. Dimensión

Nota 1.39.

Cualquier familia finita de vectores que genere un espacio vectorial se puede reducir (quitando vectores) hasta formar una base.

Nota 1.39 y definición 1.40.

1.6. Dimensión

Nota 1.39.

Cualquier familia finita de vectores que genere un espacio vectorial se puede reducir (quitando vectores) hasta formar una base.

Definición 1.40.

Nota 1.39 y definición 1.40.

1.6. Dimensión

Nota 1.39.

Cualquier familia finita de vectores que genere un espacio vectorial se puede reducir (quitando vectores) hasta formar una base.

Definición 1.40.

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Nota 1.39 y definición 1.40.

1.6. Dimensión

Nota 1.39.

Cualquier familia finita de vectores que genere un espacio vectorial se puede reducir (quitando vectores) hasta formar una base.

Definición 1.40.

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Llamamos **dimensión**

Nota 1.39 y definición 1.40.

1.6. Dimensión

Nota 1.39.

Cualquier familia finita de vectores que genere un espacio vectorial se puede reducir (quitando vectores) hasta formar una base.

Definición 1.40.

Sea V un espacio vectorial finitamente generado.

Llamamos **dimensión** al número de elementos de cualquier base de V .

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

1. En \mathbb{F}^n los siguientes vectores forman una base:

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

1. En \mathbb{F}^n los siguientes vectores forman una base:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

1. En \mathbb{F}^n los siguientes vectores forman una base:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diremos que (e_1, \dots, e_n) es la **base canónica** de \mathbb{F}^n .

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

1. En \mathbb{F}^n los siguientes vectores forman una base:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diremos que (e_1, \dots, e_n) es la **base canónica** de \mathbb{F}^n .

Luego $\dim \mathbb{F}^n =$

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

1. En \mathbb{F}^n los siguientes vectores forman una base:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diremos que (e_1, \dots, e_n) es la **base canónica** de \mathbb{F}^n .

Luego $\dim \mathbb{F}^n = n$.

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

2. La familia $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ es una base de $\mathbb{F}_n[X]$.

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

2. La familia $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ es una base de $\mathbb{F}_n[X]$.

En consecuencia, $\dim \mathbb{F}_n[X] =$

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

2. La familia $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ es una base de $\mathbb{F}_n[X]$.

En consecuencia, $\dim \mathbb{F}_n[X] = n + 1$.

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

2. La familia $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ es una base de $\mathbb{F}_n[X]$.

En consecuencia, $\dim \mathbb{F}_n[X] = n + 1$.

3. $\dim M_{m \times n}(\mathbb{F}) =$

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

2. La familia $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ es una base de $\mathbb{F}_n[X]$.

En consecuencia, $\dim \mathbb{F}_n[X] = n + 1$.

3. $\dim M_{m \times n}(\mathbb{F}) = mn$.

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

2. La familia $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ es una base de $\mathbb{F}_n[X]$.

En consecuencia, $\dim \mathbb{F}_n[X] = n + 1$.

3. $\dim M_{m \times n}(\mathbb{F}) = mn$.

4. La familia vacía \emptyset es una base del espacio vectorial $\{\bar{0}\}$.

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

2. La familia $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ es una base de $\mathbb{F}_n[X]$.

En consecuencia, $\dim \mathbb{F}_n[X] = n + 1$.

3. $\dim M_{m \times n}(\mathbb{F}) = mn$.

4. La familia vacía \emptyset es una base del espacio vectorial $\{\bar{0}\}$.

Por lo tanto $\dim\{\bar{0}\} =$

Ejemplos 1.41.

1.6. Dimensión

2. La familia $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ es una base de $\mathbb{F}_n[X]$.

En consecuencia, $\dim \mathbb{F}_n[X] = n + 1$.

3. $\dim M_{m \times n}(\mathbb{F}) = mn$.

4. La familia vacía \emptyset es una base del espacio vectorial $\{\bar{0}\}$.

Por lo tanto $\dim\{\bar{0}\} = 0$.

Ejercicios 1.42.

1.6. Dimensión

- 1.18
- 1.19
- 1.20
- 1.21

Capítulo 1. Espacios vectoriales

1.1. Método de Gauss

1.2. Espacios vectoriales

1.3. Subespacios

1.4. Conjuntos generadores

1.5. Dependencia lineal

1.6. Dimensión

1.7. Coordenadas

1.8. Suma directa I

1.9. Suma directa II

Ejercicios espacios vectoriales

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre,

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$,

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces la familia (v_1, \dots, v_n, w) también es libre.

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces la familia (v_1, \dots, v_n, w) también es libre.

Demostración.

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces la familia (v_1, \dots, v_n, w) también es libre.

Demostración.

(Ya usamos este resultado en la demostración del corolario 1.38).

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces la familia (v_1, \dots, v_n, w) también es libre.

Demostración.

(Ya usamos este resultado en la demostración del corolario 1.38).

Supongamos que los escalares λ_i cumplen $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = \bar{0}$,

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces la familia (v_1, \dots, v_n, w) también es libre.

Demostración.

(Ya usamos este resultado en la demostración del corolario 1.38).

Supongamos que los escalares λ_i cumplen $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = \bar{0}$, debemos probar que necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$.

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces la familia (v_1, \dots, v_n, w) también es libre.

Demostración.

(Ya usamos este resultado en la demostración del corolario 1.38).

Supongamos que los escalares λ_i cumplen $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = \bar{0}$, debemos probar que necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$.

- Si $\lambda_{n+1} = 0$,

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces la familia (v_1, \dots, v_n, w) también es libre.

Demostración.

(Ya usamos este resultado en la demostración del corolario 1.38).

Supongamos que los escalares λ_i cumplen $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = \bar{0}$, debemos probar que necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$.

- Si $\lambda_{n+1} = 0$, entonces $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$,

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces la familia (v_1, \dots, v_n, w) también es libre.

Demostración.

(Ya usamos este resultado en la demostración del corolario 1.38).

Supongamos que los escalares λ_i cumplen $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = \bar{0}$, debemos probar que necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$.

- Si $\lambda_{n+1} = 0$, entonces $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$, y como (v_1, \dots, v_n) es libre,

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces la familia (v_1, \dots, v_n, w) también es libre.

Demostración.

(Ya usamos este resultado en la demostración del corolario 1.38).

Supongamos que los escalares λ_i cumplen $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = \bar{0}$, debemos probar que necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$.

- Si $\lambda_{n+1} = 0$, entonces $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$, y como (v_1, \dots, v_n) es libre, necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces la familia (v_1, \dots, v_n, w) también es libre.

Demostración.

(Ya usamos este resultado en la demostración del corolario 1.38).

Supongamos que los escalares λ_i cumplen $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = \bar{0}$, debemos probar que necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$.

- Si $\lambda_{n+1} = 0$, entonces $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$, y como (v_1, \dots, v_n) es libre, necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
- Si $\lambda_{n+1} \neq 0$,

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces la familia (v_1, \dots, v_n, w) también es libre.

Demostración.

(Ya usamos este resultado en la demostración del corolario 1.38).

Supongamos que los escalares λ_i cumplen $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = \bar{0}$, debemos probar que necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$.

- Si $\lambda_{n+1} = 0$, entonces $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$, y como (v_1, \dots, v_n) es libre, necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
- Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, entonces $w = -\lambda_1/\lambda_{n+1} v_1 - \dots - \lambda_n/\lambda_{n+1} v_n$,

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces la familia (v_1, \dots, v_n, w) también es libre.

Demostración.

(Ya usamos este resultado en la demostración del corolario 1.38).

Supongamos que los escalares λ_i cumplen $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = \bar{0}$, debemos probar que necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$.

- Si $\lambda_{n+1} = 0$, entonces $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$, y como (v_1, \dots, v_n) es libre, necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
- Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, entonces $w = -\lambda_1/\lambda_{n+1} v_1 - \dots - \lambda_n/\lambda_{n+1} v_n$, luego $w \in \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$,

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Sea V un espacio vectorial.

1. Si la familia de vectores (v_1, \dots, v_n) es libre, y $w \notin \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces la familia (v_1, \dots, v_n, w) también es libre.

Demostración.

(Ya usamos este resultado en la demostración del corolario 1.38).

Supongamos que los escalares λ_i cumplen $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = \bar{0}$, debemos probar que necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$.

- Si $\lambda_{n+1} = 0$, entonces $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}$, y como (v_1, \dots, v_n) es libre, necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
- Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, entonces $w = -\lambda_1/\lambda_{n+1} v_1 - \dots - \lambda_n/\lambda_{n+1} v_n$, luego $w \in \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, contradicción.



Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita,

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

2. Sea $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ una familia formada exactamente por n vectores.

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

2. Sea $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ una familia formada exactamente por n vectores.

Entonces:

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

2. Sea $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ una familia formada exactamente por n vectores.

Entonces:

$$\mathcal{F} \text{ es base} \iff$$

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

2. Sea $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ una familia formada exactamente por n vectores.

Entonces:

$$\mathcal{F} \text{ es base} \iff \mathcal{F} \text{ es libre} \iff$$

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

2. Sea $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ una familia formada exactamente por n vectores.

Entonces:

$$\mathcal{F} \text{ es base} \iff \mathcal{F} \text{ es libre} \iff \mathcal{F} \text{ genera } V$$

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

2. Sea $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ una familia formada exactamente por n vectores.

Entonces:

$$\mathcal{F} \text{ es base} \iff \mathcal{F} \text{ es libre} \iff \mathcal{F} \text{ genera } V$$

3. Sea S un subespacio de V .

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

2. Sea $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ una familia formada exactamente por n vectores.

Entonces:

$$\mathcal{F} \text{ es base} \iff \mathcal{F} \text{ es libre} \iff \mathcal{F} \text{ genera } V$$

3. Sea S un subespacio de V .

Entonces el espacio vectorial S también es de dimensión finita, y:

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

2. Sea $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ una familia formada exactamente por n vectores.

Entonces:

$$\mathcal{F} \text{ es base} \iff \mathcal{F} \text{ es libre} \iff \mathcal{F} \text{ genera } V$$

3. Sea S un subespacio de V .

Entonces el espacio vectorial S también es de dimensión finita, y:

$$\dim S \leq \dim V$$

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

2. Sea $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ una familia formada exactamente por n vectores.

Entonces:

$$\mathcal{F} \text{ es base} \iff \mathcal{F} \text{ es libre} \iff \mathcal{F} \text{ genera } V$$

3. Sea S un subespacio de V .

Entonces el espacio vectorial S también es de dimensión finita, y:

$$\dim S \leq \dim V$$

Es más:

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

2. Sea $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ una familia formada exactamente por n vectores.

Entonces:

$$\mathcal{F} \text{ es base} \iff \mathcal{F} \text{ es libre} \iff \mathcal{F} \text{ genera } V$$

3. Sea S un subespacio de V .

Entonces el espacio vectorial S también es de dimensión finita, y:

$$\dim S \leq \dim V$$

Es más:

$$\dim S = n \iff$$

Propiedades 1.43.

1.7. Coordenadas

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

2. Sea $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ una familia formada exactamente por n vectores.

Entonces:

$$\mathcal{F} \text{ es base} \iff \mathcal{F} \text{ es libre} \iff \mathcal{F} \text{ genera } V$$

3. Sea S un subespacio de V .

Entonces el espacio vectorial S también es de dimensión finita, y:

$$\dim S \leq \dim V$$

Es más:

$$\dim S = n \iff S = V$$

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

El concepto de dimensión nos da una solución más rápida al ejemplo 1.33.

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

El concepto de dimensión nos da una solución más rápida al ejemplo 1.33.

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada,

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

El concepto de dimensión nos da una solución más rápida al ejemplo 1.33.

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

El concepto de dimensión nos da una solución más rápida al ejemplo 1.33.

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

El concepto de dimensión nos da una solución más rápida al ejemplo 1.33.

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Puesto que la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada,

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

El concepto de dimensión nos da una solución más rápida al ejemplo 1.33.

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Puesto que la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, la dimensión de $V = \text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

El concepto de dimensión nos da una solución más rápida al ejemplo 1.33.

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Puesto que la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, la dimensión de $V = \text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es a lo sumo 2.

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

El concepto de dimensión nos da una solución más rápida al ejemplo 1.33.

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Puesto que la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, la dimensión de $V = \text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es a lo sumo 2.

Si la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ fuera libre,

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

El concepto de dimensión nos da una solución más rápida al ejemplo 1.33.

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Puesto que la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, la dimensión de $V = \text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es a lo sumo 2.

Si la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ fuera libre, entonces la dimensión de $W = \text{span}\langle v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1 \rangle$ sería

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

El concepto de dimensión nos da una solución más rápida al ejemplo 1.33.

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Puesto que la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, la dimensión de $V = \text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es a lo sumo 2.

Si la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ fuera libre, entonces la dimensión de $W = \text{span}\langle v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1 \rangle$ sería 3.

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

El concepto de dimensión nos da una solución más rápida al ejemplo 1.33.

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Puesto que la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, la dimensión de $V = \text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es a lo sumo 2.

Si la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ fuera libre, entonces la dimensión de $W = \text{span}\langle v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1 \rangle$ sería 3.

Pero W está contenido en V ,

Ejemplo 1.44.

1.7. Coordenadas

El concepto de dimensión nos da una solución más rápida al ejemplo 1.33.

Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución.

Puesto que la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, la dimensión de $V = \text{span}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es a lo sumo 2.

Si la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ fuera libre, entonces la dimensión de $W = \text{span}\langle v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1 \rangle$ sería 3.

Pero W está contenido en V , contradicción. □

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V .

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V . Sea v un vector cualquiera de V .

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V . Sea v un vector cualquiera de V .

Como (b_1, \dots, b_n) genera V ,

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V . Sea v un vector cualquiera de V .

Como (b_1, \dots, b_n) genera V , $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V . Sea v un vector cualquiera de V .

Como (b_1, \dots, b_n) genera V , $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (b_1, \dots, b_n) es libre,

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V . Sea v un vector cualquiera de V .

Como (b_1, \dots, b_n) genera V , $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (b_1, \dots, b_n) es libre, dichos coeficientes son únicos.

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V . Sea v un vector cualquiera de V .

Como (b_1, \dots, b_n) genera V , $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (b_1, \dots, b_n) es libre, dichos coeficientes son únicos.

Se dice que el vector columna $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$ son

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V . Sea v un vector cualquiera de V .

Como (b_1, \dots, b_n) genera V , $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (b_1, \dots, b_n) es libre, dichos coeficientes son únicos.

Se dice que el vector columna $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$ son las **coordenadas** del vector $v \in V$ **respecto** de la base \mathcal{B} .

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V . Sea v un vector cualquiera de V .

Como (b_1, \dots, b_n) genera V , $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (b_1, \dots, b_n) es libre, dichos coeficientes son únicos.

Se dice que el vector columna $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$ son las **coordenadas** del vector $v \in V$ **respecto** de la base \mathcal{B} .

Demostración.

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V . Sea v un vector cualquiera de V .

Como (b_1, \dots, b_n) genera V , $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (b_1, \dots, b_n) es libre, dichos coeficientes son únicos.

Se dice que el vector columna $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$ son las **coordenadas** del vector $v \in V$ **respecto** de la base \mathcal{B} .

Demostración.

Veamos la unicidad.

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V . Sea v un vector cualquiera de V .

Como (b_1, \dots, b_n) genera V , $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (b_1, \dots, b_n) es libre, dichos coeficientes son únicos.

Se dice que el vector columna $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$ son las **coordenadas** del vector $v \in V$ **respecto** de la base \mathcal{B} .

Demostración.

Veamos la unicidad. Si también $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$, entonces:

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V . Sea v un vector cualquiera de V .

Como (b_1, \dots, b_n) genera V , $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (b_1, \dots, b_n) es libre, dichos coeficientes son únicos.

Se dice que el vector columna $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$ son las **coordenadas** del vector $v \in V$ **respecto** de la base \mathcal{B} .

Demostración.

Veamos la unicidad. Si también $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$, entonces:

$$\vec{0} = v - v$$

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V . Sea v un vector cualquiera de V .

Como (b_1, \dots, b_n) genera V , $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (b_1, \dots, b_n) es libre, dichos coeficientes son únicos.

Se dice que el vector columna $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$ son las **coordenadas** del vector $v \in V$ **respecto** de la base \mathcal{B} .

Demostración.

Veamos la unicidad. Si también $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$, entonces:

$$\bar{0} = v - v = (\lambda_1 - \mu_1)b_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)b_n$$

Definición 1.45.

1.7. Coordenadas

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita n .

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V . Sea v un vector cualquiera de V .

Como (b_1, \dots, b_n) genera V , $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Como (b_1, \dots, b_n) es libre, dichos coeficientes son únicos.

Se dice que el vector columna $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$ son las **coordenadas** del vector $v \in V$ **respecto** de la base \mathcal{B} .

Demostración.

Veamos la unicidad. Si también $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$, entonces:

$$\vec{0} = v - v = (\lambda_1 - \mu_1)b_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)b_n$$

luego $\lambda_i = \mu_i$ para todo i . □

Notas 1.46.

1.7. Coordenadas

Notas 1.46.

1.7. Coordenadas

1. Al fijar la base \mathcal{B} ,

Notas 1.46.

1.7. Coordenadas

1. Al fijar la base \mathcal{B} , queda definida una aplicación

Notas 1.46.

1.7. Coordenadas

1. Al fijar la base \mathcal{B} , queda definida una aplicación

$$f_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

Notas 1.46.

1.7. Coordenadas

1. Al fijar la base \mathcal{B} , queda definida una aplicación

$$f_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

que envía cada vector $v \in V$

Notas 1.46.

1.7. Coordenadas

1. Al fijar la base \mathcal{B} , queda definida una aplicación

$$f_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

que envía cada vector $v \in V$ a sus coordenadas $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$.

Notas 1.46.

1.7. Coordenadas

1. Al fijar la base \mathcal{B} , queda definida una aplicación

$$f_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

que envía cada vector $v \in V$ a sus coordenadas $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$.

2. Esta aplicación $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva.

Notas 1.46.

1.7. Coordenadas

1. Al fijar la base \mathcal{B} , queda definida una aplicación

$$f_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

que envía cada vector $v \in V$ a sus coordenadas $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$.

2. Esta aplicación $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva.
3. Gracias a haber fijado la base \mathcal{B} ,

Notas 1.46.

1.7. Coordenadas

1. Al fijar la base \mathcal{B} , queda definida una aplicación

$$f_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

que envía cada vector $v \in V$ a sus coordenadas $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$.

2. Esta aplicación $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva.
3. Gracias a haber fijado la base \mathcal{B} , operar en V es como operar en \mathbb{F}^n ,

Notas 1.46.

1.7. Coordenadas

1. Al fijar la base \mathcal{B} , queda definida una aplicación

$$f_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

que envía cada vector $v \in V$ a sus coordenadas $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$.

2. Esta aplicación $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva.
3. Gracias a haber fijado la base \mathcal{B} , operar en V es como operar en \mathbb{F}^n , es decir, para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v, w \in V$:

Notas 1.46.

1.7. Coordenadas

1. Al fijar la base \mathcal{B} , queda definida una aplicación

$$f_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

que envía cada vector $v \in V$ a sus coordenadas $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$.

2. Esta aplicación $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva.
3. Gracias a haber fijado la base \mathcal{B} , operar en V es como operar en \mathbb{F}^n , es decir, para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v, w \in V$:

$$f_{\mathcal{B}}(v + w) = f_{\mathcal{B}}(v) + f_{\mathcal{B}}(w)$$

Notas 1.46.

1.7. Coordenadas

1. Al fijar la base \mathcal{B} , queda definida una aplicación

$$f_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{F}^n$$

que envía cada vector $v \in V$ a sus coordenadas $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$.

2. Esta aplicación $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva.
3. Gracias a haber fijado la base \mathcal{B} , operar en V es como operar en \mathbb{F}^n , es decir, para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v, w \in V$:

$$f_{\mathcal{B}}(v + w) = f_{\mathcal{B}}(v) + f_{\mathcal{B}}(w)$$

$$f_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f_{\mathcal{B}}(v)$$

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra una subfamilia de la familia (v_1, v_2, v_3, v_4)

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra una subfamilia de la familia (v_1, v_2, v_3, v_4) que sea base de $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra una subfamilia de la familia (v_1, v_2, v_3, v_4) que sea base de $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
2. Halla qué vectores w_i pertenecen a $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra una subfamilia de la familia (v_1, v_2, v_3, v_4) que sea base de $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
2. Halla qué vectores w_i pertenecen a $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
3. Calcula las coordenadas de dichos vectores $w_i \in \text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra una subfamilia de la familia (v_1, v_2, v_3, v_4) que sea base de $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
2. Halla qué vectores w_i pertenecen a $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
3. Calcula las coordenadas de dichos vectores $w_i \in \text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ en la base que has calculado en el primer apartado.

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

$$(v_1 | \dots | v_4 | w_1 | \dots | w_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 6 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -4 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

$$(v_1 | \dots | v_4 | w_1 | \dots | w_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 6 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -4 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$\rightarrow \dots \rightarrow$

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

$$(v_1 | \dots | v_4 | w_1 | \dots | w_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 6 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -4 & -2 & -1 \end{array} \right)$$
$$\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (c_1 | \dots | c_8)$$

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

$$(v_1 | \dots | v_4 | w_1 | \dots | w_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 6 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -4 & -2 & -1 \end{array} \right)$$
$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (c_1 | \dots | c_8)$$

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

$$(v_1 | \dots | v_4 | w_1 | \dots | w_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 6 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -4 & -2 & -1 \end{array} \right)$$
$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (c_1 | \dots | c_8)$$

$$c_4 = 2c_1 + 3c_2$$

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

$$(v_1 | \dots | v_4 | w_1 | \dots | w_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 6 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -4 & -2 & -1 \end{array} \right)$$
$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (c_1 | \dots | c_8)$$
$$\Leftarrow c_4 = 2c_1 + 3c_2$$

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

$$(v_1 | \dots | v_4 | w_1 | \dots | w_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 6 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -4 & -2 & -1 \end{array} \right)$$
$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (c_1 | \dots | c_8)$$

$$v_4 = 2v_1 + 3v_2 \quad \Leftarrow \quad c_4 = 2c_1 + 3c_2$$

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

$$(v_1 | \dots | v_4 | w_1 | \dots | w_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 6 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -4 & -2 & -1 \end{array} \right)$$
$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (c_1 | \dots | c_8)$$

$$v_4 = 2v_1 + 3v_2 \quad \Leftarrow \quad c_4 = 2c_1 + 3c_2$$

Al hacer operaciones de Gauss por **filas**

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

$$(v_1 | \dots | v_4 | w_1 | \dots | w_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 6 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -4 & -2 & -1 \end{array} \right)$$
$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (c_1 | \dots | c_8)$$

$$v_4 = 2v_1 + 3v_2 \quad \Leftarrow \quad c_4 = 2c_1 + 3c_2$$

Al hacer operaciones de Gauss por **filas**
las relaciones entre las **columnas** siguen siendo las mismas.

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

1. (v_1, v_2, v_3) es base de $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

1. (v_1, v_2, v_3) es base de $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
2. $w_1, w_2, w_3 \in \text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$,

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

1. (v_1, v_2, v_3) es base de $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
2. $w_1, w_2, w_3 \in \text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, pero $w_4 \notin \text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

1. (v_1, v_2, v_3) es base de $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
2. $w_1, w_2, w_3 \in \text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, pero $w_4 \notin \text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
3. Las coordenadas de w_1 en la base (v_1, v_2, v_3) son $(1, -2, 1)^T$,

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

1. (v_1, v_2, v_3) es base de $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
2. $w_1, w_2, w_3 \in \text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, pero $w_4 \notin \text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
3. Las coordenadas de w_1 en la base (v_1, v_2, v_3) son $(1, -2, 1)^T$, las de w_2 son $(3, 1, -5)^T$,

Ejemplo 1.47.

1.7. Coordenadas

Solución.

1. (v_1, v_2, v_3) es base de $\text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
2. $w_1, w_2, w_3 \in \text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, pero $w_4 \notin \text{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
3. Las coordenadas de w_1 en la base (v_1, v_2, v_3) son $(1, -2, 1)^T$, las de w_2 son $(3, 1, -5)^T$, y las de w_3 son $(1, 0, -2)^T$.



Ejercicios 1.48.

1.7. Coordenadas

- 1.22
- 1.23
- 1.24

Capítulo 1. Espacios vectoriales

1.1. Método de Gauss

1.2. Espacios vectoriales

1.3. Subespacios

1.4. Conjuntos generadores

1.5. Dependencia lineal

1.6. Dimensión

1.7. Coordenadas

1.8. Suma directa I

1.9. Suma directa II

Ejercicios espacios vectoriales

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I



Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\}$$

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\}$$

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V .

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V .

Decimos que la suma $S_1 + \dots + S_n$ es **directa** si

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V .

Decimos que la suma $S_1 + \dots + S_n$ es **directa** si todo vector de $S_1 + \dots + S_n$ se puede expresar de manera única como suma de vectores de S_1, \dots, S_n .

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V .

Decimos que la suma $S_1 + \dots + S_n$ es **directa** si todo vector de $S_1 + \dots + S_n$ se puede expresar de manera única como suma de vectores de S_1, \dots, S_n .

Es decir, si $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$ con $a_i, b_i \in S_i$

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V .

Decimos que la suma $S_1 + \dots + S_n$ es **directa** si todo vector de $S_1 + \dots + S_n$ se puede expresar de manera única como suma de vectores de S_1, \dots, S_n .

Es decir, si $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$ con $a_i, b_i \in S_i$ implica que $a_i = b_i$ para todo i .

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V .

Decimos que la suma $S_1 + \dots + S_n$ es **directa** si todo vector de $S_1 + \dots + S_n$ se puede expresar de manera única como suma de vectores de S_1, \dots, S_n .

Es decir, si $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$ con $a_i, b_i \in S_i$ implica que $a_i = b_i$ para todo i .

Cuando la suma es directa, escribimos $S_1 \oplus \dots \oplus S_n$

Definición 1.49.

1.8. Suma directa I

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V .

Decimos que la suma $S_1 + \dots + S_n$ es **directa** si todo vector de $S_1 + \dots + S_n$ se puede expresar de manera única como suma de vectores de S_1, \dots, S_n .

Es decir, si $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$ con $a_i, b_i \in S_i$ implica que $a_i = b_i$ para todo i .

Cuando la suma es directa, escribimos $S_1 \oplus \dots \oplus S_n$ en lugar de escribir $S_1 + \dots + S_n$.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

- (\implies)

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

- (\implies) Sea $v \in S \cap T$,

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

- (\implies) Sea $v \in S \cap T$, nuestro objetivo es demostrar que $v = \bar{0}$.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

- (\implies) Sea $v \in S \cap T$, nuestro objetivo es demostrar que $v = \bar{0}$.

Observamos que:

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

- (\implies) Sea $v \in S \cap T$, nuestro objetivo es demostrar que $v = \bar{0}$.

Observamos que:

$$v + (-v) = \bar{0}$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

- (\implies) Sea $v \in S \cap T$, nuestro objetivo es demostrar que $v = \bar{0}$.

Observamos que:

$$v + (-v) = \bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

- (\implies) Sea $v \in S \cap T$, nuestro objetivo es demostrar que $v = \bar{0}$.

Observamos que:

$$\underbrace{v}_{\in S} + (-v) = \bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

- (\implies) Sea $v \in S \cap T$, nuestro objetivo es demostrar que $v = \bar{0}$.

Observamos que:

$$\underbrace{v}_{\in S} + \underbrace{(-v)}_{\in T} = \bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

- (\implies) Sea $v \in S \cap T$, nuestro objetivo es demostrar que $v = \bar{0}$.

Observamos que:

$$\underbrace{v}_{\in S} + \underbrace{(-v)}_{\in T} = \bar{0} = \underbrace{\bar{0}}_{\in S} + \bar{0}$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

- (\implies) Sea $v \in S \cap T$, nuestro objetivo es demostrar que $v = \bar{0}$.

Observamos que:

$$\underbrace{v}_{\in S} + \underbrace{(-v)}_{\in T} = \bar{0} = \underbrace{\bar{0}}_{\in S} + \underbrace{\bar{0}}_{\in T}$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

- (\implies) Sea $v \in S \cap T$, nuestro objetivo es demostrar que $v = \bar{0}$.

Observamos que:

$$\underbrace{v}_{\in S} + \underbrace{(-v)}_{\in T} = \bar{0} = \underbrace{\bar{0}}_{\in S} + \underbrace{\bar{0}}_{\in T}$$

Por la unicidad de la suma directa,

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V .

1. S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

- (\implies) Sea $v \in S \cap T$, nuestro objetivo es demostrar que $v = \bar{0}$.

Observamos que:

$$\underbrace{v}_{\in S} + \underbrace{(-v)}_{\in T} = \bar{0} = \underbrace{\bar{0}}_{\in S} + \underbrace{\bar{0}}_{\in T}$$

Por la unicidad de la suma directa, debe ser $v = \bar{0}$ y $-v = \bar{0}$.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

- $(S \oplus T \iff S \cap T = \{\bar{0}\})$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

- ($S \oplus T \iff S \cap T = \{\bar{0}\}$)

Sean $s_1, s_2 \in S$ y $t_1, t_2 \in T$ tales que $s_1 + t_1 = s_2 + t_2$,

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

- ($S \oplus T \iff S \cap T = \{\bar{0}\}$)

Sean $s_1, s_2 \in S$ y $t_1, t_2 \in T$ tales que $s_1 + t_1 = s_2 + t_2$,
debemos probar que $s_1 = s_2$ y $t_1 = t_2$.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

- ($S \oplus T \iff S \cap T = \{\bar{0}\}$)

Sean $s_1, s_2 \in S$ y $t_1, t_2 \in T$ tales que $s_1 + t_1 = s_2 + t_2$,
debemos probar que $s_1 = s_2$ y $t_1 = t_2$.

Notamos que:

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

- ($S \oplus T \iff S \cap T = \{\bar{0}\}$)

Sean $s_1, s_2 \in S$ y $t_1, t_2 \in T$ tales que $s_1 + t_1 = s_2 + t_2$,
debemos probar que $s_1 = s_2$ y $t_1 = t_2$.

Notamos que:

$$s_1 - s_2 = t_2 - t_1$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\blacksquare (S \oplus T \iff S \cap T = \{\bar{0}\})$$

Sean $s_1, s_2 \in S$ y $t_1, t_2 \in T$ tales que $s_1 + t_1 = s_2 + t_2$,
debemos probar que $s_1 = s_2$ y $t_1 = t_2$.

Notamos que:

$$\underbrace{s_1 - s_2}_{\in S} = t_2 - t_1$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\blacksquare (S \oplus T \iff S \cap T = \{\bar{0}\})$$

Sean $s_1, s_2 \in S$ y $t_1, t_2 \in T$ tales que $s_1 + t_1 = s_2 + t_2$,
debemos probar que $s_1 = s_2$ y $t_1 = t_2$.

Notamos que:

$$\underbrace{s_1 - s_2}_{\in S} = \underbrace{t_2 - t_1}_{\in T}$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\blacksquare (S \oplus T \iff S \cap T = \{\bar{0}\})$$

Sean $s_1, s_2 \in S$ y $t_1, t_2 \in T$ tales que $s_1 + t_1 = s_2 + t_2$,
debemos probar que $s_1 = s_2$ y $t_1 = t_2$.

Notamos que:

$$\underbrace{s_1 - s_2}_{\in S} = \underbrace{t_2 - t_1}_{\in T} \in S \cap T$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\blacksquare (S \oplus T \iff S \cap T = \{\bar{0}\})$$

Sean $s_1, s_2 \in S$ y $t_1, t_2 \in T$ tales que $s_1 + t_1 = s_2 + t_2$,
debemos probar que $s_1 = s_2$ y $t_1 = t_2$.

Notamos que:

$$\underbrace{s_1 - s_2}_{\in S} = \underbrace{t_2 - t_1}_{\in T} \in S \cap T$$

Por tanto $s_1 - s_2 = \bar{0}$ y $t_2 - t_1 = \bar{0}$.



Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

2. Si V es de dimensión finita, entonces:

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

2. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$\dim(S + T) =$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

2. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

2. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$$

Demostración.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

2. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$$

Demostración.

Cogemos una base (x_1, \dots, x_r) del subespacio $S \cap T$.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

2. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \underbrace{\dim(S \cap T)}_r$$

Demostración.

Cogemos una base (x_1, \dots, x_r) del subespacio $S \cap T$.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

2. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \underbrace{\dim(S \cap T)}_r$$

Demostración.

Cogemos una base (x_1, \dots, x_r) del subespacio $S \cap T$.

La ampliamos con $\{s_1, \dots, s_m\}$ hasta formar una base de $\{S\}$.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

2. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$\dim(S + T) = \underbrace{\dim S}_{r+m} + \dim T - \underbrace{\dim(S \cap T)}_r$$

Demostración.

Cogemos una base (x_1, \dots, x_r) del subespacio $S \cap T$.

La ampliamos con $\{s_1, \dots, s_m\}$ hasta formar una base de $\{S\}$.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

2. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$\dim(S + T) = \underbrace{\dim S}_{r+m} + \dim T - \underbrace{\dim(S \cap T)}_r$$

Demostración.

Cogemos una base (x_1, \dots, x_r) del subespacio $S \cap T$.

La ampliamos con $\left\{ \begin{matrix} s_1, \dots, s_m \\ t_1, \dots, t_n \end{matrix} \right\}$ hasta formar una base de $\left\{ \begin{matrix} S \\ T \end{matrix} \right\}$.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

2. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$\dim(S + T) = \underbrace{\dim S}_{r+m} + \underbrace{\dim T}_{r+n} - \underbrace{\dim(S \cap T)}_r$$

Demostración.

Cogemos una base (x_1, \dots, x_r) del subespacio $S \cap T$.

La ampliamos con $\left\{ \begin{matrix} s_1, \dots, s_m \\ t_1, \dots, t_n \end{matrix} \right\}$ hasta formar una base de $\left\{ \begin{matrix} S \\ T \end{matrix} \right\}$.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

2. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$\underbrace{\dim(S + T)}_{\text{¿ } r+m+n \text{?}} = \underbrace{\dim S}_{r+m} + \underbrace{\dim T}_{r+n} - \underbrace{\dim(S \cap T)}_r$$

Demostración.

Cogemos una base (x_1, \dots, x_r) del subespacio $S \cap T$.

La ampliamos con $\left\{ \begin{matrix} s_1, \dots, s_m \\ t_1, \dots, t_n \end{matrix} \right\}$ hasta formar una base de $\left\{ \begin{matrix} S \\ T \end{matrix} \right\}$.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

(Recordamos que S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V).

2. Si V es de dimensión finita, entonces:

$$\underbrace{\dim(S + T)}_{\text{¿ } r+m+n \text{?}} = \underbrace{\dim S}_{r+m} + \underbrace{\dim T}_{r+n} - \underbrace{\dim(S \cap T)}_r$$

Demostración.

Cogemos una base (x_1, \dots, x_r) del subespacio $S \cap T$.

La ampliamos con $\left\{ \begin{matrix} s_1, \dots, s_m \\ t_1, \dots, t_n \end{matrix} \right\}$ hasta formar una base de $\left\{ \begin{matrix} S \\ T \end{matrix} \right\}$.

Basta ver que $(x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n)$ es base de $S + T$.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

a) Veamos que esta familia genera $S + T$:

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

a) Veamos que esta familia genera $S + T$:

$$S + T =$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

a) Veamos que esta familia genera $S + T$:

$$S + T = \text{span}\langle x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m \rangle + \text{span}\langle x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_n \rangle$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

a) Veamos que esta familia genera $S + T$:

$$\begin{aligned} S + T &= \text{span}\langle x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m \rangle + \text{span}\langle x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_n \rangle \\ &= \text{span}\langle x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m, x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_n \rangle \end{aligned}$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

a) Veamos que esta familia genera $S + T$:

$$\begin{aligned} S + T &= \text{span}\langle x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m \rangle + \text{span}\langle x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_n \rangle \\ &= \text{span}\langle x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m, x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_n \rangle \\ &= \text{span}\langle x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n \rangle \end{aligned}$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

b) Veamos que la familia es libre.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

b) Veamos que la familia es libre.

Suponemos que:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j + \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k = \bar{0}$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

b) Veamos que la familia es libre.

Suponemos que:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j + \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k = \bar{0}$$

Hay que ver que necesariamente los α_i , los β_j y los γ_k son todos cero.

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j = - \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j}_{\in \mathcal{S}} = - \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j}_{\in S} = - \underbrace{\sum_{k=1}^n \gamma_k t_k}_{\in T}$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j}_{\in S} = \underbrace{- \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k}_{\in T} \in S \cap T$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j}_{\in S} = \underbrace{- \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k}_{\in T} \in S \cap T$$

Como (x_1, \dots, x_r) es base de $S \cap T$,

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j}_{\in S} = \underbrace{- \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k}_{\in T} \in S \cap T$$

Como (x_1, \dots, x_r) es base de $S \cap T$, existen $\delta_1, \dots, \delta_r$ tales que:

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j}_{\in S} = \underbrace{- \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k}_{\in T} \in S \cap T$$

Como (x_1, \dots, x_r) es base de $S \cap T$, existen $\delta_1, \dots, \delta_r$ tales que:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j = \sum_{i=1}^r \delta_i x_i$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j}_{\in S} = \underbrace{- \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k}_{\in T} \in S \cap T$$

Como (x_1, \dots, x_r) es base de $S \cap T$, existen $\delta_1, \dots, \delta_r$ tales que:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j = \sum_{i=1}^r \delta_i x_i$$

Pero $(x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m)$ es familia libre,

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i}_{\in S} + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j = \underbrace{- \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k}_{\in T} \in S \cap T$$

Como (x_1, \dots, x_r) es base de $S \cap T$, existen $\delta_1, \dots, \delta_r$ tales que:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j = \sum_{i=1}^r \delta_i x_i + \sum_{j=1}^m 0 \cdot s_j$$

Pero $(x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m)$ es familia libre,

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j}_{\in S} = \underbrace{- \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k}_{\in T} \in S \cap T$$

Como (x_1, \dots, x_r) es base de $S \cap T$, existen $\delta_1, \dots, \delta_r$ tales que:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j = \sum_{i=1}^r \delta_i x_i + \sum_{j=1}^m 0 \cdot s_j$$

Pero $(x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m)$ es familia libre, luego $\alpha_i = \delta_i$ para todo i ,

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i}_{\in S} + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j = \underbrace{- \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k}_{\in T} \in S \cap T$$

Como (x_1, \dots, x_r) es base de $S \cap T$, existen $\delta_1, \dots, \delta_r$ tales que:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j s_j = \sum_{i=1}^r \delta_i x_i + \sum_{j=1}^m 0 \cdot s_j$$

Pero $(x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m)$ es familia libre, luego $\alpha_i = \delta_i$ para todo i , y $\beta_j = 0$ para todo j .

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

Así la ecuación inicial ahora es:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k = \bar{0}$$

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

Así la ecuación inicial ahora es:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k = \bar{0}$$

Aplicando que $(x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_n)$ es familia libre,

Proposición 1.50.

1.8. Suma directa I

Demostración.

Así la ecuación inicial ahora es:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{k=1}^n \gamma_k t_k = \bar{0}$$

Aplicando que $(x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_n)$ es familia libre, obtenemos que también los α_i y los γ_k son todos cero. □

Notas 1.51.

1.8. Suma directa I

Notas 1.51.

1.8. Suma directa I

1. Dos subespacios S y T de un espacio vectorial V se dicen **suplementarios** si

Notas 1.51.

1.8. Suma directa I

1. Dos subespacios S y T de un espacio vectorial V se dicen **suplementarios** si $S \oplus T = V$,

Notas 1.51.

1.8. Suma directa I

1. Dos subespacios S y T de un espacio vectorial V se dicen **suplementarios** si $S \oplus T = V$, es decir, si tienen suma directa, y dicha suma es el total.

Notas 1.51.

1.8. Suma directa I

1. Dos subespacios S y T de un espacio vectorial V se dicen **suplementarios** si $S \oplus T = V$, es decir, si tienen suma directa, y dicha suma es el total.
2. Si V es de dimensión finita,

Notas 1.51.

1.8. Suma directa I

1. Dos subespacios S y T de un espacio vectorial V se dicen **suplementarios** si $S \oplus T = V$, es decir, si tienen suma directa, y dicha suma es el total.
2. Si V es de dimensión finita, siempre podemos encontrar al menos un suplementario de un subespacio S dado.

Ejercicios 1.52.

1.8. Suma directa I

- 1.25
- 1.26
- 1.27
- 1.28
- 1.29

Capítulo 1. Espacios vectoriales

1.1. Método de Gauss

1.2. Espacios vectoriales

1.3. Subespacios

1.4. Conjuntos generadores

1.5. Dependencia lineal

1.6. Dimensión

1.7. Coordenadas

1.8. Suma directa I

1.9. Suma directa II

Ejercicios espacios vectoriales

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.

Son equivalentes:

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.

Son equivalentes:

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.

Son equivalentes:

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$,

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.

Son equivalentes:

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i ,

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.

Son equivalentes:

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.

Son equivalentes:

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i ,

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.

Son equivalentes:

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \dots + S_n$.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.

Son equivalentes:

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \dots + S_n$.
4. $\dim(S_1 + \dots + S_n) =$

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Sean S_1, \dots, S_n subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.

Son equivalentes:

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \dots + S_n$.
4. $\dim(S_1 + \dots + S_n) = \dim S_1 + \dots + \dim S_n$.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Demostración.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .

Demostración.

- (2 \Rightarrow 1) Si $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$, con $a_i, b_i \in S_i$, entonces:

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .

Demostración.

- (2 \Rightarrow 1) Si $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$, con $a_i, b_i \in S_i$, entonces:

$$(a_1 - b_1) + \dots + (a_n - b_n) = \bar{0}$$

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .

Demostración.

- (2 \Rightarrow 1) Si $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$, con $a_i, b_i \in S_i$, entonces:

$$\underbrace{(a_1 - b_1)}_{\in S_1} + \dots + (a_n - b_n) = \bar{0}$$

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .

Demostración.

- (2 \Rightarrow 1) Si $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$, con $a_i, b_i \in S_i$, entonces:

$$\underbrace{(a_1 - b_1)}_{\in S_1} + \dots + \underbrace{(a_n - b_n)}_{\in S_n} = \bar{0}$$

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .

Demostración.

- (2 \Rightarrow 1) Si $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$, con $a_i, b_i \in S_i$, entonces:

$$\underbrace{(a_1 - b_1)}_{\in S_1} + \dots + \underbrace{(a_n - b_n)}_{\in S_n} = \bar{0}$$

Luego $a_i - b_i = \bar{0}$ para todo i .

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .

Demostración.

- (2 \Rightarrow 1) Si $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$, con $a_i, b_i \in S_i$, entonces:

$$\underbrace{(a_1 - b_1)}_{\in S_1} + \dots + \underbrace{(a_n - b_n)}_{\in S_n} = \bar{0}$$

Luego $a_i - b_i = \bar{0}$ para todo i .

- (1 \Rightarrow 2)

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

1. Los subespacios S_1, \dots, S_n tienen suma directa.
2. Si $v_1 + \dots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .

Demostración.

- (2 \Rightarrow 1) Si $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$, con $a_i, b_i \in S_i$, entonces:

$$\underbrace{(a_1 - b_1)}_{\in S_1} + \dots + \underbrace{(a_n - b_n)}_{\in S_n} = \bar{0}$$

Luego $a_i - b_i = \bar{0}$ para todo i .

- (1 \Rightarrow 2) Evidente.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Demostración.

- $(3 \Rightarrow 2)$

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2)

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Sean $v_i \in S_i$ tales que $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Sean $v_i \in S_i$ tales que $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$.

Para cada i , sea $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots)$ una base de S_i .

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Sean $v_i \in S_i$ tales que $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$.

Para cada i , sea $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots)$ una base de S_i .

Así, fijado i , existen escalares $\lambda_{i,j}$ tales que $v_i = \sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Sean $v_i \in S_i$ tales que $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$.

Para cada i , sea $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots)$ una base de S_i .

Así, fijado i , existen escalares $\lambda_{i,j}$ tales que $v_i = \sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Luego $\bar{0} = \sum_i v_i$

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Sean $v_i \in S_i$ tales que $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$.

Para cada i , sea $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots)$ una base de S_i .

Así, fijado i , existen escalares $\lambda_{i,j}$ tales que $v_i = \sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Luego $\bar{0} = \sum_i v_i = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j} \right)$

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Sean $v_i \in S_i$ tales que $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$.

Para cada i , sea $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots)$ una base de S_i .

Así, fijado i , existen escalares $\lambda_{i,j}$ tales que $v_i = \sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Luego $\bar{0} = \sum_i v_i = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j} \right) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Sean $v_i \in S_i$ tales que $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$.

Para cada i , sea $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots)$ una base de S_i .

Así, fijado i , existen escalares $\lambda_{i,j}$ tales que $v_i = \sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Luego $\bar{0} = \sum_i v_i = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j} \right) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Como $(a_{i,j})$ es familia libre,

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Sean $v_i \in S_i$ tales que $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$.

Para cada i , sea $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots)$ una base de S_i .

Así, fijado i , existen escalares $\lambda_{i,j}$ tales que $v_i = \sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Luego $\bar{0} = \sum_i v_i = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j} \right) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Como $(a_{i,j})$ es familia libre, necesariamente todos los escalares $\lambda_{i,j}$ son 0,

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Sean $v_i \in S_i$ tales que $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$.

Para cada i , sea $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots)$ una base de S_i .

Así, fijado i , existen escalares $\lambda_{i,j}$ tales que $v_i = \sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Luego $\bar{0} = \sum_i v_i = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j} \right) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Como $(a_{i,j})$ es familia libre, necesariamente todos los escalares $\lambda_{i,j}$ son 0, luego todos los v_i son $\bar{0}$.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Sean $v_i \in S_i$ tales que $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$.

Para cada i , sea $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots)$ una base de S_i .

Así, fijado i , existen escalares $\lambda_{i,j}$ tales que $v_i = \sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Luego $\bar{0} = \sum_i v_i = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j} \right) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Como $(a_{i,j})$ es familia libre, necesariamente todos los escalares $\lambda_{i,j}$ son 0, luego todos los v_i son $\bar{0}$.

- (2 \Rightarrow 3)

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

2. Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i , entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i .
3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Sean $v_i \in S_i$ tales que $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$.

Para cada i , sea $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots)$ una base de S_i .

Así, fijado i , existen escalares $\lambda_{i,j}$ tales que $v_i = \sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Luego $\bar{0} = \sum_i v_i = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j} \right) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} a_{i,j}$.

Como $(a_{i,j})$ es familia libre, necesariamente todos los escalares $\lambda_{i,j}$ son 0, luego todos los v_i son $\bar{0}$.

- (2 \Rightarrow 3) Muy similar a la implicación anterior.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

Demostración.

- $(4 \Rightarrow 3)$

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.
4. $\dim(S_1 + \cdots + S_n) = \dim S_1 + \cdots + \dim S_n$.

Demostración.

- $(4 \Rightarrow 3)$

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.
4. $\dim(S_1 + \cdots + S_n) = \dim S_1 + \cdots + \dim S_n$.

Demostración.

- (4 \Rightarrow 3) En general siempre se cumple que,

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.
4. $\dim(S_1 + \cdots + S_n) = \dim S_1 + \cdots + \dim S_n$.

Demostración.

- (4 \Rightarrow 3) En general siempre se cumple que, si juntamos una base de cada S_i ,

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.
4. $\dim(S_1 + \cdots + S_n) = \dim S_1 + \cdots + \dim S_n$.

Demostración.

- (4 \Rightarrow 3) En general siempre se cumple que, si juntamos una base de cada S_i , obtenemos una familia que genera el subespacio $S_1 + \cdots + S_n$.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.
4. $\dim(S_1 + \cdots + S_n) = \dim S_1 + \cdots + \dim S_n$.

Demostración.

- (4 \Rightarrow 3) En general siempre se cumple que, si juntamos una base de cada S_i , obtenemos una familia que genera el subespacio $S_1 + \cdots + S_n$.
Por dimensiones dicha familia es base.

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.
4. $\dim(S_1 + \cdots + S_n) = \dim S_1 + \cdots + \dim S_n$.

Demostración.

- (4 \Rightarrow 3) En general siempre se cumple que, si juntamos una base de cada S_i , obtenemos una familia que genera el subespacio $S_1 + \cdots + S_n$.

Por dimensiones dicha familia es base.

- (3 \Rightarrow 4)

Proposición 1.53.

1.9. Suma directa II

3. Al juntar una base de cada S_i , obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.
4. $\dim(S_1 + \cdots + S_n) = \dim S_1 + \cdots + \dim S_n$.

Demostración.

- (4 \Rightarrow 3) En general siempre se cumple que, si juntamos una base de cada S_i , obtenemos una familia que genera el subespacio $S_1 + \cdots + S_n$.

Por dimensiones dicha familia es base.

- (3 \Rightarrow 4) Evidente.



Ejercicios 1.54.

1.9. Suma directa II

- 1.30

Capítulo 1. Espacios vectoriales

1.1. Método de Gauss

1.2. Espacios vectoriales

1.3. Subespacios

1.4. Conjuntos generadores

1.5. Dependencia lineal

1.6. Dimensión

1.7. Coordenadas

1.8. Suma directa I

1.9. Suma directa II

Ejercicios espacios vectoriales

Ejercicios espacios vectoriales

▶ Ejercicio 1.1.1.

▶ Ejercicio 1.1.2.

▶ Ejercicio 1.2.1.

▶ Ejercicio 1.2.2.

▶ Ejercicio 1.3.

▶ Ejercicio 1.4.

▶ Ejercicio 1.5.1.

▶ Ejercicio 1.5.2.

▶ Ejercicio 1.6.

▶ Ejercicio 1.7.

▶ Ejercicio 1.8.1.

▶ Ejercicio 1.9.1.

▶ Ejercicio 1.9.2.

▶ Ejercicio 1.10.1.

▶ Ejercicio 1.10.2.

▶ Ejercicio 1.11.1.

▶ Ejercicio 1.11.2.

▶ Ejercicio 1.13.

▶ Ejercicio 1.14.

▶ Ejercicio 1.15.

▶ Ejercicio 1.16.

▶ Ejercicio 1.17.

▶ Ejercicio 1.19.1.

▶ Ejercicio 1.24.

▶ Ejercicio 1.25.

▶ Ejercicio 1.28.1.

▶ Ejercicio 1.28.2.

Ejercicio 1.1.1.

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 3 & 1 & a_2 \\ 1 & 7 & a_3 \\ 2 & 4 & a_4 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 3 & 1 & a_2 \\ 1 & 7 & a_3 \\ 2 & 4 & a_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ & & \\ & & \\ & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 3 & 1 & a_2 \\ 1 & 7 & a_3 \\ 2 & 4 & a_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 0 & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 3 & 1 & a_2 \\ 1 & 7 & a_3 \\ 2 & 4 & a_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 0 & 10 & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 3 & 1 & a_2 \\ 1 & 7 & a_3 \\ 2 & 4 & a_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 0 & 10 & -3a_1 + a_2 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 3 & 1 & a_2 \\ 1 & 7 & a_3 \\ 2 & 4 & a_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 0 & 10 & -3a_1 + a_2 \\ 0 & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 3 & 1 & a_2 \\ 1 & 7 & a_3 \\ 2 & 4 & a_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 0 & 10 & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 10 & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 3 & 1 & a_2 \\ 1 & 7 & a_3 \\ 2 & 4 & a_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 0 & 10 & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 10 & -a_1 + a_3 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 3 & 1 & a_2 \\ 1 & 7 & a_3 \\ 2 & 4 & a_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 0 & 10 & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 10 & -a_1 + a_3 \\ 0 & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 3 & 1 & a_2 \\ 1 & 7 & a_3 \\ 2 & 4 & a_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 0 & 10 & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 10 & -a_1 + a_3 \\ 0 & 10 & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 3 & 1 & a_2 \\ 1 & 7 & a_3 \\ 2 & 4 & a_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & a_1 \\ 0 & 10 & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 10 & -a_1 + a_3 \\ 0 & 10 & -2a_1 + a_4 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 3 & 1 & | & a_2 \\ 1 & 7 & | & a_3 \\ 2 & 4 & | & a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 0 & 10 & | & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 10 & | & -a_1 + a_3 \\ 0 & 10 & | & -2a_1 + a_4 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 0 & 10 & | & -3a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 3 & 1 & | & a_2 \\ 1 & 7 & | & a_3 \\ 2 & 4 & | & a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 0 & 10 & | & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 10 & | & -a_1 + a_3 \\ 0 & 10 & | & -2a_1 + a_4 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 0 & 10 & | & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 3 & 1 & | & a_2 \\ 1 & 7 & | & a_3 \\ 2 & 4 & | & a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 0 & 10 & | & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 10 & | & -a_1 + a_3 \\ 0 & 10 & | & -2a_1 + a_4 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 0 & 10 & | & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & | & 2a_1 - a_2 + a_3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 3 & 1 & | & a_2 \\ 1 & 7 & | & a_3 \\ 2 & 4 & | & a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 0 & 10 & | & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 10 & | & -a_1 + a_3 \\ 0 & 10 & | & -2a_1 + a_4 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 0 & 10 & | & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & | & 2a_1 - a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & a_1 \\ 3 & 1 & a_2 \\ 1 & 7 & a_3 \\ 2 & 4 & a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & a_1 \\ 0 & 10 & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 10 & -a_1 + a_3 \\ 0 & 10 & -2a_1 + a_4 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & a_1 \\ 0 & 10 & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & 2a_1 - a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & a_1 - a_2 + a_4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 3 & 1 & | & a_2 \\ 1 & 7 & | & a_3 \\ 2 & 4 & | & a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 0 & 10 & | & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 10 & | & -a_1 + a_3 \\ 0 & 10 & | & -2a_1 + a_4 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 0 & 10 & | & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & | & 2a_1 - a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & | & a_1 - a_2 + a_4 \end{pmatrix}$$

Por tanto el sistema del enunciado es compatible determinado si y solo si:

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 3 & 1 & | & a_2 \\ 1 & 7 & | & a_3 \\ 2 & 4 & | & a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 0 & 10 & | & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 10 & | & -a_1 + a_3 \\ 0 & 10 & | & -2a_1 + a_4 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & a_1 \\ 0 & 10 & | & -3a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & | & 2a_1 - a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & | & a_1 - a_2 + a_4 \end{pmatrix}$$

Por tanto el sistema del enunciado es compatible determinado si y solo si:

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 + a_3 & = 0 \\ a_1 - a_2 & + a_4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Las soluciones de este nuevo sistema son:

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Las soluciones de este nuevo sistema son:

$$a_4 = \lambda \quad a_3 = \mu$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Las soluciones de este nuevo sistema son:

$$a_4 = \lambda \quad a_3 = \mu \quad a_2 = -\mu + 2\lambda$$

Ejercicio 1.1.1.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Las soluciones de este nuevo sistema son:

$$a_4 = \lambda \quad a_3 = \mu \quad a_2 = -\mu + 2\lambda \quad a_1 = -\mu + \lambda$$

Ejercicio 1.1.2.

Ejercicio 1.1.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & & & \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & & \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b_1 + b_2 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -2 & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -2 & 5 & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -2 & 5 & -b_1 + b_3 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -2 & 5 & -b_1 + b_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b_1 + b_2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -2 & 5 & -b_1 + b_3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & | & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & | & b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -2 & 5 & | & -b_1 + b_3 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & -1 & | & \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & | & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & | & b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -2 & 5 & | & -b_1 + b_3 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & -1 & | & -5b_1 + 2b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.1.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & | & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & | & b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -2 & 5 & | & -b_1 + b_3 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & -1 & | & -5b_1 + 2b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

Por tanto el sistema del enunciado es compatible determinado **siempre**.

Ejercicio 1.2.1.

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 5 \\ -2 & 1 & 5 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 5 \\ 1 & 1 & 4 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 5 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & & & | & \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 5 \\ -2 & 1 & 5 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 5 \\ 1 & 1 & 4 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 5 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & & | & \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 5 \\ -2 & 1 & 5 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 5 \\ 1 & 1 & 4 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 5 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & -13 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 5 \\ -2 & 1 & 5 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 5 \\ 1 & 1 & 4 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 5 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & -13 & | & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ & & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & -2 & \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.

Sí que existe.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.2.

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Las soluciones del sistema inicial son:

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Las soluciones del sistema inicial son:

$$x_2 = \lambda$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Las soluciones del sistema inicial son:

$$x_2 = \lambda \qquad x_3 = 3$$

Ejercicio 1.2.2.

No existe.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ -10 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Las soluciones del sistema inicial son:

$$x_2 = \lambda \qquad x_3 = 3 \qquad x_1 = \lambda/5 + 1/5$$

Ejercicio 1.2.2.

Al aplicar operaciones del método de Gauss por filas, las soluciones del sistema no cambian.

Ejercicio 1.2.2.

Al aplicar operaciones del método de Gauss por filas, las soluciones del sistema no cambian.

Los valores $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$ son solución del sistema inicial ($\lambda = 0$).

Ejercicio 1.2.2.

Al aplicar operaciones del método de Gauss por filas, las soluciones del sistema no cambian.

Los valores $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$ son solución del sistema inicial ($\lambda = 0$).

Sin embargo dichos valores no cumplen la ecuación $x_1 - 2x_3 = 0$.

Ejercicio 1.2.2.

Al aplicar operaciones del método de Gauss por filas, las soluciones del sistema no cambian.

Los valores $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$ son solución del sistema inicial ($\lambda = 0$).

Sin embargo dichos valores no cumplen la ecuación $x_1 - 2x_3 = 0$.

Por lo tanto ningún sistema al que podamos llegar, partiendo desde el sistema inicial, podrá contener la ecuación $x_1 - 2x_3 = 0$.

Ejercicio 1.3.

Ejercicio 1.3.

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.3.

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ F_1 + F_2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.3.

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ F_1 + F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.3.

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ F_1 + F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -F_2 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.3.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ F_1 + F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -F_2 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ F_1 + F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -F_2 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ F_1 + F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -F_2 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 - F_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.4.

Ejercicio 1.4.

Vamos a demostrar que todos los sistemas que cumplen las tres propiedades del enunciado tienen la misma solución:

Ejercicio 1.4.

Vamos a demostrar que todos los sistemas que cumplen las tres propiedades del enunciado tienen la misma solución:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 1.4.

Vamos a demostrar que todos los sistemas que cumplen las tres propiedades del enunciado tienen la misma solución:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

Ejercicio 1.4.

Vamos a demostrar que todos los sistemas que cumplen las tres propiedades del enunciado tienen la misma solución: $x = -1$, $y = 2$.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

Ejercicio 1.4.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ a+3d & a+4d & a+5d \\ a+6d & a+7d & a+8d \\ a+9d & a+10d & a+11d \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ a+3d & a+4d & a+5d \\ a+6d & a+7d & a+8d \\ a+9d & a+10d & a+11d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ a+3d & a+4d & a+5d \\ a+6d & a+7d & a+8d \\ a+9d & a+10d & a+11d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 3d & 3d & 3d \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ a+3d & a+4d & a+5d \\ a+6d & a+7d & a+8d \\ a+9d & a+10d & a+11d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 3d & 3d & 3d \\ 6d & 6d & 6d \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ a+3d & a+4d & a+5d \\ a+6d & a+7d & a+8d \\ a+9d & a+10d & a+11d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 3d & 3d & 3d \\ 6d & 6d & 6d \\ 9d & 9d & 9d \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

$$\begin{pmatrix} a & a+d & | & a+2d \\ a+3d & a+4d & | & a+5d \\ a+6d & a+7d & | & a+8d \\ a+9d & a+10d & | & a+11d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & a+d & | & a+2d \\ 3d & 3d & | & 3d \\ 6d & 6d & | & 6d \\ 9d & 9d & | & 9d \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} a & a+d & | & a+2d \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.4.

$$\begin{pmatrix} a & a+d & | & a+2d \\ a+3d & a+4d & | & a+5d \\ a+6d & a+7d & | & a+8d \\ a+9d & a+10d & | & a+11d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & a+d & | & a+2d \\ 3d & 3d & | & 3d \\ 6d & 6d & | & 6d \\ 9d & 9d & | & 9d \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} a & a+d & | & a+2d \\ d & d & | & d \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.4.

$$\begin{pmatrix} a & a+d & | & a+2d \\ a+3d & a+4d & | & a+5d \\ a+6d & a+7d & | & a+8d \\ a+9d & a+10d & | & a+11d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & a+d & | & a+2d \\ 3d & 3d & | & 3d \\ 6d & 6d & | & 6d \\ 9d & 9d & | & 9d \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} a & a+d & | & a+2d \\ d & d & | & d \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.4.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ a+3d & a+4d & a+5d \\ a+6d & a+7d & a+8d \\ a+9d & a+10d & a+11d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 3d & 3d & 3d \\ 6d & 6d & 6d \\ 9d & 9d & 9d \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

$$\begin{pmatrix} a & a+d & | & a+2d \\ a+3d & a+4d & | & a+5d \\ a+6d & a+7d & | & a+8d \\ a+9d & a+10d & | & a+11d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & a+d & | & a+2d \\ 3d & 3d & | & 3d \\ 6d & 6d & | & 6d \\ 9d & 9d & | & 9d \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} a & a+d & | & a+2d \\ d & d & | & d \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que, aunque el sistema tenga tres o más ecuaciones, solo las dos primeras nos aportan información.

Ejercicio 1.4.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ a+3d & a+4d & a+5d \\ a+6d & a+7d & a+8d \\ a+9d & a+10d & a+11d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 3d & 3d & 3d \\ 6d & 6d & 6d \\ 9d & 9d & 9d \end{array} \right)$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Observamos que, aunque el sistema tenga tres o más ecuaciones, solo las dos primeras nos aportan información.

Además nos dicen que el sistema es compatible determinado, luego como mucho puede tener dos incógnitas.

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

Como el sistema es compatible determinado, $d \neq 0$.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

Como el sistema es compatible determinado, $d \neq 0$.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} & & \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

Como el sistema es compatible determinado, $d \neq 0$.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & d & 2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

Como el sistema es compatible determinado, $d \neq 0$.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & d & 2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

Como el sistema es compatible determinado, $d \neq 0$.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & d & 2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

Como el sistema es compatible determinado, $d \neq 0$.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & d & 2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

Como el sistema es compatible determinado, $d \neq 0$.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & d & 2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

Como el sistema es compatible determinado, $d \neq 0$.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & d & 2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.4.

Por tanto el sistema tiene exactamente dos incógnitas.

Como el sistema es compatible determinado, $d \neq 0$.

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ d & d & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & d & 2d \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x & = -1 \\ y & = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.5.1.

Ejercicio 1.5.1.

Sí que es espacio vectorial.

Ejercicio 1.5.1.

Sí que es espacio vectorial.

Hay que demostrar que se cumplen las ocho propiedades.

Ejercicio 1.5.1.

Sí que es espacio vectorial.

Hay que demostrar que se cumplen las ocho propiedades.

¡Cuidado! En dichas propiedades tenemos dos sumas distintas:

Ejercicio 1.5.1.

Sí que es espacio vectorial.

Hay que demostrar que se cumplen las ocho propiedades.

¡Cuidado! En dichas propiedades tenemos dos sumas distintas:

La suma \oplus de vectores.

Ejercicio 1.5.1.

Sí que es espacio vectorial.

Hay que demostrar que se cumplen las ocho propiedades.

¡Cuidado! En dichas propiedades tenemos dos sumas distintas:

La suma \oplus de vectores.

La suma $+$ de escalares.

Ejercicio 1.5.1.

Sí que es espacio vectorial.

Hay que demostrar que se cumplen las ocho propiedades.

¡Cuidado! En dichas propiedades tenemos dos sumas distintas:

La suma \oplus de vectores.

La suma $+$ de escalares.

Y dos productos distintos:

Ejercicio 1.5.1.

Sí que es espacio vectorial.

Hay que demostrar que se cumplen las ocho propiedades.

¡Cuidado! En dichas propiedades tenemos dos sumas distintas:

La suma \oplus de vectores.

La suma $+$ de escalares.

Y dos productos distintos:

El producto \odot de escalar por vector.

Ejercicio 1.5.1.

Sí que es espacio vectorial.

Hay que demostrar que se cumplen las ocho propiedades.

¡Cuidado! En dichas propiedades tenemos dos sumas distintas:

La suma \oplus de vectores.

La suma $+$ de escalares.

Y dos productos distintos:

El producto \odot de escalar por vector.

El producto \cdot de escalares.

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z =$$

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z =$$

$$x \oplus (y \oplus z) =$$

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) =$$

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

$$x \oplus y =$$

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

$$x \oplus y =$$

$$y \oplus x =$$

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

$$x \oplus y = x \cdot y$$

$$y \oplus x =$$

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

$$x \oplus y = x \cdot y$$

$$y \oplus x = y \cdot x$$

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

$$x \oplus y = x \cdot y$$

$$y \oplus x = y \cdot x$$

3. El vector nulo es

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

$$x \oplus y = x \cdot y$$

$$y \oplus x = y \cdot x$$

3. El vector nulo es 1,

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

$$x \oplus y = x \cdot y$$

$$y \oplus x = y \cdot x$$

3. El vector nulo es 1, porque $1 \oplus x =$

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

$$x \oplus y = x \cdot y$$

$$y \oplus x = y \cdot x$$

3. El vector nulo es 1, porque $1 \oplus x = 1 \cdot x$

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

$$x \oplus y = x \cdot y$$

$$y \oplus x = y \cdot x$$

3. El vector nulo es 1, porque $1 \oplus x = 1 \cdot x = x$

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

$$x \oplus y = x \cdot y$$

$$y \oplus x = y \cdot x$$

3. El vector nulo es 1, porque $1 \oplus x = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in (0, \infty)$.

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

$$x \oplus y = x \cdot y$$

$$y \oplus x = y \cdot x$$

3. El vector nulo es 1, porque $1 \oplus x = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in (0, \infty)$.

4. Dado $x \in (0, \infty)$, su vector opuesto es

Ejercicio 1.5.1.

1. Asociatividad:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \cdot (y \cdot z)$$

La asociatividad de la suma en este espacio vectorial es consecuencia de la asociatividad del producto de números reales.

2. Lo mismo sucede con la conmutatividad:

$$x \oplus y = x \cdot y$$

$$y \oplus x = y \cdot x$$

3. El vector nulo es 1, porque $1 \oplus x = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in (0, \infty)$.

4. Dado $x \in (0, \infty)$, su vector opuesto es x^{-1} .

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) =$$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) =$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) =$$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) =$$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x =$$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x =$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) =$$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{(\lambda + \mu)}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) =$$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{(\lambda + \mu)}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) = (x^\lambda) \cdot (x^\mu)$$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{(\lambda + \mu)}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) = (x^\lambda) \cdot (x^\mu)$$

7. Asociatividad:

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{(\lambda + \mu)}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) = (x^\lambda) \cdot (x^\mu)$$

7. Asociatividad:

$$(\lambda \cdot \mu) \odot x =$$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{(\lambda + \mu)}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) = (x^\lambda) \cdot (x^\mu)$$

7. Asociatividad:

$$(\lambda \cdot \mu) \odot x =$$

$$\lambda \odot (\mu \odot x) =$$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{(\lambda + \mu)}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) = (x^\lambda) \cdot (x^\mu)$$

7. Asociatividad:

$$(\lambda \cdot \mu) \odot x = x^{(\lambda \cdot \mu)}$$

$$\lambda \odot (\mu \odot x) =$$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{(\lambda + \mu)}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) = (x^\lambda) \cdot (x^\mu)$$

7. Asociatividad:

$$(\lambda \cdot \mu) \odot x = x^{(\lambda \cdot \mu)}$$

$$\lambda \odot (\mu \odot x) = \lambda \odot (x^\mu)$$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{(\lambda + \mu)}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) = (x^\lambda) \cdot (x^\mu)$$

7. Asociatividad:

$$(\lambda \cdot \mu) \odot x = x^{(\lambda \cdot \mu)}$$

$$\lambda \odot (\mu \odot x) = \lambda \odot (x^\mu) = (x^\mu)^\lambda$$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{(\lambda + \mu)}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) = (x^\lambda) \cdot (x^\mu)$$

7. Asociatividad:

$$(\lambda \cdot \mu) \odot x = x^{(\lambda \cdot \mu)}$$

$$\lambda \odot (\mu \odot x) = \lambda \odot (x^\mu) = (x^\mu)^\lambda$$

8. $1 \odot x =$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{(\lambda + \mu)}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) = (x^\lambda) \cdot (x^\mu)$$

7. Asociatividad:

$$(\lambda \cdot \mu) \odot x = x^{(\lambda \cdot \mu)}$$

$$\lambda \odot (\mu \odot x) = \lambda \odot (x^\mu) = (x^\mu)^\lambda$$

8. $1 \odot x = x^1$

Ejercicio 1.5.1.

5. Distributividad:

$$\lambda \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^\lambda$$
$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = (x^\lambda) \cdot (y^\lambda)$$

6. Distributividad:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{(\lambda + \mu)}$$
$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) = (x^\lambda) \cdot (x^\mu)$$

7. Asociatividad:

$$(\lambda \cdot \mu) \odot x = x^{(\lambda \cdot \mu)}$$
$$\lambda \odot (\mu \odot x) = \lambda \odot (x^\mu) = (x^\mu)^\lambda$$

8. $1 \odot x = x^1 = x.$

Ejercicio 1.5.2.

Ejercicio 1.5.2.

No es espacio vectorial.

Ejercicio 1.5.2.

No es espacio vectorial.

Sí que se cumplen las siete primeras propiedades,

Ejercicio 1.5.2.

No es espacio vectorial.

Sí que se cumplen las siete primeras propiedades,
pero falla la octava

Ejercicio 1.5.2.

No es espacio vectorial.

Sí que se cumplen las siete primeras propiedades, pero falla la octava ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Ejercicio 1.5.2.

No es espacio vectorial.

Sí que se cumplen las siete primeras propiedades, pero falla la octava ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Contraejemplo:

Ejercicio 1.5.2.

No es espacio vectorial.

Sí que se cumplen las siete primeras propiedades, pero falla la octava ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Contraejemplo: $x = 7$, $y = 8$, $z = 9$.

Ejercicio 1.5.2.

No es espacio vectorial.

Sí que se cumplen las siete primeras propiedades, pero falla la octava ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Contraejemplo: $x = 7$, $y = 8$, $z = 9$.

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.5.2.

No es espacio vectorial.

Sí que se cumplen las siete primeras propiedades, pero falla la octava ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Contraejemplo: $x = 7$, $y = 8$, $z = 9$.

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 \\ 1 \cdot 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.5.2.

No es espacio vectorial.

Sí que se cumplen las siete primeras propiedades, pero falla la octava ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Contraejemplo: $x = 7$, $y = 8$, $z = 9$.

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 \\ 1 \cdot 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.5.2.

No es espacio vectorial.

Sí que se cumplen las siete primeras propiedades, pero falla la octava ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Contraejemplo: $x = 7$, $y = 8$, $z = 9$.

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 \\ 1 \cdot 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Empecemos contando solamente los de la forma:

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Empecemos contando solamente los de la forma:

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Empecemos contando solamente los de la forma:

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5$$

Por ejemplo:

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Empecemos contando solamente los de la forma:

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5$$

Por ejemplo:

$$\left[v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) \right] + v_5$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Empecemos contando solamente los de la forma:

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5$$

Por ejemplo:

$$\left[v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) \right] + v_5$$

$$\left[((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 \right] + v_5$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Empecemos contando solamente los de la forma:

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5$$

Por ejemplo:

$$\left[v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) \right] + v_5$$

$$\left[((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 \right] + v_5$$

Hay 5 en total;

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Empecemos contando solamente los de la forma:

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5$$

Por ejemplo:

$$\left[v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) \right] + v_5$$

$$\left[((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 \right] + v_5$$

Hay 5 en total;

$$\left[v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) \right] + v_5$$

$$\left[v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \right] + v_5$$

$$\left[(v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) \right] + v_5$$

$$\left[(v_1 + (v_2 + v_3)) + v_4 \right] + v_5$$

$$\left[((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 \right] + v_5$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Empecemos contando solamente los de la forma:

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5$$

Por ejemplo:

$$\left[v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) \right] + v_5$$

$$\left[((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 \right] + v_5$$

Hay 5 en total; tantos como posibles sumas de 4 elementos.

$$\left[v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) \right] + v_5$$

$$\left[v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \right] + v_5$$

$$\left[(v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) \right] + v_5$$

$$\left[(v_1 + (v_2 + v_3)) + v_4 \right] + v_5$$

$$\left[((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 \right] + v_5$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5 \quad \longrightarrow \quad 5 \text{ posibilidades}$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5 \quad \longrightarrow \quad 5 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right]$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5 \quad \longrightarrow \quad 5 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right] \quad \longrightarrow \quad 2 \text{ posibilidades}$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5 \quad \longrightarrow \quad 5 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right] \quad \longrightarrow \quad 2 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 \right] + \left[v_3 + v_4 + v_5 \right]$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5 \quad \longrightarrow \quad 5 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right] \quad \longrightarrow \quad 2 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 \right] + \left[v_3 + v_4 + v_5 \right] \quad \longrightarrow \quad 2 \text{ posibilidades}$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5 \quad \longrightarrow \quad 5 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right] \quad \longrightarrow \quad 2 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 \right] + \left[v_3 + v_4 + v_5 \right] \quad \longrightarrow \quad 2 \text{ posibilidades}$$

$$v_1 + \left[v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \right]$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5 \longrightarrow 5 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right] \longrightarrow 2 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 \right] + \left[v_3 + v_4 + v_5 \right] \longrightarrow 2 \text{ posibilidades}$$

$$v_1 + \left[v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \right] \longrightarrow 5 \text{ posibilidades}$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5 \longrightarrow 5 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right] \longrightarrow 2 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 \right] + \left[v_3 + v_4 + v_5 \right] \longrightarrow 2 \text{ posibilidades}$$

$$v_1 + \left[v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \right] \longrightarrow 5 \text{ posibilidades}$$

En total la solución es 14 posibilidades.

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5 \longrightarrow 5 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right] \longrightarrow 2 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 \right] + \left[v_3 + v_4 + v_5 \right] \longrightarrow 2 \text{ posibilidades}$$

$$v_1 + \left[v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \right] \longrightarrow 5 \text{ posibilidades}$$

En total la solución es 14 posibilidades.

Hemos resuelto el caso $n = 5$ utilizando los casos anteriores $n = 3, 4$.

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5 \longrightarrow 5 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right] \longrightarrow 2 \text{ posibilidades}$$

$$\left[v_1 + v_2 \right] + \left[v_3 + v_4 + v_5 \right] \longrightarrow 2 \text{ posibilidades}$$

$$v_1 + \left[v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \right] \longrightarrow 5 \text{ posibilidades}$$

En total la solución es 14 posibilidades.

Hemos resuelto el caso $n = 5$ utilizando los casos anteriores $n = 3, 4$. Esta técnica en matemáticas se llama **inducción**.

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Para quien quiera profundizar.

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Para quien quiera profundizar.

Sea C_n el número de posibles maneras de agrupar los paréntesis en una suma de n elementos.

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Para quien quiera profundizar.

Sea C_n el número de posibles maneras de agrupar los paréntesis en una suma de n elementos.

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 2 \quad C_4 = 5 \quad C_5 = 14$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Para quien quiera profundizar.

Sea C_n el número de posibles maneras de agrupar los paréntesis en una suma de n elementos.

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 2 \quad C_4 = 5 \quad C_5 = 14$$

$$C_n = \sum_{i=1}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i}$$

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Para quien quiera profundizar.

Sea C_n el número de posibles maneras de agrupar los paréntesis en una suma de n elementos.

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 2 \quad C_4 = 5 \quad C_5 = 14$$

$$C_n = \sum_{i=1}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i}$$

Estos son los **números de Catalán**.

Ejercicio 1.6.

Apartado 1

Para quien quiera profundizar.

Sea C_n el número de posibles maneras de agrupar los paréntesis en una suma de n elementos.

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 2 \quad C_4 = 5 \quad C_5 = 14$$

$$C_n = \sum_{i=1}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i}$$

Estos son los **números de Catalán**.

$$C_n = \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1}$$

Ejercicio 1.6.

Apartados 2 y 3

$$\left[v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \right] + v_5$$

$$\left[v_1 + (v_2 + v_3) \right] + \left[v_4 + v_5 \right]$$

Ejercicio 1.6.

Apartados 2 y 3

$$\left[v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \right] + v_5 = \left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5$$

$$\left[v_1 + (v_2 + v_3) \right] + \left[v_4 + v_5 \right]$$

Ejercicio 1.6.

Apartados 2 y 3

$$\left[v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \right] + v_5 = \left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5$$

$$\left[v_1 + (v_2 + v_3) \right] + \left[v_4 + v_5 \right] = \left[v_1 + v_2 + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right]$$

Ejercicio 1.6.

Apartados 2 y 3

$$\begin{aligned} \left[v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \right] + v_5 &= \left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5 \\ &= \left[(v_1 + v_2) + v_3 + v_4 \right] + v_5 \end{aligned}$$

$$\left[v_1 + (v_2 + v_3) \right] + \left[v_4 + v_5 \right] = \left[v_1 + v_2 + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right]$$

Ejercicio 1.6.

Apartados 2 y 3

$$\begin{aligned} [v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4)] + v_5 &= [v_1 + v_2 + v_3 + v_4] + v_5 \\ &= [(v_1 + v_2) + v_3 + v_4] + v_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [v_1 + (v_2 + v_3)] + [v_4 + v_5] &= [v_1 + v_2 + v_3] + [v_4 + v_5] \\ &= [(v_1 + v_2) + v_3] + [v_4 + v_5] \end{aligned}$$

Ejercicio 1.6.

Apartados 2 y 3

$$\begin{aligned} [v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4)] + v_5 &= [v_1 + v_2 + v_3 + v_4] + v_5 \\ &= [(v_1 + v_2) + v_3 + v_4] + v_5 = [w + v_3 + v_4] + v_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [v_1 + (v_2 + v_3)] + [v_4 + v_5] &= [v_1 + v_2 + v_3] + [v_4 + v_5] \\ &= [(v_1 + v_2) + v_3] + [v_4 + v_5] \end{aligned}$$

Ejercicio 1.6.

Apartados 2 y 3

$$\begin{aligned} \left[v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \right] + v_5 &= \left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \right] + v_5 \\ &= \left[(v_1 + v_2) + v_3 + v_4 \right] + v_5 = \left[w + v_3 + v_4 \right] + v_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[v_1 + (v_2 + v_3) \right] + \left[v_4 + v_5 \right] &= \left[v_1 + v_2 + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right] \\ &= \left[(v_1 + v_2) + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right] = \left[w + v_3 \right] + \left[v_4 + v_5 \right] \end{aligned}$$

Ejercicio 1.6.

Apartados 2 y 3

$$\begin{aligned} [v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4)] + v_5 &= [v_1 + v_2 + v_3 + v_4] + v_5 \\ &= [(v_1 + v_2) + v_3 + v_4] + v_5 = [w + v_3 + v_4] + v_5 \\ &= w + v_3 + v_4 + v_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [v_1 + (v_2 + v_3)] + [v_4 + v_5] &= [v_1 + v_2 + v_3] + [v_4 + v_5] \\ &= [(v_1 + v_2) + v_3] + [v_4 + v_5] = [w + v_3] + [v_4 + v_5] \end{aligned}$$

Ejercicio 1.6.

Apartados 2 y 3

$$\begin{aligned} [v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4)] + v_5 &= [v_1 + v_2 + v_3 + v_4] + v_5 \\ &= [(v_1 + v_2) + v_3 + v_4] + v_5 = [w + v_3 + v_4] + v_5 \\ &= w + v_3 + v_4 + v_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [v_1 + (v_2 + v_3)] + [v_4 + v_5] &= [v_1 + v_2 + v_3] + [v_4 + v_5] \\ &= [(v_1 + v_2) + v_3] + [v_4 + v_5] = [w + v_3] + [v_4 + v_5] \\ &= w + v_3 + v_4 + v_5 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.6.

Apartados 2 y 3

$$\begin{aligned} [v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4)] + v_5 &= [v_1 + v_2 + v_3 + v_4] + v_5 \\ &= [(v_1 + v_2) + v_3 + v_4] + v_5 = [w + v_3 + v_4] + v_5 \\ &= w + v_3 + v_4 + v_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [v_1 + (v_2 + v_3)] + [v_4 + v_5] &= [v_1 + v_2 + v_3] + [v_4 + v_5] \\ &= [(v_1 + v_2) + v_3] + [v_4 + v_5] = [w + v_3] + [v_4 + v_5] \\ &= w + v_3 + v_4 + v_5 \end{aligned}$$

Este argumento se puede repetir para demostrar el caso general a partir de los casos anteriores.

Ejercicio 1.7.

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$,

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

Hay que demostrar la octava propiedad

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

Hay que demostrar la octava propiedad ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

Hay que demostrar la octava propiedad ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

$$1 \cdot v = v$$

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

Hay que demostrar la octava propiedad ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Sea $v \in V$ cualquiera.

$$1 \cdot v = v$$

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

Hay que demostrar la octava propiedad ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Sea $v \in V$ cualquiera.

$$1 \cdot v$$

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

Hay que demostrar la octava propiedad ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Sea $v \in V$ cualquiera.

Por la sobreyectividad, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

$$1 \cdot v$$

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

Hay que demostrar la octava propiedad ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Sea $v \in V$ cualquiera.

Por la sobreyectividad, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

$$1 \cdot v = 1 \cdot (\lambda \cdot w)$$

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

Hay que demostrar la octava propiedad ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Sea $v \in V$ cualquiera.

Por la sobreyectividad, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

$$1 \cdot v = 1 \cdot (\lambda \cdot w) = (1 \cdot \lambda) \cdot w$$

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

Hay que demostrar la octava propiedad ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Sea $v \in V$ cualquiera.

Por la sobreyectividad, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

$$1 \cdot v = 1 \cdot (\lambda \cdot w) = (1 \cdot \lambda) \cdot w = \lambda \cdot w$$

Ejercicio 1.7.

Que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ sea sobreyectivo significa:
Para todo $v \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

Hay que demostrar la octava propiedad ($1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$).

Sea $v \in V$ cualquiera.

Por la sobreyectividad, existen $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in V$ tales que $\lambda w = v$.

$$1 \cdot v = 1 \cdot (\lambda \cdot w) = (1 \cdot \lambda) \cdot w = \lambda \cdot w = v$$

Ejercicio 1.8.1.

Ejercicio 1.8.1.

$$u + v = v + w$$

Ejercicio 1.8.1.

$$u + v = v + w \quad \stackrel{?}{\implies}$$

Ejercicio 1.8.1.

$$u + v = v + w \quad \stackrel{?}{\implies} \quad u = w$$

Ejercicio 1.8.1.

$$u + v = v + w \quad \stackrel{?}{\implies} \quad u = w$$

Sumamos el opuesto de v en ambos lados de la igualdad:

Ejercicio 1.8.1.

$$u + v = v + w \quad \xRightarrow{?} \quad u = w$$

Sumamos el opuesto de v en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{array}{c} (u + v) + (-v) \\ \parallel \\ (v + w) + (-v) \end{array}$$

Ejercicio 1.8.1.

$$u + v = v + w \quad \xRightarrow{?} \quad u = w$$

Sumamos el opuesto de v en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} (u + v) + (-v) &= u + (v + (-v)) \\ &\parallel \\ (v + w) + (-v) & \end{aligned}$$

Ejercicio 1.8.1.

$$u + v = v + w \quad \xRightarrow{?} \quad u = w$$

Sumamos el opuesto de v en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} (u + v) + (-v) &= u + (v + (-v)) = u + \bar{0} \\ &\parallel \\ (v + w) + (-v) & \end{aligned}$$

Ejercicio 1.8.1.

$$u + v = v + w \quad \xRightarrow{?} \quad u = w$$

Sumamos el opuesto de v en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} (u + v) + (-v) &= u + (v + (-v)) = u + \bar{0} = u \\ &\parallel \\ (v + w) + (-v) & \end{aligned}$$

Ejercicio 1.8.1.

$$u + v = v + w \quad \xRightarrow{?} \quad u = w$$

Sumamos el opuesto de v en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} (u + v) + (-v) &= u + (v + (-v)) = u + \bar{0} = u \\ &\parallel \\ (v + w) + (-v) &= (w + v) + (-v) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.8.1.

$$u + v = v + w \quad \xRightarrow{?} \quad u = w$$

Sumamos el opuesto de v en ambos lados de la igualdad:

$$(u + v) + (-v) = u + (v + (-v)) = u + \bar{0} = u$$

||

$$(v + w) + (-v) = (w + v) + (-v) = w + (v + (-v))$$

Ejercicio 1.8.1.

$$u + v = v + w \quad \xRightarrow{?} \quad u = w$$

Sumamos el opuesto de v en ambos lados de la igualdad:

$$(u + v) + (-v) = u + (v + (-v)) = u + \bar{0} = u$$

||

$$(v + w) + (-v) = (w + v) + (-v) = w + (v + (-v)) = w + \bar{0}$$

Ejercicio 1.8.1.

$$u + v = v + w \quad \xRightarrow{?} \quad u = w$$

Sumamos el opuesto de v en ambos lados de la igualdad:

$$(u + v) + (-v) = u + (v + (-v)) = u + \bar{0} = u$$

||

$$(v + w) + (-v) = (w + v) + (-v) = w + (v + (-v)) = w + \bar{0} = w$$

Ejercicio 1.9.1.

Ejercicio 1.9.1.

$$S_1 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 0\}$$

Ejercicio 1.9.1.

$$S_1 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 0\}$$

Sí que es subespacio.

Ejercicio 1.9.1.

$$S_1 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 0\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

Ejercicio 1.9.1.

$$S_1 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 0\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

El vector nulo $(0, 0, 0, 0)^T$ está en S_1 ,

Ejercicio 1.9.1.

$$S_1 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 0\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

El vector nulo $(0, 0, 0, 0)^T$ está en S_1 , ya que $0 + 2 \cdot 0 = 0$.

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para la suma.

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para la suma.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para la suma.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para la suma.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para la suma.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in S_1 \iff$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para la suma.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in S_1 \iff \begin{cases} a_1 + 2d_1 = 0 \\ a_2 + 2d_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para la suma.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in S_1 \iff \begin{cases} a_1 + 2d_1 = 0 \\ a_2 + 2d_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para la suma.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in S_1 \iff \begin{cases} a_1 + 2d_1 = 0 \\ a_2 + 2d_2 = 0 \end{cases}$$

$$(a_1 + a_2) + 2(d_1 + d_2) \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para la suma.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in S_1 \iff \begin{cases} a_1 + 2d_1 = 0 \\ a_2 + 2d_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) + 2(d_1 + d_2) \\ = a_1 + 2d_1 + a_2 + 2d_2 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para la suma.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in S_1 \iff \begin{cases} a_1 + 2d_1 = 0 \\ a_2 + 2d_2 = 0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) + 2(d_1 + d_2) \\ = a_1 + 2d_1 + a_2 + 2d_2 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para la suma.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in S_1 \iff \begin{cases} a_1 + 2d_1 = 0 \\ a_2 + 2d_2 = 0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) + 2(d_1 + d_2) \\ = a_1 + 2d_1 + a_2 + 2d_2 \\ = 0 + 0 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para la suma.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \in S_1 \iff \begin{cases} a_1 + 2d_1 = 0 \\ a_2 + 2d_2 = 0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) + 2(d_1 + d_2) \\ = a_1 + 2d_1 + a_2 + 2d_2 \\ = 0 + 0 = 0 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para el producto por escalares.

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para el producto por escalares.

$$\lambda \in \mathbb{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para el producto por escalares.

$$\lambda \in \mathbb{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in S_1$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para el producto por escalares.

$$\lambda \in \mathbb{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in S_1$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para el producto por escalares.

$$\lambda \in \mathbb{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in S_1 \quad \iff$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para el producto por escalares.

$$\lambda \in \mathbb{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in S_1 \quad \iff \quad a + 2d = 0$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para el producto por escalares.

$$\lambda \in \mathbb{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in S_1 \quad \iff \quad a + 2d = 0$$

$$\iff \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para el producto por escalares.

$$\lambda \in \mathbb{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in S_1 \quad \iff \quad a + 2d = 0$$

$$(\lambda a) + 2(\lambda d) \quad \iff \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para el producto por escalares.

$$\lambda \in \mathbb{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in S_1 \quad \iff \quad a + 2d = 0$$

$$\begin{aligned} (\lambda a) + 2(\lambda d) \\ = \lambda(a + 2d) \end{aligned} \quad \iff \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para el producto por escalares.

$$\lambda \in \mathbb{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in S_1 \quad \iff \quad a + 2d = 0 \quad \implies$$

$$\begin{aligned} &(\lambda a) + 2(\lambda d) \\ &= \lambda(a + 2d) \quad \iff \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix} \in S_1 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para el producto por escalares.

$$\lambda \in \mathbb{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in S_1 \quad \iff \quad a + 2d = 0 \quad \implies$$

$$\begin{aligned} &(\lambda a) + 2(\lambda d) \\ &= \lambda(a + 2d) \quad \iff \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix} \in S_1 \\ &= \lambda \cdot 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.9.1.

Veamos que es cerrado para el producto por escalares.

$$\lambda \in \mathbb{Q} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in S_1 \quad \iff \quad a + 2d = 0 \quad \implies$$

$$\begin{aligned} &(\lambda a) + 2(\lambda d) \\ &= \lambda(a + 2d) \quad \iff \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix} \in S_1 \\ &= \lambda \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.9.2.

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$50 + 2 \cdot (-20) = 10$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$50 + 2 \cdot (-20) = 10$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$50 + 2 \cdot (-20) = 10$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$50 + 2 \cdot (-20) = 10$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$3 + 2 \cdot (-1) = 1$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$50 + 2 \cdot (-20) = 10$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$3 + 2 \cdot (-1) = 1$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$50 + 2 \cdot (-20) = 10$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$3 + 2 \cdot (-1) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$50 + 2 \cdot (-20) = 10$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$3 + 2 \cdot (-1) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$9 + 2 \cdot (-4) = 1$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$50 + 2 \cdot (-20) = 10$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$3 + 2 \cdot (-1) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$9 + 2 \cdot (-4) = 1$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$50 + 2 \cdot (-20) = 10$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$3 + 2 \cdot (-1) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$9 + 2 \cdot (-4) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$50 + 2 \cdot (-20) = 10$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$3 + 2 \cdot (-1) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$9 + 2 \cdot (-4) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$12 + 2 \cdot (-5) = 2$$

Ejercicio 1.9.2.

$$S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$5 + 2 \cdot (-2) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$50 + 2 \cdot (-20) = 10$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$3 + 2 \cdot (-1) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$9 + 2 \cdot (-4) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \notin S_2$$

$$12 + 2 \cdot (-5) = 2$$

Ejercicio 1.10.1.

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

No es subespacio.

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

No es subespacio.

Falla el producto por escalares.

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

No es subespacio.

Falla el producto por escalares. Contraejemplo:

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

No es subespacio.

Falla el producto por escalares. Contraejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

No es subespacio.

Falla el producto por escalares. Contraejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} \in T$$

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

No es subespacio.

Falla el producto por escalares. Contraejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} \in T \qquad i \cdot \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

No es subespacio.

Falla el producto por escalares. Contraejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} \in T \qquad i \cdot \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

No es subespacio.

Falla el producto por escalares. Contraejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} \in T \qquad i \cdot \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ + 2i \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

No es subespacio.

Falla el producto por escalares. Contraejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} \in T \qquad i \cdot \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2i \\ 2 - 3i \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

No es subespacio.

Falla el producto por escalares. Contraejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} \in T \qquad i \cdot \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2i \\ +2i \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

No es subespacio.

Falla el producto por escalares. Contraejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} \in T \qquad i \cdot \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2i \\ +3 + 2i \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.10.1.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

No es subespacio.

Falla el producto por escalares. Contraejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} \in T \qquad i \cdot \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2i \\ +3 + 2i \end{pmatrix} \notin T$$

Ejercicio 1.10.2.

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Sí que es subespacio.

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

$$\lambda \in \mathbb{R},$$

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} \in T$$

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} \in T \quad \implies$$

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} \in T \quad \implies \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} \in T \quad \implies \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} \in T \quad \implies \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda a) \\ \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} \in T \quad \implies \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda a) + (\lambda b)i \\ (\lambda a) - (\lambda b)i \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} \in T \quad \implies \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda a) + (\lambda b)i \\ (\lambda a) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} \in T \quad \implies \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda a) + (\lambda b)i \\ (\lambda a) - (\lambda b)i \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.10.2.

$$T = \{(z, \bar{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Sí que es subespacio.

Hay que demostrar que se cumplen las tres propiedades.

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} \in T \quad \implies \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a + bi \\ a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda a) + (\lambda b)i \\ (\lambda a) - (\lambda b)i \end{pmatrix} \in T$$

Ejercicio 1.11.1.

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa.

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \quad \quad \quad \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \quad \quad \quad \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \quad \quad \quad \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \right. \quad \left. \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, y = 0 \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap N$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, x = 0 \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, x = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, x = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap (M + N)$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, x = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap (M + N) = L \cap \mathbb{R}^2$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, x = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap (M + N) = L \cap \mathbb{R}^2 = L$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, x = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap (M + N) = L \cap \mathbb{R}^2 = L$$

$$(L \cap M) + (L \cap N)$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, x = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap (M + N) = L \cap \mathbb{R}^2 = L$$

$$(L \cap M) + (L \cap N) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 1.11.1.

La igualdad es falsa. Debemos encontrar un contraejemplo.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$M = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

$$N = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

$$L = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$

$$M + N = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$L \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, x = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L \cap (M + N) = L \cap \mathbb{R}^2 = L$$

$$(L \cap M) + (L \cap N) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 1.11.2.

Ejercicio 1.11.2.



Ejercicio 1.11.2.

□ Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$,

Ejercicio 1.11.2.

\square Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

Ejercicio 1.11.2.

\square Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

Ejercicio 1.11.2.

\square Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } x \in L \cap M, y \in L \cap N$$

Ejercicio 1.11.2.

\square Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

\iff existen $x \in L \cap M$, $y \in L \cap N$ tales que $u = x + y$

Ejercicio 1.11.2.

\square Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, x \in M}, y \in L \cap N \text{ tales que } u = x + y$$

Ejercicio 1.11.2.

\square Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, x \in M}, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

Ejercicio 1.11.2.

\square Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, x \in M}, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

$$u \in L \cap (M + (L \cap N))$$

Ejercicio 1.11.2.

\subseteq Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, x \in M}, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

$$u \in L \cap (M + (L \cap N)) \implies u \in L, u \in M + (L \cap N)$$

Ejercicio 1.11.2.

\subseteq Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, x \in M}, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

$$u \in L \cap (M + (L \cap N)) \implies u \in L, u \in M + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } a \in M, b \in L \cap N$$

Ejercicio 1.11.2.

\subseteq Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, x \in M}, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

$$u \in L \cap (M + (L \cap N)) \implies u \in L, u \in M + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } a \in M, b \in L \cap N \text{ tales que } u = a + b$$

Ejercicio 1.11.2.

\subseteq Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, x \in M}, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

$$u \in L \cap (M + (L \cap N)) \implies u \in L, u \in M + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } a \in M, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Ejercicio 1.11.2.

\subseteq Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, x \in M}, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

$$u \in L \cap (M + (L \cap N)) \implies u \in L, u \in M + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } a \in M, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$.

Ejercicio 1.11.2.

\subseteq Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, x \in M}, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

$$u \in L \cap (M + (L \cap N)) \implies u \in L, u \in M + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } a \in M, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$. Nos falta comprobar que $a \in L$.

Ejercicio 1.11.2.

\subseteq Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, x \in M}, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

$$u \in L \cap (M + (L \cap N)) \implies u \in L, u \in M + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } a \in M, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$. Nos falta comprobar que $a \in L$.

$$a = u - b$$

Ejercicio 1.11.2.

\subseteq Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, x \in M}, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

$$u \in L \cap (M + (L \cap N)) \implies u \in L, u \in M + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } a \in M, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$. Nos falta comprobar que $a \in L$.

$$a = \underbrace{u}_{\in L} - b$$

Ejercicio 1.11.2.

\subseteq Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, x \in M}, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

$$u \in L \cap (M + (L \cap N)) \implies u \in L, u \in M + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } a \in M, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$. Nos falta comprobar que $a \in L$.

$$a = \underbrace{u}_{\in L} - \underbrace{b}_{\in L}$$

Ejercicio 1.11.2.

\subseteq Sea $u \in L \cap (M + (L \cap N))$, probaremos que $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

$$u \stackrel{?}{\in} (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\iff \text{existen } \underbrace{x \in L \cap M}_{x \in L, x \in M}, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y$$

$$u \in L \cap (M + (L \cap N)) \implies u \in L, u \in M + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } a \in M, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$. Nos falta comprobar que $a \in L$.

$$a = \underbrace{u}_{\in L} - \underbrace{b}_{\in L} \in L$$

Ejercicio 1.11.2.

Ejercicio 1.11.2.



Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$,

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N))$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) \iff \begin{cases} u \in L \end{cases}$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) \iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases}$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) \iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff$$
$$\iff$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, y \in L \cap N \end{aligned}$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, y \in L \cap N \text{ tales que } u = x + y \end{aligned}$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y \end{aligned}$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y \end{aligned}$$

$$u \in (L \cap M) + (L \cap N)$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y \end{aligned}$$

$$u \in (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } a \in L \cap M, b \in L \cap N$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y \end{aligned}$$

$$u \in (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } a \in L \cap M, b \in L \cap N \text{ tales que } u = a + b$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y \end{aligned}$$

$$u \in (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } \underbrace{a \in L \cap M}_{a \in L, a \in M}, b \in L \cap N \text{ tales que } u = a + b$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y \end{aligned}$$

$$u \in (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } \underbrace{a \in L \cap M}_{a \in L, a \in M}, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y \end{aligned}$$

$$u \in (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } \underbrace{a \in L \cap M}_{a \in L, a \in M}, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$.

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y \end{aligned}$$

$$u \in (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } \underbrace{a \in L \cap M}_{a \in L, a \in M}, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$. Nos falta comprobar que $u \in L$.

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y \end{aligned}$$

$$u \in (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } \underbrace{a \in L \cap M}_{a \in L, a \in M}, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$. Nos falta comprobar que $u \in L$.

$$u = a + b$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y \end{aligned}$$

$$u \in (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } \underbrace{a \in L \cap M}_{a \in L, a \in M}, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$. Nos falta comprobar que $u \in L$.

$$u = \underbrace{a}_{\in L} + b$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y \end{aligned}$$

$$u \in (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } \underbrace{a \in L \cap M}_{a \in L, a \in M}, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$. Nos falta comprobar que $u \in L$.

$$u = \underbrace{a}_{\in L} + \underbrace{b}_{\in L}$$

Ejercicio 1.11.2.

\supseteq Sea $u \in (L \cap M) + (L \cap N)$, probaremos que $u \in L \cap (M + (L \cap N))$.

$$\begin{aligned} u \stackrel{?}{\in} L \cap (M + (L \cap N)) &\iff \begin{cases} u \in L \\ u \in M + (L \cap N) \end{cases} \iff \\ &\iff \text{existen } x \in M, \underbrace{y \in L \cap N}_{y \in L, y \in N} \text{ tales que } u = x + y \end{aligned}$$

$$u \in (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$\implies \text{existen } \underbrace{a \in L \cap M}_{a \in L, a \in M}, \underbrace{b \in L \cap N}_{b \in L, b \in N} \text{ tales que } u = a + b$$

Podemos tomar $x = a$, $y = b$. Nos falta comprobar que $u \in L$.

$$u = \underbrace{a}_{\in L} + \underbrace{b}_{\in L} \in L$$

Ejercicio 1.13.

Ejercicio 1.13.

S, T subespacios.

Ejercicio 1.13.

S, T subespacios.

$S \cup T$ es subespacio

Ejercicio 1.13.

S, T subespacios.

$S \cup T$ es subespacio \iff

Ejercicio 1.13.

S, T subespacios.

$S \cup T$ es subespacio \iff o bien $S \subseteq T$

Ejercicio 1.13.

S, T subespacios.

$S \cup T$ es subespacio \iff o bien $S \subseteq T$ o bien $T \subseteq S$

Ejercicio 1.13.

S, T subespacios.

$S \cup T$ es subespacio \iff o bien $S \subseteq T$ o bien $T \subseteq S$

I \iff D

Ejercicio 1.13.

S, T subespacios.

$S \cup T$ es subespacio \iff o bien $S \subseteq T$ o bien $T \subseteq S$

$$I \iff D$$

Si por ejemplo $S \subseteq T$,

Ejercicio 1.13.

S, T subespacios.

$S \cup T$ es subespacio \iff o bien $S \subseteq T$ o bien $T \subseteq S$

$$I \iff D$$

Si por ejemplo $S \subseteq T$, entonces $S \cup T =$

Ejercicio 1.13.

S, T subespacios.

$S \cup T$ es subespacio \iff o bien $S \subseteq T$ o bien $T \subseteq S$

$$I \iff D$$

Si por ejemplo $S \subseteq T$, entonces $S \cup T = T$.

Ejercicio 1.13.

S, T subespacios.

$S \cup T$ es subespacio \iff o bien $S \subseteq T$ o bien $T \subseteq S$

I \iff D

Si por ejemplo $S \subseteq T$, entonces $S \cup T = T$.

Luego $S \cup T$ es subespacio,

Ejercicio 1.13.

S, T subespacios.

$S \cup T$ es subespacio \iff o bien $S \subseteq T$ o bien $T \subseteq S$

I \iff D

Si por ejemplo $S \subseteq T$, entonces $S \cup T = T$.

Luego $S \cup T$ es subespacio, porque por hipótesis T es subespacio.

Ejercicio 1.13.

S, T subespacios.

$S \cup T$ es subespacio \iff o bien $S \subseteq T$ o bien $T \subseteq S$

I \iff D

Si por ejemplo $S \subseteq T$, entonces $S \cup T = T$.

Luego $S \cup T$ es subespacio, porque por hipótesis T es subespacio.

Análogamente si $T \subseteq S$.

Ejercicio 1.13.

$$I \Rightarrow D$$

Ejercicio 1.13.

$$I \Rightarrow D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$



Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$S \cup T$ no es subespacio \iff

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \quad T \not\subseteq S$$

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio,

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

Ejercicio 1.13.

$I \Rightarrow D$

Probaremos el contrarrecíproco:

$\text{no } I \Leftarrow \text{no } D$

$S \cup T$ no es subespacio $\Leftarrow S \not\subseteq T$ y $T \not\subseteq S$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \\ T \not\subseteq S \end{cases}$$

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \\ T \not\subseteq S \end{cases} \implies$$

Ejercicio 1.13.

$I \Rightarrow D$

Probaremos el contrarrecíproco:

$\text{no } I \Leftarrow \text{no } D$

$S \cup T$ no es subespacio $\Leftarrow S \not\subseteq T$ y $T \not\subseteq S$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \\ T \not\subseteq S \end{cases} \Rightarrow \text{existe } a \in S$$

Ejercicio 1.13.

$I \Rightarrow D$

Probaremos el contrarrecíproco:

$\text{no } I \Leftarrow \text{no } D$

$S \cup T$ no es subespacio $\Leftarrow S \not\subseteq T$ y $T \not\subseteq S$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \\ T \not\subseteq S \end{cases} \Rightarrow \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T$$

Ejercicio 1.13.

I \implies D

Probaremos el contrarrecíproco:

no I \iff no D

$S \cup T$ no es subespacio $\iff S \not\subseteq T$ y $T \not\subseteq S$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T & \implies \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S & \implies \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \implies \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S \implies \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Ejercicio 1.13.

I \implies D

Probaremos el contrarrecíproco:

no I \iff no D

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \implies \text{ existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S \implies \text{ existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Veamos que $a + b$ no está en $S \cup T$

Ejercicio 1.13.

$I \implies D$

Probaremos el contrarrecíproco:

$\text{no } I \iff \text{no } D$

$S \cup T$ **no** es subespacio $\iff S \not\subseteq T$ **y** $T \not\subseteq S$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \implies \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S \implies \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Veamos que $a + b$ no está en $S \cup T$ mediante **reducción al absurdo**.

Ejercicio 1.13.

I \implies D

Probaremos el contrarrecíproco:

no I \iff no D

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \implies \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S \implies \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Veamos que $a + b$ no está en $S \cup T$ mediante **reducción al absurdo**.

Suponemos que $a + b \in S \cup T$,

Ejercicio 1.13.

I \implies D

Probaremos el contrarrecíproco:

no I \iff no D

$S \cup T$ no es subespacio $\iff S \not\subseteq T$ y $T \not\subseteq S$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T & \implies \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S & \implies \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Veamos que $a + b$ no está en $S \cup T$ mediante **reducción al absurdo**.

Suponemos que $a + b \in S \cup T$, y llegaremos a una contradicción.

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \implies \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S \implies \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Veamos que $a + b$ no está en $S \cup T$ mediante **reducción al absurdo**.

Suponemos que $a + b \in S \cup T$, y llegaremos a una contradicción.

Si por ejemplo $a + b \in S$

Ejercicio 1.13.

$I \implies D$

Probaremos el contrarrecíproco:

$\text{no } I \iff \text{no } D$

$S \cup T$ **no** es subespacio $\iff S \not\subseteq T$ **y** $T \not\subseteq S$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \implies \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S \implies \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Veamos que $a + b$ no está en $S \cup T$ mediante **reducción al absurdo**.

Suponemos que $a + b \in S \cup T$, y llegaremos a una contradicción.

Si por ejemplo $a + b \in S$ (**análogamente** si $a + b \in T$),

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \implies \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S \implies \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Veamos que $a + b$ no está en $S \cup T$ mediante **reducción al absurdo**.

Suponemos que $a + b \in S \cup T$, y llegaremos a una contradicción.

Si por ejemplo $a + b \in S$ (**análogamente** si $a + b \in T$), entonces:

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \implies \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S \implies \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Veamos que $a + b$ no está en $S \cup T$ mediante **reducción al absurdo**.

Suponemos que $a + b \in S \cup T$, y llegaremos a una contradicción.

Si por ejemplo $a + b \in S$ (**análogamente** si $a + b \in T$), entonces:

$$b = (a + b) - a$$

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \implies \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S \implies \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Veamos que $a + b$ no está en $S \cup T$ mediante **reducción al absurdo**.

Suponemos que $a + b \in S \cup T$, y llegaremos a una contradicción.

Si por ejemplo $a + b \in S$ (**análogamente** si $a + b \in T$), entonces:

$$b = \underbrace{(a + b)}_{\in S} - a$$

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \implies \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S \implies \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Veamos que $a + b$ no está en $S \cup T$ mediante **reducción al absurdo**.

Suponemos que $a + b \in S \cup T$, y llegaremos a una contradicción.

Si por ejemplo $a + b \in S$ (**análogamente** si $a + b \in T$), entonces:

$$b = \underbrace{(a + b)}_{\in S} - \underbrace{a}_{\in S}$$

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \implies \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S \implies \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Veamos que $a + b$ no está en $S \cup T$ mediante **reducción al absurdo**.

Suponemos que $a + b \in S \cup T$, y llegaremos a una contradicción.

Si por ejemplo $a + b \in S$ (**análogamente** si $a + b \in T$), entonces:

$$b = \underbrace{(a + b)}_{\in S} - \underbrace{a}_{\in S} \in S$$

Ejercicio 1.13.

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

$$S \cup T \text{ no es subespacio} \iff S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S$$

De las tres propiedades de subespacio, la que falla es la de la suma.

$$\begin{cases} S \not\subseteq T \implies \text{existe } a \in S \text{ tal que } a \notin T \\ T \not\subseteq S \implies \text{existe } b \in T \text{ tal que } b \notin S \end{cases}$$

Luego tanto a como b están en $S \cup T$.

Veamos que $a + b$ no está en $S \cup T$ mediante **reducción al absurdo**.

Suponemos que $a + b \in S \cup T$, y llegaremos a una contradicción.

Si por ejemplo $a + b \in S$ (**análogamente** si $a + b \in T$), entonces:

$$b = \underbrace{(a + b)}_{\in S} - \underbrace{a}_{\in S} \in S \quad \text{contradicción}$$

Ejercicio 1.14.

Ejercicio 1.14.

Fijamos un vector $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 1.14.

Fijamos un vector $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

Existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que

Ejercicio 1.14.

Fijamos un vector $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

Existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = t_1 \\ x_1 - x_2 = t_2 \\ x_1 + 2x_2 = t_3 \end{cases}$$

Ejercicio 1.14.

Fijamos un vector $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Existen } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{cases} x_1 + x_2 = t_1 \\ x_1 - x_2 = t_2 \\ x_1 + 2x_2 = t_3 \end{cases} \iff$$



Ejercicio 1.14.

Fijamos un vector $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Existen } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{cases} x_1 + x_2 = t_1 \\ x_1 - x_2 = t_2 \\ x_1 + 2x_2 = t_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q.}$$

Ejercicio 1.14.

Fijamos un vector $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Existen } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{cases} x_1 + x_2 = t_1 \\ x_1 - x_2 = t_2 \\ x_1 + 2x_2 = t_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.14.

Fijamos un vector $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Existen } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{cases} x_1 + x_2 = t_1 \\ x_1 - x_2 = t_2 \\ x_1 + 2x_2 = t_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

\iff

Ejercicio 1.14.

Fijamos un vector $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Existen } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{cases} x_1 + x_2 = t_1 \\ x_1 - x_2 = t_2 \\ x_1 + 2x_2 = t_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in$$

Ejercicio 1.14.

Fijamos un vector $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Existen } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{cases} x_1 + x_2 = t_1 \\ x_1 - x_2 = t_2 \\ x_1 + 2x_2 = t_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejercicio 1.14.

Fijamos un vector $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Existen } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{cases} x_1 + x_2 = t_1 \\ x_1 - x_2 = t_2 \\ x_1 + 2x_2 = t_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = T$$

Ejercicio 1.14.

Fijamos un vector $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Existen } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{cases} x_1 + x_2 = t_1 \\ x_1 - x_2 = t_2 \\ x_1 + 2x_2 = t_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = T$$

Por último, T es subespacio porque

Ejercicio 1.14.

Fijamos un vector $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Existen } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{cases} x_1 + x_2 = t_1 \\ x_1 - x_2 = t_2 \\ x_1 + 2x_2 = t_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = T$$

Por último, T es subespacio porque sabemos que cualquier subconjunto de la forma $\text{span} \langle v_1, v_2 \rangle$ es subespacio.

Ejercicio 1.15.

Ejercicio 1.15.

La familia es libre si y solo si

Ejercicio 1.15.

La familia es libre si y solo si

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ \beta \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.15.

La familia es libre si y solo si

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ \beta \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

implica que necesariamente $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Ejercicio 1.15.

La familia es libre si y solo si

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ \beta \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

implica que necesariamente $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Transformamos esta ecuación vectorial en un sistema de cuatro ecuaciones:

Ejercicio 1.15.

La familia es libre si y solo si

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ \beta \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

implica que necesariamente $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Transformamos esta ecuación vectorial en un sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + \alpha x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - x_3 + \beta x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.15.

La familia es libre si y solo si

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ \beta \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

implica que necesariamente $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Transformamos esta ecuación vectorial en un sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + \alpha x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - x_3 + \beta x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Así el problema se reduce a calcular para qué valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ el sistema es compatible determinado.

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ & & & & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & & 0 \\ & & & & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3\beta - 24 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3\beta - 24 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado \iff

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3\beta - 24 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado \iff

$$\alpha \neq 2$$

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3\beta - 24 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado \iff

$$\alpha \neq 2$$

$$\beta \neq -8$$

Ejercicio 1.15.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & \beta & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \beta + 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta + 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3\beta - 24 & 0 \end{array} \right)$$

La familia es libre \iff el sistema es compatible determinado \iff

$$\alpha \neq 2 \quad \text{y} \quad \beta \neq -8$$

Ejercicio 1.16.

Ejercicio 1.16.

Sea **null** el vector nulo de este espacio vectorial:

Ejercicio 1.16.

Sea **null** el vector nulo de este espacio vectorial:

$$\text{null} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ejercicio 1.16.

Sea **null** el vector nulo de este espacio vectorial:

$$\text{null} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 0$$

Ejercicio 1.16.

Sea **null** el vector nulo de este espacio vectorial:

$$\text{null} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 0$$

Sean λ, μ escalares tales que:

Ejercicio 1.16.

Sea **null** el vector nulo de este espacio vectorial:

$$\begin{aligned}\text{null} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0\end{aligned}$$

Sean λ, μ escalares tales que:

$$\lambda \cdot \text{sen} + \mu \cdot \text{cos} = \text{null}$$

Ejercicio 1.16.

Sea **null** el vector nulo de este espacio vectorial:

$$\begin{aligned}\text{null} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0\end{aligned}$$

Sean λ, μ escalares tales que:

$$\lambda \cdot \text{sen} + \mu \cdot \text{cos} = \text{null}$$

Debemos probar que necesariamente $\lambda = \mu = 0$.

Ejercicio 1.16.

Sea **null** el vector nulo de este espacio vectorial:

$$\begin{aligned}\text{null} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0\end{aligned}$$

Sean λ, μ escalares tales que:

$$\lambda \cdot \text{sen} + \mu \cdot \text{cos} = \text{null}$$

Debemos probar que necesariamente $\lambda = \mu = 0$.

Convertimos esta ecuación vectorial en un sistema de **infinitas** ecuaciones:

Ejercicio 1.16.

Sea **null** el vector nulo de este espacio vectorial:

$$\begin{aligned}\text{null} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0\end{aligned}$$

Sean λ, μ escalares tales que:

$$\lambda \cdot \text{sen} + \mu \cdot \text{cos} = \text{null}$$

Debemos probar que necesariamente $\lambda = \mu = 0$.

Convertimos esta ecuación vectorial en un sistema de **infinitas** ecuaciones:

$$\lambda \cdot \text{sen}(x) + \mu \cdot \text{cos}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 1.16.

$$\operatorname{sen}(x) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(x) \cdot \mu = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \stackrel{?}{\implies} \quad \lambda = \mu = 0$$

Ejercicio 1.16.

$$\operatorname{sen}(x) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(x) \cdot \mu = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \stackrel{?}{\implies} \quad \lambda = \mu = 0$$

Resolver estas infinitas ecuaciones nos llevaría mucho rato.

Ejercicio 1.16.

$$\operatorname{sen}(x) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(x) \cdot \mu = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \stackrel{?}{\implies} \quad \lambda = \mu = 0$$

Resolver estas infinitas ecuaciones nos llevaría mucho rato.

Idea:

Ejercicio 1.16.

$$\operatorname{sen}(x) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(x) \cdot \mu = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \stackrel{?}{\implies} \quad \lambda = \mu = 0$$

Resolver estas infinitas ecuaciones nos llevaría mucho rato.

Idea: De las infinitas ecuaciones, vamos a coger unas pocas,

Ejercicio 1.16.

$$\operatorname{sen}(x) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(x) \cdot \mu = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \stackrel{?}{\implies} \quad \lambda = \mu = 0$$

Resolver estas infinitas ecuaciones nos llevaría mucho rato.

Idea: De las infinitas ecuaciones, vamos a coger unas pocas, con la esperanza de que el subsistema resultante sea compatible determinado.

Ejercicio 1.16.

$$\operatorname{sen}(x) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(x) \cdot \mu = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \stackrel{?}{\implies} \quad \lambda = \mu = 0$$

Resolver estas infinitas ecuaciones nos llevaría mucho rato.

Idea: De las infinitas ecuaciones, vamos a coger unas pocas, con la esperanza de que el subsistema resultante sea compatible determinado.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(0) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(0) \cdot \mu = 0 \\ \operatorname{sen}(\pi/6) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(\pi/6) \cdot \mu = 0 \\ \operatorname{sen}(\pi/4) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(\pi/4) \cdot \mu = 0 \\ \operatorname{sen}(\pi/3) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(\pi/3) \cdot \mu = 0 \\ \operatorname{sen}(\pi/2) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(\pi/2) \cdot \mu = 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 1.16.

$$\operatorname{sen}(x) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(x) \cdot \mu = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \stackrel{?}{\implies} \quad \lambda = \mu = 0$$

Resolver estas infinitas ecuaciones nos llevaría mucho rato.

Idea: De las infinitas ecuaciones, vamos a coger unas pocas, con la esperanza de que el subsistema resultante sea compatible determinado.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(0) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(0) \cdot \mu = 0 \\ \operatorname{sen}(\pi/6) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(\pi/6) \cdot \mu = 0 \\ \operatorname{sen}(\pi/4) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(\pi/4) \cdot \mu = 0 \\ \operatorname{sen}(\pi/3) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(\pi/3) \cdot \mu = 0 \\ \operatorname{sen}(\pi/2) \cdot \lambda + \operatorname{cos}(\pi/2) \cdot \mu = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \mu = 0 \\ (\sqrt{1}/2) \cdot \lambda + (\sqrt{3}/2) \cdot \mu = 0 \\ (\sqrt{2}/2) \cdot \lambda + (\sqrt{2}/2) \cdot \mu = 0 \\ (\sqrt{3}/2) \cdot \lambda + (\sqrt{1}/2) \cdot \mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 1.17.

Ejercicio 1.17.

(a_1, \dots, a_n) es libre

Ejercicio 1.17.

(a_1, \dots, a_n) es libre \iff

Ejercicio 1.17.

$$(a_1, \dots, a_n) \text{ es libre} \iff \left\{ \right.$$

Ejercicio 1.17.

$$(a_1, \dots, a_n) \text{ es libre} \iff \begin{cases} a_1 \neq \bar{0} \end{cases}$$

Ejercicio 1.17.

$$(a_1, \dots, a_n) \text{ es libre} \iff \begin{cases} a_1 \neq \bar{0} \\ a_k \notin \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle \end{cases}$$

Ejercicio 1.17.

$$(a_1, \dots, a_n) \text{ es libre} \iff \begin{cases} a_1 \neq \bar{0} \\ a_k \notin \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle \quad \forall k = 2, \dots, n \end{cases}$$

Ejercicio 1.17.

$$(a_1, \dots, a_n) \text{ es libre} \iff \begin{cases} a_1 \neq \bar{0} \\ a_k \notin \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle \quad \forall k = 2, \dots, n \end{cases}$$

I \implies D

Ejercicio 1.17.

$$(a_1, \dots, a_n) \text{ es libre} \iff \begin{cases} a_1 \neq \bar{0} \\ a_k \notin \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle \quad \forall k = 2, \dots, n \end{cases}$$

I \implies D

Hemos visto en teoría que una familia es ligada si contiene al vector nulo,

Ejercicio 1.17.

$$(a_1, \dots, a_n) \text{ es libre} \iff \begin{cases} a_1 \neq \bar{0} \\ a_k \notin \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle \quad \forall k = 2, \dots, n \end{cases}$$

I \implies D

Hemos visto en teoría que una familia es ligada si contiene al vector nulo, o si un vector se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$
o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos)

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea:

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea: Sea k tal que $\lambda_k \neq 0$

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea: Sea k tal que $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea: Sea k tal que $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \bar{0}$$

Ejercicio 1.17.

I \iff D

Probaremos el contrarrecíproco:

no I \implies no D

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea: Sea k tal que $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \bar{0} \qquad \lambda_k \neq 0$$

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea: Sea k tal que $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \bar{0} \quad \lambda_k \neq 0$$

Si $k = 1$,

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea: Sea k tal que $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \bar{0} \quad \lambda_k \neq 0$$

Si $k = 1$, $\lambda_1 a_1 = \bar{0}$,

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea: Sea k tal que $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \bar{0} \quad \lambda_k \neq 0$$

Si $k = 1$, $\lambda_1 a_1 = \bar{0}$, con $\lambda_1 \neq 0$.

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea: Sea k tal que $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \bar{0} \quad \lambda_k \neq 0$$

Si $k = 1$, $\lambda_1 a_1 = \bar{0}$, con $\lambda_1 \neq 0$. Por lo tanto $a_1 = \bar{0}$.

Ejercicio 1.17.

$$I \iff D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \implies \text{no } D$$

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea: Sea k tal que $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \bar{0} \quad \lambda_k \neq 0$$

Si $k = 1$, $\lambda_1 a_1 = \bar{0}$, con $\lambda_1 \neq 0$. Por lo tanto $a_1 = \bar{0}$.

Si $k \geq 2$,

Ejercicio 1.17.

I \iff D

Probaremos el contrarrecíproco:

no I \implies no D

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea: Sea k tal que $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \bar{0} \quad \lambda_k \neq 0$$

Si $k = 1$, $\lambda_1 a_1 = \bar{0}$, con $\lambda_1 \neq 0$. Por lo tanto $a_1 = \bar{0}$.

Si $k \geq 2$, despejamos a_k :

Ejercicio 1.17.

I \iff D

Probaremos el contrarrecíproco:

no I \implies no D

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea: Sea k tal que $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \bar{0} \quad \lambda_k \neq 0$$

Si $k = 1$, $\lambda_1 a_1 = \bar{0}$, con $\lambda_1 \neq 0$. Por lo tanto $a_1 = \bar{0}$.

Si $k \geq 2$, despejamos a_k :

$$a_k = \frac{-\lambda_1}{\lambda_k} \cdot a_1 + \dots + \frac{-\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \cdot a_{k-1}$$

Ejercicio 1.17.

I \iff D

Probaremos el contrarrecíproco:

no I \implies no D

Debemos probar que o bien $a_1 = \bar{0}$

o bien existe $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $a_k \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$.

La hipótesis es que existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no todos nulos) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$$

Idea: Sea k tal que $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \bar{0} \quad \lambda_k \neq 0$$

Si $k = 1$, $\lambda_1 a_1 = \bar{0}$, con $\lambda_1 \neq 0$. Por lo tanto $a_1 = \bar{0}$.

Si $k \geq 2$, despejamos a_k :

$$a_k = \frac{-\lambda_1}{\lambda_k} \cdot a_1 + \dots + \frac{-\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \cdot a_{k-1} \in \text{span}\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$$

Ejercicio 1.19.1.

Ejercicio 1.19.1.

Los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan S_1 ,

Ejercicio 1.19.1.

$$\begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a - b \\ b \end{pmatrix}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan S_1 ,

Ejercicio 1.19.1.

$$\begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a - b \\ b \end{pmatrix} \underline{\underline{a=1, b=0}}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan S_1 ,

Ejercicio 1.19.1.

$$\begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{a=1, b=0} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan S_1 ,

Ejercicio 1.19.1.

$$\begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{a=1, b=0} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan S_1 ,

Ejercicio 1.19.1.

$$\begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{a=1, b=0} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{a=0, b=1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan S_1 ,

Ejercicio 1.19.1.

$$\begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{a=1, b=0} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{a=0, b=1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan S_1 ,

Ejercicio 1.19.1.

$$\begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{a=1, b=0} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{a=0, b=1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan S_1 , y son linealmente independientes

Ejercicio 1.19.1.

$$\begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{a=1, b=0} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{a=0, b=1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan S_1 , y son linealmente independientes

porque no son proporcionales,

Ejercicio 1.19.1.

$$\begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{a=1, b=0} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{a=0, b=1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan S_1 , y son linealmente independientes

porque no son proporcionales, luego forman una base de S_1 .

Ejercicio 1.19.1.

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid a + 2d = 0 \right\}$$

Ejercicio 1.19.1.

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid a + 2d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \mid \right\}$$

Ejercicio 1.19.1.

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid a + 2d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \delta \end{pmatrix} \mid \right\}$$

Ejercicio 1.19.1.

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid a + 2d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \\ \delta \\ \delta \end{pmatrix} \mid \mu, \nu, \delta \in \mathbb{C} \right\}$$

Ejercicio 1.19.1.

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid a + 2d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} \mid \right\}$$

Ejercicio 1.19.1.

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid a + 2d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} \mid \delta, \mu, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

Ejercicio 1.19.1.

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid a + 2d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2\delta \\ \lambda \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} \mid \delta, \mu, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

Ejercicio 1.19.1.

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid a + 2d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2\delta \\ \lambda \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} \mid \delta, \mu, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forman una base de T_1

Ejercicio 1.19.1.

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid a + 2d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2\delta \\ \lambda \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} \mid \delta, \mu, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forman una base de T_1

(son linealmente independientes porque están escalonados).

Ejercicio 1.19.1.

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar una familia generadora de $S_1 + T_1$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar una familia generadora de $S_1 + T_1$ juntamos las familias generadoras de S_1 y T_1 .

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar una familia generadora de $S_1 + T_1$ juntamos las familias generadoras de S_1 y T_1 .

$$S_1 + T_1$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar una familia generadora de $S_1 + T_1$ juntamos las familias generadoras de S_1 y T_1 .

$$S_1 + T_1 = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar una familia generadora de $S_1 + T_1$ juntamos las familias generadoras de S_1 y T_1 .

$$\begin{aligned} S_1 + T_1 &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \right\rangle \end{aligned}$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar una familia generadora de $S_1 + T_1$ juntamos las familias generadoras de S_1 y T_1 .

$$\begin{aligned} S_1 + T_1 &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar una familia generadora de $S_1 + T_1$ juntamos las familias generadoras de S_1 y T_1 .

$$\begin{aligned} S_1 + T_1 &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar una familia generadora de $S_1 + T_1$ juntamos las familias generadoras de S_1 y T_1 .

$$\begin{aligned} S_1 + T_1 &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar una familia generadora de $S_1 + T_1$ juntamos las familias generadoras de S_1 y T_1 .

$$\begin{aligned} S_1 + T_1 &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \right\rangle \end{aligned}$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar una familia generadora de $S_1 + T_1$ juntamos las familias generadoras de S_1 y T_1 .

$$\begin{aligned} S_1 + T_1 &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Ejercicio 1.19.1.

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap T_1$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap T_1$ juntamos las ecuaciones implícitas de S_1 y T_1 .

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap T_1$ juntamos las ecuaciones implícitas de S_1 y T_1 .

Empezamos calculando las ecuaciones implícitas de S_1 .

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap T_1$ juntamos las ecuaciones implícitas de S_1 y T_1 .

Empezamos calculando las ecuaciones implícitas de S_1 .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in S_1$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap T_1$ juntamos las ecuaciones implícitas de S_1 y T_1 .

Empezamos calculando las ecuaciones implícitas de S_1 .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \iff$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap T_1$ juntamos las ecuaciones implícitas de S_1 y T_1 .

Empezamos calculando las ecuaciones implícitas de S_1 .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in S_1 \quad \iff \quad \exists a, b \in \mathbb{C} \text{ t.q.}$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap T_1$ juntamos las ecuaciones implícitas de S_1 y T_1 .

Empezamos calculando las ecuaciones implícitas de S_1 .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in S_1 \iff \exists a, b \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a - b \\ b \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap T_1$ juntamos las ecuaciones implícitas de S_1 y T_1 .

Empezamos calculando las ecuaciones implícitas de S_1 .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in S_1 \iff \exists a, b \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a - b \\ b \end{pmatrix}$$

\iff

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap T_1$ juntamos las ecuaciones implícitas de S_1 y T_1 .

Empezamos calculando las ecuaciones implícitas de S_1 .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in S_1 \iff \exists a, b \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a - b \\ b \end{pmatrix}$$

$$\iff \text{el sistema } \begin{cases} 3a = x_1 \\ a = x_2 \\ a - b = x_3 \\ b = x_4 \end{cases}$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap T_1$ juntamos las ecuaciones implícitas de S_1 y T_1 .

Empezamos calculando las ecuaciones implícitas de S_1 .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in S_1 \iff \exists a, b \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a - b \\ b \end{pmatrix}$$

$$\iff \text{el sistema } \begin{cases} 3a = x_1 \\ a = x_2 \\ a - b = x_3 \\ b = x_4 \end{cases} \text{ es compatible}$$

Ejercicio 1.19.1.

Para hallar las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap T_1$ juntamos las ecuaciones implícitas de S_1 y T_1 .

Empezamos calculando las ecuaciones implícitas de S_1 .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in S_1 \iff \exists a, b \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a - b \\ b \end{pmatrix}$$

$$\iff \text{el sistema } \begin{cases} 3a = x_1 \\ a = x_2 \\ a - b = x_3 \\ b = x_4 \end{cases} \text{ es compatible}$$

(a, b son las incógnitas; x_1, x_2, x_3, x_4 son parámetros fijos)

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ & & \\ & & \\ & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

$S_1 \rightarrow$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad T_1 \rightarrow$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$T_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$T_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$S_1 \cap T_1 \rightarrow$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$T_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$S_1 \cap T_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad T_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$S_1 \cap T_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases} \iff$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad T_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$S_1 \cap T_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 - x_2 + x_4 = 0 \\ -3x_2 + x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad T_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$S_1 \cap T_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 - x_2 + x_4 = 0 \\ -3x_2 + x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

El vector $(\quad , \quad , \quad)^T$ forma una base de $S_1 \cap T_1$.

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad T_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$S_1 \cap T_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 - x_2 + x_4 = 0 \\ -3x_2 + x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

El vector $(, , , -3)^T$ forma una base de $S_1 \cap T_1$.

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad T_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$S_1 \cap T_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 - x_2 + x_4 = 0 \\ -3x_2 + x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

El vector $(6, \quad , \quad , -3)^T$ forma una base de $S_1 \cap T_1$.

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad T_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$S_1 \cap T_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 - x_2 + x_4 = 0 \\ -3x_2 + x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

El vector $(6, 2, \quad, -3)^T$ forma una base de $S_1 \cap T_1$.

Ejercicio 1.19.1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - 3x_2 \end{array} \right)$$

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad T_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$S_1 \cap T_1 \rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 - x_2 + x_4 = 0 \\ -3x_2 + x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

El vector $(6, 2, 5, -3)^T$ forma una base de $S_1 \cap T_1$.

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w = (3a, a, a - b, b)^T$ es un vector genérico de S_1 .

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w = (3a, a, a - b, b)^T$ es un vector genérico de S_1 .

$$w \in T_1$$

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w = (3a, a, a - b, b)^T$ es un vector genérico de S_1 .

$$w \in T_1 \iff$$

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w = (3a, a, a - b, b)^T$ es un vector genérico de S_1 .

$$w \in T_1 \iff w \text{ cumple la ecuación } x_1 + 2x_4 = 0$$

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w = (3a, a, a - b, b)^T$ es un vector genérico de S_1 .

$$w \in T_1 \iff w \text{ cumple la ecuación } x_1 + 2x_4 = 0$$

$$\iff$$

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w = (3a, a, a - b, b)^T$ es un vector genérico de S_1 .

$$w \in T_1 \iff w \text{ cumple la ecuación } x_1 + 2x_4 = 0$$

$$\iff 3a + 2b = 0$$

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w = (3a, a, a - b, b)^T$ es un vector genérico de S_1 .

$$w \in T_1 \iff w \text{ cumple la ecuación } x_1 + 2x_4 = 0$$

$$\iff 3a + 2b = 0 \iff$$

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w = (3a, a, a - b, b)^T$ es un vector genérico de S_1 .

$$w \in T_1 \iff w \text{ cumple la ecuación } x_1 + 2x_4 = 0$$

$$\iff 3a + 2b = 0 \iff b = \frac{-3}{2}a$$

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w = (3a, a, a - b, b)^T$ es un vector genérico de S_1 .

$$w \in T_1 \iff w \text{ cumple la ecuación } x_1 + 2x_4 = 0$$

$$\iff 3a + 2b = 0 \iff b = \frac{-3}{2}a$$

$$\iff$$

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w = (3a, a, a - b, b)^T$ es un vector genérico de S_1 .

$$w \in T_1 \iff w \text{ cumple la ecuación } x_1 + 2x_4 = 0$$

$$\iff 3a + 2b = 0 \iff b = \frac{-3}{2}a$$

$$\iff w = \left(3a, a, \frac{5}{2}a, \frac{-3}{2}a \right)^T$$

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w = (3a, a, a - b, b)^T$ es un vector genérico de S_1 .

$$w \in T_1 \iff w \text{ cumple la ecuación } x_1 + 2x_4 = 0$$

$$\iff 3a + 2b = 0 \iff b = \frac{-3}{2}a$$

$$\iff w = \left(3a, a, \frac{5}{2}a, \frac{-3}{2}a \right)^T$$

$S_1 \cap T_1$

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w = (3a, a, a - b, b)^T$ es un vector genérico de S_1 .

$$w \in T_1 \iff w \text{ cumple la ecuación } x_1 + 2x_4 = 0$$

$$\iff 3a + 2b = 0 \iff b = \frac{-3}{2}a$$

$$\iff w = \left(3a, a, \frac{5}{2}a, \frac{-3}{2}a \right)^T$$

$$S_1 \cap T_1 = \left\{ \left(3a, a, \frac{5}{2}a, \frac{-3}{2}a \right)^T \mid a \in \mathbb{C} \right\}$$

Ejercicio 1.19.1.

Solución alternativa para calcular $S_1 \cap T_1$.

$w = (3a, a, a - b, b)^T$ es un vector genérico de S_1 .

$$w \in T_1 \iff w \text{ cumple la ecuación } x_1 + 2x_4 = 0$$

$$\iff 3a + 2b = 0 \iff b = \frac{-3}{2}a$$

$$\iff w = \left(3a, a, \frac{5}{2}a, \frac{-3}{2}a\right)^T$$

$$S_1 \cap T_1 = \left\{ \left(3a, a, \frac{5}{2}a, \frac{-3}{2}a\right)^T \mid a \in \mathbb{C} \right\} = \text{span} \left\langle \left(3, 1, \frac{5}{2}, \frac{-3}{2}\right)^T \right\rangle$$

Ejercicio 1.24.

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

(|)

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1 | b_2 | b_3 | \quad)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1 | b_2 | b_3 | a_1 | a_2 | a_3 | a_4)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{c|c} ? & \\ ? & \\ ? & \\ ? & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{cc|cc} ? & ? & & \\ ? & ? & & \\ ? & ? & & \\ ? & ? & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} ? & ? & ? & & & \\ ? & ? & ? & & & \\ ? & ? & ? & & & \\ ? & ? & ? & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|c} ? & ? & ? & 1 \\ ? & ? & ? & 0 \\ ? & ? & ? & 0 \\ ? & ? & ? & 0 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cc} ? & ? & ? & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$\rightarrow \dots \rightarrow$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \end{array} \right)$$

Porque (B_1, B_2, B_3) es una familia libre.

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Porque (B_1, B_2, B_3) es una familia libre.

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Porque (B_1, B_2, B_3) es una familia libre.

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Porque (B_1, B_2, B_3) es una familia libre.

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Porque (B_1, B_2, B_3) es una familia libre.

Porque A_3 es linealmente independiente de B_1, B_2, B_3 .

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Porque (B_1, B_2, B_3) es una familia libre.

Porque A_3 es linealmente independiente de B_1, B_2, B_3 .

Ejercicio 1.24.

Fijamos la **base** (A_1, A_2, A_3, A_4) y trabajamos en **coordenadas**.

$$(b_1|b_2|b_3|a_1|a_2|a_3|a_4) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Porque (B_1, B_2, B_3) es una familia libre.

Porque A_3 es linealmente independiente de B_1, B_2, B_3 .

Las operaciones de Gauss son **reversibles**.

Ejercicio 1.24.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.24.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.24.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.24.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.24.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ -5 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.24.

Ejercicio 1.24.

Por último no debemos olvidarnos de deshacer el cambio a coordenadas,

Ejercicio 1.24.

Por último no debemos olvidarnos de deshacer el cambio a coordenadas, para escribir la solución como matrices 2×2 :

Ejercicio 1.24.

Por último no debemos olvidarnos de deshacer el cambio a coordenadas, para escribir la solución como matrices 2×2 :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.24.

Por último no debemos olvidarnos de deshacer el cambio a coordenadas, para escribir la solución como matrices 2×2 :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.24.

Por último no debemos olvidarnos de deshacer el cambio a coordenadas, para escribir la solución como matrices 2×2 :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.25.

Ejercicio 1.25.

$$\dim(S_1 + S_2 + S_3)$$

Ejercicio 1.25.

$$\dim(S_1 + S_2 + S_3) = \dim(S_1 + S_2)$$

Ejercicio 1.25.

$$\dim(S_1 + S_2 + S_3) = \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3$$

Ejercicio 1.25.

$$\dim(S_1 + S_2 + S_3) = \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3]$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1\end{aligned}$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2\end{aligned}$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)\end{aligned}$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3]\end{aligned}$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3]\end{aligned}$$

*

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &\stackrel{*}{=} \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - \dim(S_1 \cap S_2)\end{aligned}$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &\stackrel{*}{=} \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - \dim(S_1 \cap S_2) \\ &\quad - \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)]\end{aligned}$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &\stackrel{*}{=} \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - \dim(S_1 \cap S_2) \\ &\quad - \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3\end{aligned}$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &\stackrel{*}{=} \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - \dim(S_1 \cap S_2) \\ &\quad - \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 \\ &\quad - \dim(S_1 \cap S_2)\end{aligned}$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &\stackrel{*}{=} \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - \dim(S_1 \cap S_2) \\ &\quad - \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 \\ &\quad - \dim(S_1 \cap S_2) - \dim(S_1 \cap S_3)\end{aligned}$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &\stackrel{*}{=} \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - \dim(S_1 \cap S_2) \\ &\quad - \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 \\ &\quad - \dim(S_1 \cap S_2) - \dim(S_1 \cap S_3) - \dim(S_2 \cap S_3)\end{aligned}$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &\stackrel{*}{=} \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - \dim(S_1 \cap S_2) \\ &\quad - \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 \\ &\quad - \dim(S_1 \cap S_2) - \dim(S_1 \cap S_3) - \dim(S_2 \cap S_3) \\ &\quad + \dim(S_1 \cap S_3 \cap S_2 \cap S_3)\end{aligned}$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &\stackrel{*}{=} \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - \dim(S_1 \cap S_2) \\ &\quad - \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 \\ &\quad - \dim(S_1 \cap S_2) - \dim(S_1 \cap S_3) - \dim(S_2 \cap S_3) \\ &\quad + \dim(\underbrace{S_1 \cap S_3 \cap S_2 \cap S_3}_{S_1 \cap S_2 \cap S_3})\end{aligned}$$

Ejercicio 1.25.

$$\begin{aligned}\dim(S_1 + S_2 + S_3) &= \dim(S_1 + S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) + \dim S_3 - \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \\ &\stackrel{*}{=} \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - \dim(S_1 \cap S_2) \\ &\quad - \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)] \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 \\ &\quad - \dim(S_1 \cap S_2) - \dim(S_1 \cap S_3) - \dim(S_2 \cap S_3) \\ &\quad + \dim(\underbrace{S_1 \cap S_3 \cap S_2 \cap S_3}_{S_1 \cap S_2 \cap S_3})\end{aligned}$$

El problema es que, en general:

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \neq (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Ejercicio 1.25.

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \quad (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Ejercicio 1.25.

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \supseteq (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Ejercicio 1.25.

Nuevo ejercicio. Prueba que:

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \supseteq (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Ejercicio 1.25.

Nuevo ejercicio. Prueba que:

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \supseteq (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Y encuentra un ejemplo en el que este contenido sea estricto.

Ejercicio 1.25.

Nuevo ejercicio. Prueba que:

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \supseteq (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Y encuentra un ejemplo en el que este contenido sea estricto.



Ejercicio 1.25.

Nuevo ejercicio. Prueba que:

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \supseteq (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Y encuentra un ejemplo en el que este contenido sea estricto.

$$\implies \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3]$$

Ejercicio 1.25.

Nuevo ejercicio. Prueba que:

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \supseteq (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Y encuentra un ejemplo en el que este contenido sea estricto.

$$\implies \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \geq$$

Ejercicio 1.25.

Nuevo ejercicio. Prueba que:

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \supseteq (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Y encuentra un ejemplo en el que este contenido sea estricto.

$$\implies \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \geq \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)]$$

Ejercicio 1.25.

Nuevo ejercicio. Prueba que:

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \supseteq (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Y encuentra un ejemplo en el que este contenido sea estricto.

$$\implies \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \geq \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)]$$

\implies

Ejercicio 1.25.

Nuevo ejercicio. Prueba que:

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \supseteq (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Y encuentra un ejemplo en el que este contenido sea estricto.

$$\implies \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \geq \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)]$$

$$\implies -\dim[(S_1 + S_2) \cap S_3]$$

Ejercicio 1.25.

Nuevo ejercicio. Prueba que:

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \supseteq (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Y encuentra un ejemplo en el que este contenido sea estricto.

$$\implies \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \geq \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)]$$

$$\implies -\dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \leq$$

Ejercicio 1.25.

Nuevo ejercicio. Prueba que:

$$(S_1 + S_2) \cap S_3 \supseteq (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$$

Y encuentra un ejemplo en el que este contenido sea estricto.

$$\implies \dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \geq \dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)]$$

$$\implies -\dim[(S_1 + S_2) \cap S_3] \leq -\dim[(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)]$$

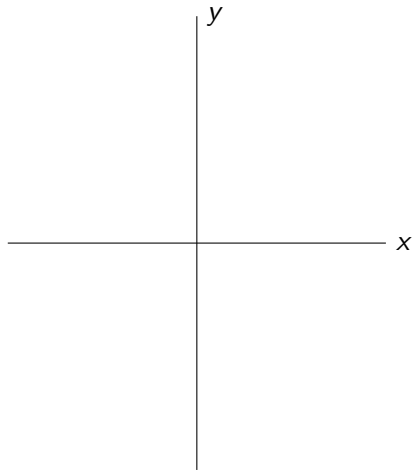
Ejercicio 1.28.1.

Ejercicio 1.28.1.

Función Par

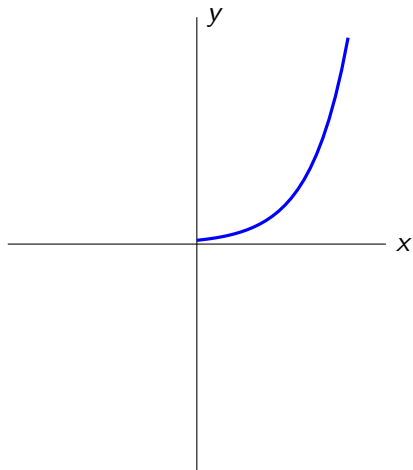
Ejercicio 1.28.1.

Función Par



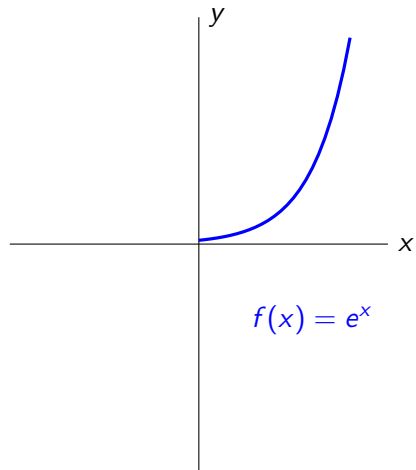
Ejercicio 1.28.1.

Función Par



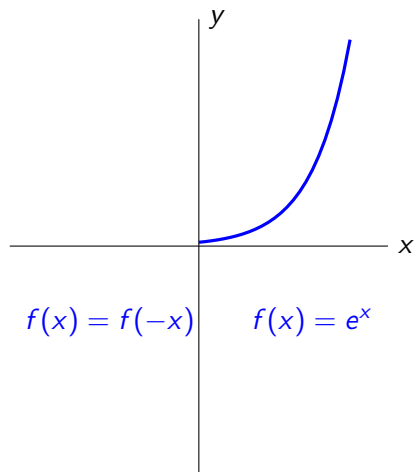
Ejercicio 1.28.1.

Función Par



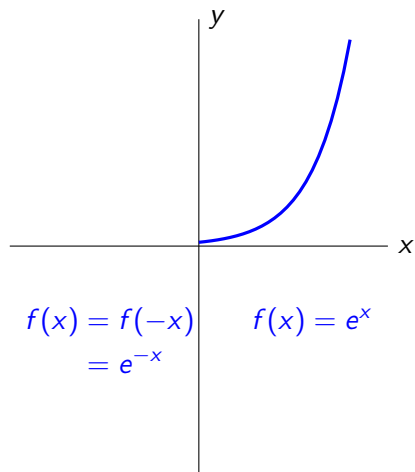
Ejercicio 1.28.1.

Función Par



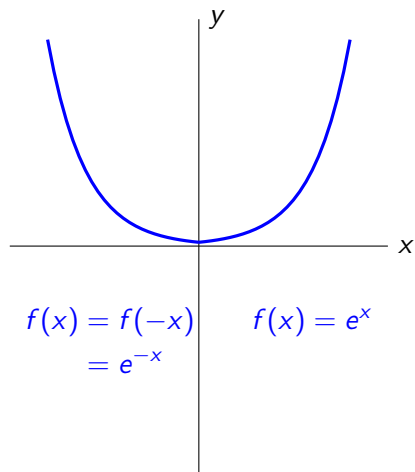
Ejercicio 1.28.1.

Función Par



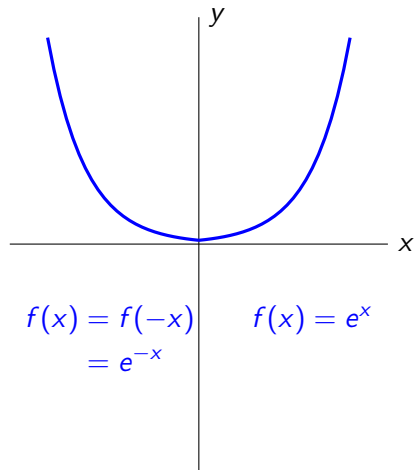
Ejercicio 1.28.1.

Función Par



Ejercicio 1.28.1.

Función Par

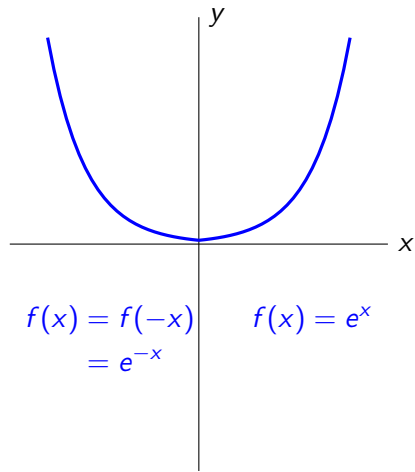


Función Impar

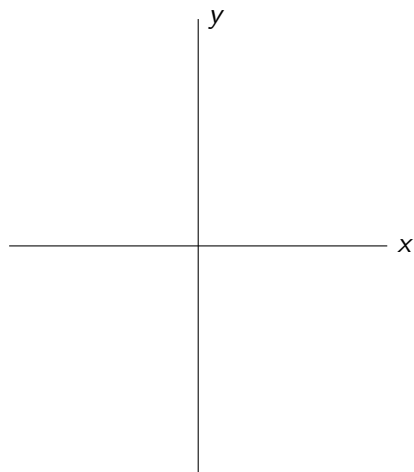
$$f(x) = e^x$$

Ejercicio 1.28.1.

Función Par

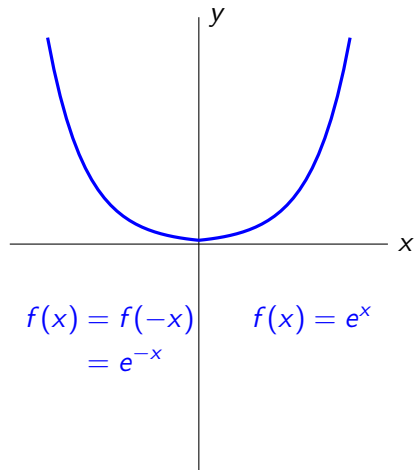


Función Impar

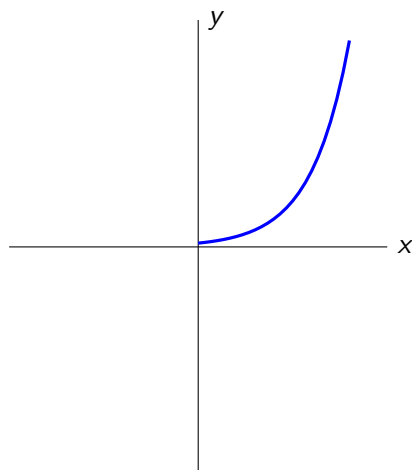


Ejercicio 1.28.1.

Función Par

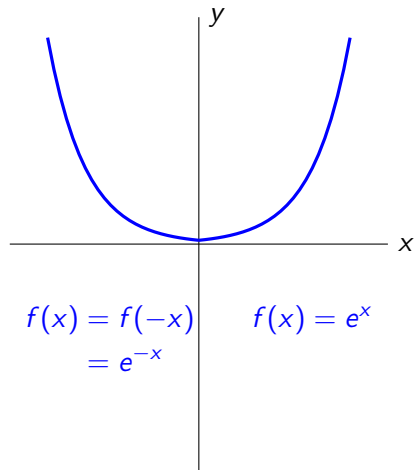


Función Impar

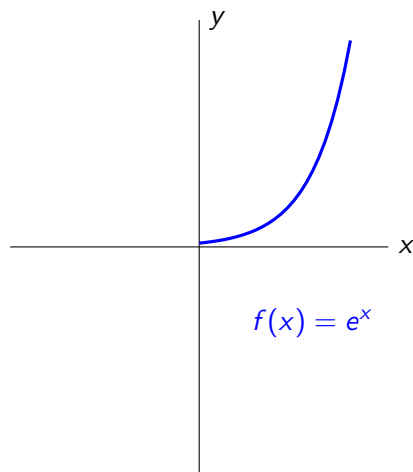


Ejercicio 1.28.1.

Función Par

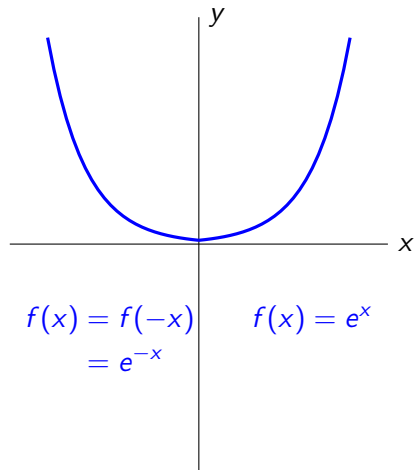


Función Impar

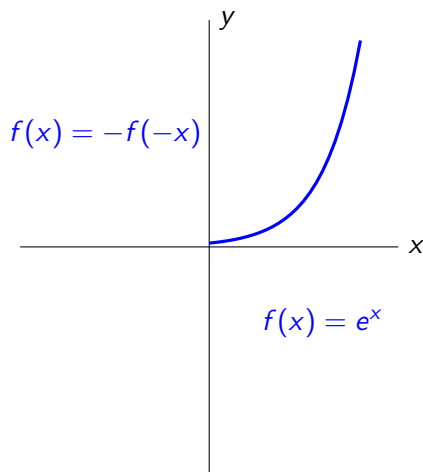


Ejercicio 1.28.1.

Función Par

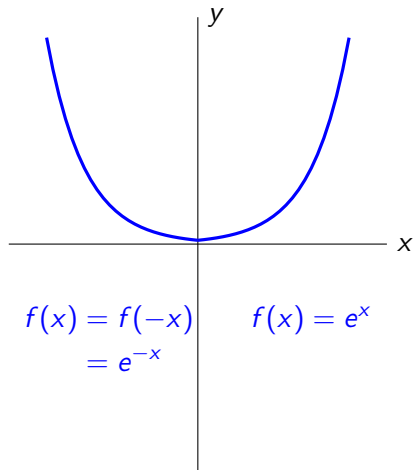


Función Impar

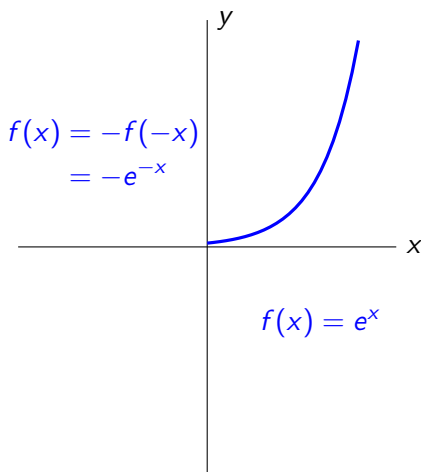


Ejercicio 1.28.1.

Función Par

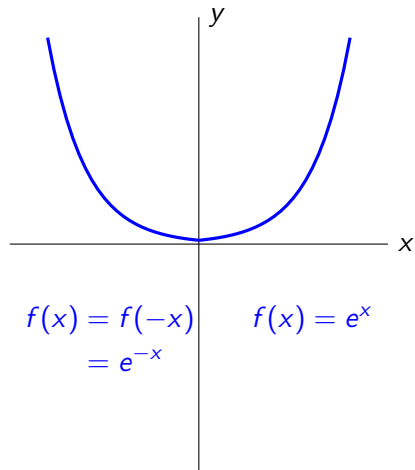


Función Impar

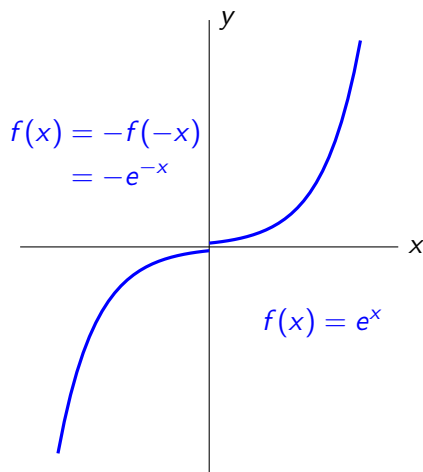


Ejercicio 1.28.1.

Función Par



Función Impar



Ejercicio 1.28.1.

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x)$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 \end{cases}$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n \\ 0 & \text{si } x \neq n \end{cases}$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Por ejemplo, $\dim P > 2$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Por ejemplo, $\dim P > 2$ porque la familia de vectores (p_1, p_2, p_3) es libre:

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Por ejemplo, $\dim P > 2$ porque la familia de vectores (p_1, p_2, p_3) es libre:

$$\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 = \text{null}$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Por ejemplo, $\dim P > 2$ porque la familia de vectores (p_1, p_2, p_3) es libre:

$$\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 = \text{null} \quad \iff$$

$$\iff$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Por ejemplo, $\dim P > 2$ porque la familia de vectores (p_1, p_2, p_3) es libre:

$$\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 = \text{null} \quad \iff$$

$$\iff p_1(x) \cdot \lambda_1 + p_2(x) \cdot \lambda_2 + p_3(x) \cdot \lambda_3$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Por ejemplo, $\dim P > 2$ porque la familia de vectores (p_1, p_2, p_3) es libre:

$$\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 = \text{null} \quad \iff$$

$$\iff p_1(x) \cdot \lambda_1 + p_2(x) \cdot \lambda_2 + p_3(x) \cdot \lambda_3 = 0$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Por ejemplo, $\dim P > 2$ porque la familia de vectores (p_1, p_2, p_3) es libre:

$$\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 = \text{null} \quad \iff$$

$$\iff p_1(x) \cdot \lambda_1 + p_2(x) \cdot \lambda_2 + p_3(x) \cdot \lambda_3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Por ejemplo, $\dim P > 2$ porque la familia de vectores (p_1, p_2, p_3) es libre:

$$\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 = \text{null} \quad \iff$$

$$\iff p_1(x) \cdot \lambda_1 + p_2(x) \cdot \lambda_2 + p_3(x) \cdot \lambda_3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{si } x = 3$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Por ejemplo, $\dim P > 2$ porque la familia de vectores (p_1, p_2, p_3) es libre:

$$\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 = \text{null} \quad \iff$$

$$\iff p_1(x) \cdot \lambda_1 + p_2(x) \cdot \lambda_2 + p_3(x) \cdot \lambda_3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_3 = 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Por ejemplo, $\dim P > 2$ porque la familia de vectores (p_1, p_2, p_3) es libre:

$$\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 = \text{null} \quad \iff$$

$$\iff p_1(x) \cdot \lambda_1 + p_2(x) \cdot \lambda_2 + p_3(x) \cdot \lambda_3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\implies \begin{cases} & \text{si } x = 2 \\ \lambda_3 = 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Por ejemplo, $\dim P > 2$ porque la familia de vectores (p_1, p_2, p_3) es libre:

$$\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 = \text{null} \quad \iff$$

$$\iff p_1(x) \cdot \lambda_1 + p_2(x) \cdot \lambda_2 + p_3(x) \cdot \lambda_3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_2 = 0 & \text{si } x = 2 \\ \lambda_3 = 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Por ejemplo, $\dim P > 2$ porque la familia de vectores (p_1, p_2, p_3) es libre:

$$\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 = \text{null} \quad \iff$$

$$\iff p_1(x) \cdot \lambda_1 + p_2(x) \cdot \lambda_2 + p_3(x) \cdot \lambda_3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\implies \begin{cases} & & \text{si } x = 1 \\ \lambda_2 & = 0 & \text{si } x = 2 \\ \lambda_3 & = 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 1.28.1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la función par:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, -n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El subespacio P **no** es de dimensión finita.

Por ejemplo, $\dim P > 2$ porque la familia de vectores (p_1, p_2, p_3) es libre:

$$\lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 = \text{null} \quad \iff$$

$$\iff p_1(x) \cdot \lambda_1 + p_2(x) \cdot \lambda_2 + p_3(x) \cdot \lambda_3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 & = 0 & \text{si } x = 1 \\ \lambda_2 & = 0 & \text{si } x = 2 \\ \lambda_3 & = 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 1.28.2.

Ejercicio 1.28.2.

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$P \cap I = \{\text{null}\}$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$P \cap I = \{\text{null}\}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es a la vez par e impar.

Ejercicio 1.28.2.

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$P \cap I = \{\text{null}\}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es a la vez par e impar.

Sea $x \in \mathbb{R}$ cualquiera:

Ejercicio 1.28.2.

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$P \cap I = \{\text{null}\}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es a la vez par e impar.

Sea $x \in \mathbb{R}$ cualquiera:

$$f(x)$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$P \cap I = \{\text{null}\}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es a la vez par e impar.

Sea $x \in \mathbb{R}$ cualquiera:

$$f(x) = f(-x)$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$P \cap I = \{\text{null}\}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es a la vez par e impar.

Sea $x \in \mathbb{R}$ cualquiera:

$$f(x) = f(-x) = -f(x)$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$P \cap I = \{\text{null}\}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es a la vez par e impar.

Sea $x \in \mathbb{R}$ cualquiera:

$$f(x) = f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$P \cap I = \{\text{null}\}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es a la vez par e impar.

Sea $x \in \mathbb{R}$ cualquiera:

$$f(x) = f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot f(x) = 0$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$P \cap I = \{\text{null}\}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es a la vez par e impar.

Sea $x \in \mathbb{R}$ cualquiera:

$$f(x) = f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot f(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$

$$P \cap I = \{\text{null}\}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es a la vez par e impar.

Sea $x \in \mathbb{R}$ cualquiera:

$$f(x) = f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$$

Ejercicio 1.28.2.

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + q(x) \\ f(-x) & \end{aligned}$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

$$f(-x) = p(-x) + q(-x)$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

$$f(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) - q(x)$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

$$f(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) - q(x)$$

Por lo tanto debe ser:

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

$$f(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) - q(x)$$

Por lo tanto debe ser:

$$p(x)$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

$$f(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) - q(x)$$

Por lo tanto debe ser:

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

$$f(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) - q(x)$$

Por lo tanto debe ser:

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad q(x)$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

$$f(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) - q(x)$$

Por lo tanto debe ser:

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$q(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

$$f(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) - q(x)$$

Por lo tanto debe ser:

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$q(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Finalmente comprobamos:

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

$$f(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) - q(x)$$

Por lo tanto debe ser:

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad q(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Finalmente comprobamos:

$$p(-x) = p(x)$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

$$f(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) - q(x)$$

Por lo tanto debe ser:

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$q(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Finalmente comprobamos:

$$p(-x) = p(x) \quad q(-x) = -q(x)$$

Ejercicio 1.28.2.

$$P + I = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera.

Buscamos una función par p y una función impar q tales que $f = p + q$.

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

$$f(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) - q(x)$$

Por lo tanto debe ser:

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad q(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Finalmente comprobamos:

$$p(-x) = p(x) \qquad q(-x) = -q(x) \qquad p(x) + q(x) = f(x)$$

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Una **aplicación** f entre dos conjuntos V y W ,

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Una **aplicación** f entre dos conjuntos V y W , escrito $f : V \rightarrow W$,

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Una **aplicación** f entre dos conjuntos V y W , escrito $f : V \rightarrow W$, es una correspondencia que asigna

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Una **aplicación** f entre dos conjuntos V y W , escrito $f : V \rightarrow W$, es una correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto inicial V

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Una **aplicación** f entre dos conjuntos V y W , escrito $f : V \rightarrow W$, es una correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto inicial V un único elemento del conjunto final W .

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Una **aplicación** f entre dos conjuntos V y W , escrito $f : V \rightarrow W$, es una correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto inicial V un único elemento del conjunto final W .
2. Las dos aplicaciones siguientes son distintas, ya que aunque la regla de asignación es la misma, los conjuntos finales son distintos:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 3 + x^2$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow [3, \infty)$$

$$x \longmapsto 3 + x^2$$

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Una **aplicación** f entre dos conjuntos V y W , escrito $f : V \rightarrow W$, es una correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto inicial V un único elemento del conjunto final W .
2. Las dos aplicaciones siguientes son distintas, ya que aunque la regla de asignación es la misma, los conjuntos finales son distintos:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 3 + x^2$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow [3, \infty)$$

$$x \longmapsto 3 + x^2$$

3. La siguiente correspondencia no es una aplicación, ya que no hemos definido la imagen del número 5:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 1/(x - 5)$$

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

4. Una aplicación es **inyectiva**

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

4. Una aplicación es **inyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene a lo sumo una preimagen.

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

4. Una aplicación es **inyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene a lo sumo una preimagen.

Es decir, $f(u) = f(v)$ implica $u = v$.

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

4. Una aplicación es **inyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene a lo sumo una preimagen.

Es decir, $f(u) = f(v)$ implica $u = v$.

5. Una aplicación es **sobreyectiva**

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

4. Una aplicación es **inyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene a lo sumo una preimagen.

Es decir, $f(u) = f(v)$ implica $u = v$.

5. Una aplicación es **sobreyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene al menos una preimagen.

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

4. Una aplicación es **inyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene a lo sumo una preimagen.

Es decir, $f(u) = f(v)$ implica $u = v$.

5. Una aplicación es **sobreyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene al menos una preimagen.

Es decir, para todo $w \in W$

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

4. Una aplicación es **inyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene a lo sumo una preimagen.

Es decir, $f(u) = f(v)$ implica $u = v$.

5. Una aplicación es **sobreyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene al menos una preimagen.

Es decir, para todo $w \in W$ existe un $v \in V$

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

4. Una aplicación es **inyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene a lo sumo una preimagen.

Es decir, $f(u) = f(v)$ implica $u = v$.

5. Una aplicación es **sobreyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene al menos una preimagen.

Es decir, para todo $w \in W$ existe un $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

4. Una aplicación es **inyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene a lo sumo una preimagen.

Es decir, $f(u) = f(v)$ implica $u = v$.

5. Una aplicación es **sobreyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene al menos una preimagen.

Es decir, para todo $w \in W$ existe un $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

6. Una aplicación $f : V \rightarrow W$ es **biyectiva**

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

4. Una aplicación es **inyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene a lo sumo una preimagen.

Es decir, $f(u) = f(v)$ implica $u = v$.

5. Una aplicación es **sobreyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene al menos una preimagen.

Es decir, para todo $w \in W$ existe un $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

6. Una aplicación $f : V \rightarrow W$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Repaso 2.1.

2.1. Aplicaciones lineales

4. Una aplicación es **inyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene a lo sumo una preimagen.

Es decir, $f(u) = f(v)$ implica $u = v$.

5. Una aplicación es **sobreyectiva** si todo elemento del conjunto final tiene al menos una preimagen.

Es decir, para todo $w \in W$ existe un $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

6. Una aplicación $f : V \rightarrow W$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

En tal caso existe su aplicación inversa $f^{-1} : W \rightarrow V$.

Definición 2.2.

2.1. Aplicaciones lineales

Definición 2.2.

2.1. Aplicaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales

Definición 2.2.

2.1. Aplicaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares \mathbb{F} .

Definición 2.2.

2.1. Aplicaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares \mathbb{F} .

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación entre los conjuntos V y W .

Definición 2.2.

2.1. Aplicaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares \mathbb{F} .

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación entre los conjuntos V y W .

Se dice que la aplicación f es **lineal** si:

Definición 2.2.

2.1. Aplicaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares \mathbb{F} .

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación entre los conjuntos V y W .

Se dice que la aplicación f es **lineal** si:

1. $f(u + v) =$

Definición 2.2.

2.1. Aplicaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares \mathbb{F} .

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación entre los conjuntos V y W .

Se dice que la aplicación f es **lineal** si:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$

Definición 2.2.

2.1. Aplicaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares \mathbb{F} .

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación entre los conjuntos V y W .

Se dice que la aplicación f es **lineal** si:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$ para todos $u, v \in V$.

Definición 2.2.

2.1. Aplicaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares \mathbb{F} .

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación entre los conjuntos V y W .

Se dice que la aplicación f es **lineal** si:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$ para todos $u, v \in V$.
2. $f(\lambda v) =$

Definición 2.2.

2.1. Aplicaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares \mathbb{F} .

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación entre los conjuntos V y W .

Se dice que la aplicación f es **lineal** si:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$ para todos $u, v \in V$.
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Definición 2.2.

2.1. Aplicaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares \mathbb{F} .

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación entre los conjuntos V y W .

Se dice que la aplicación f es **lineal** si:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$ para todos $u, v \in V$.
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$.

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal.

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal. Entonces:

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$

(Denotamos $\bar{0}$ tanto al vector nulo de V como al de W).

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$

(Denotamos $\bar{0}$ tanto al vector nulo de V como al de W).

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$

(Denotamos $\bar{0}$ tanto al vector nulo de V como al de W).

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$

(Denotamos $\bar{0}$ tanto al vector nulo de V como al de W).

Demostración.

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$

(Denotamos $\bar{0}$ tanto al vector nulo de V como al de W).

Demostración.

$f(\bar{0})$

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$

(Denotamos $\bar{0}$ tanto al vector nulo de V como al de W).

Demostración.

$$f(\bar{0}) = f(0 \cdot \bar{0})$$

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$

(Denotamos $\bar{0}$ tanto al vector nulo de V como al de W).

Demostración.

$$f(\bar{0}) = f(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot f(\bar{0})$$

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$

(Denotamos $\bar{0}$ tanto al vector nulo de V como al de W).

Demostración.

$$f(\bar{0}) = f(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot f(\bar{0}) = \bar{0}.$$



Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$

(Denotamos $\bar{0}$ tanto al vector nulo de V como al de W).

Demostración.

$$f(\bar{0}) = f(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot f(\bar{0}) = \bar{0}.$$



2. $f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) =$

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$

(Denotamos $\bar{0}$ tanto al vector nulo de V como al de W).

Demostración.

$$f(\bar{0}) = f(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot f(\bar{0}) = \bar{0}.$$



2. $f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)$

Notas 2.3.

2.1. Aplicaciones lineales

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$

(Denotamos $\bar{0}$ tanto al vector nulo de V como al de W).

Demostración.

$$f(\bar{0}) = f(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot f(\bar{0}) = \bar{0}. \quad \square$$

2. $f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)$

para todos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, $v_1, \dots, v_n \in V$.

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Gracias a las notas 1.46 sabemos que,

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Gracias a las notas 1.46 sabemos que,
si en un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión finita n

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Gracias a las notas 1.46 sabemos que, si en un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión finita n fijamos una base \mathcal{B} ,

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Gracias a las notas 1.46 sabemos que, si en un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión finita n fijamos una base \mathcal{B} , entonces queda definida una aplicación de V en \mathbb{F}^n

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Gracias a las notas 1.46 sabemos que, si en un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión finita n fijamos una base \mathcal{B} , entonces queda definida una aplicación de V en \mathbb{F}^n que a cada vector lo envía a sus coordenadas en la base \mathcal{B} .

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Gracias a las notas 1.46 sabemos que, si en un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión finita n fijamos una base \mathcal{B} , entonces queda definida una aplicación de V en \mathbb{F}^n que a cada vector lo envía a sus coordenadas en la base \mathcal{B} .

Denotaremos esta aplicación:

$$f_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^n$$

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Gracias a las notas 1.46 sabemos que, si en un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión finita n fijamos una base \mathcal{B} , entonces queda definida una aplicación de V en \mathbb{F}^n que a cada vector lo envía a sus coordenadas en la base \mathcal{B} .

Denotaremos esta aplicación:

$$f_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^n$$

Observamos ahora que las ecuaciones

$$f_{\mathcal{B}}(v + w) = f_{\mathcal{B}}(v) + f_{\mathcal{B}}(w) \quad \text{y} \quad f_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f_{\mathcal{B}}(v)$$

dicen exactamente que

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Gracias a las notas 1.46 sabemos que, si en un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión finita n fijamos una base \mathcal{B} , entonces queda definida una aplicación de V en \mathbb{F}^n que a cada vector lo envía a sus coordenadas en la base \mathcal{B} .

Denotaremos esta aplicación:

$$f_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^n$$

Observamos ahora que las ecuaciones

$$f_{\mathcal{B}}(v + w) = f_{\mathcal{B}}(v) + f_{\mathcal{B}}(w) \quad \text{y} \quad f_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f_{\mathcal{B}}(v)$$

dicen exactamente que esta aplicación es lineal.

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

1. Gracias a las notas 1.46 sabemos que, si en un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión finita n fijamos una base \mathcal{B} , entonces queda definida una aplicación de V en \mathbb{F}^n que a cada vector lo envía a sus coordenadas en la base \mathcal{B} .

Denotaremos esta aplicación:

$$f_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^n$$

Observamos ahora que las ecuaciones

$$f_{\mathcal{B}}(v + w) = f_{\mathcal{B}}(v) + f_{\mathcal{B}}(w) \quad \text{y} \quad f_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f_{\mathcal{B}}(v)$$

dicen exactamente que esta aplicación es lineal.

También sabemos que $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva.

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$,

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

$$\begin{aligned} h_A & : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m \\ X & \longmapsto A \cdot X \end{aligned}$$

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

$$\begin{aligned} h_A & : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m \\ X & \longmapsto A \cdot X \end{aligned}$$

Por esto escribimos los vectores de \mathbb{F}^n por columnas,

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

$$\begin{aligned} h_A & : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m \\ X & \longmapsto A \cdot X \end{aligned}$$

Por esto escribimos los vectores de \mathbb{F}^n por columnas, para poder interpretarlos como matrices de tamaño $n \times 1$,

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

$$\begin{aligned} h_A & : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m \\ X & \longmapsto A \cdot X \end{aligned}$$

Por esto escribimos los vectores de \mathbb{F}^n por columnas, para poder interpretarlos como matrices de tamaño $n \times 1$, y que el producto $A \cdot X$ tenga sentido.

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

$$\begin{aligned} h_A &: \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m \\ \underbrace{X}_{n \times 1} &\longmapsto A \cdot X \end{aligned}$$

Por esto escribimos los vectores de \mathbb{F}^n por columnas, para poder interpretarlos como matrices de tamaño $n \times 1$, y que el producto $A \cdot X$ tenga sentido.

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

$$h_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$$
$$\underbrace{X}_{n \times 1} \longmapsto A \cdot \underbrace{X}_{n \times 1}$$

Por esto escribimos los vectores de \mathbb{F}^n por columnas, para poder interpretarlos como matrices de tamaño $n \times 1$, y que el producto $A \cdot X$ tenga sentido.

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

$$h_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$$
$$\underbrace{X}_{n \times 1} \longmapsto \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{X}_{n \times 1}$$

Por esto escribimos los vectores de \mathbb{F}^n por columnas, para poder interpretarlos como matrices de tamaño $n \times 1$, y que el producto $A \cdot X$ tenga sentido.

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

$$h_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$$
$$\underbrace{X}_{n \times 1} \longmapsto \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{X}_{n \times 1} = Y$$

Por esto escribimos los vectores de \mathbb{F}^n por columnas, para poder interpretarlos como matrices de tamaño $n \times 1$, y que el producto $A \cdot X$ tenga sentido.

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

$$h_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$$
$$\underbrace{X}_{n \times 1} \longmapsto \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{X}_{n \times 1} = \underbrace{Y}_{m \times 1}$$

Por esto escribimos los vectores de \mathbb{F}^n por columnas, para poder interpretarlos como matrices de tamaño $n \times 1$, y que el producto $A \cdot X$ tenga sentido.

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

$$h_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$$
$$\underbrace{X}_{n \times 1} \longmapsto \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{X}_{n \times 1} = \underbrace{Y}_{m \times 1}$$

Por esto escribimos los vectores de \mathbb{F}^n por columnas, para poder interpretarlos como matrices de tamaño $n \times 1$, y que el producto $A \cdot X$ tenga sentido.

La aplicación h_A es lineal;

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

$$h_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$$
$$\underbrace{X}_{n \times 1} \longmapsto \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{X}_{n \times 1} = \underbrace{Y}_{m \times 1}$$

Por esto escribimos los vectores de \mathbb{F}^n por columnas, para poder interpretarlos como matrices de tamaño $n \times 1$, y que el producto $A \cdot X$ tenga sentido.

La aplicación h_A es lineal;

por ejemplo $h_A(X_1 + X_2) = h_A(X_1) + h_A(X_2)$

Notación 2.4.

2.1. Aplicaciones lineales

2. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:

$$h_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$$
$$\underbrace{X}_{n \times 1} \longmapsto \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{X}_{n \times 1} = \underbrace{Y}_{m \times 1}$$

Por esto escribimos los vectores de \mathbb{F}^n por columnas, para poder interpretarlos como matrices de tamaño $n \times 1$, y que el producto $A \cdot X$ tenga sentido.

La aplicación h_A es lineal;

por ejemplo $h_A(X_1 + X_2) = h_A(X_1) + h_A(X_2)$

debido a la propiedad distributiva de las matrices.

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

1. La siguiente aplicación es lineal

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

1. La siguiente aplicación es lineal

$$h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

1. La siguiente aplicación es lineal

$$h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

1. La siguiente aplicación es lineal

$$h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix}$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right)$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

1. La siguiente aplicación es lineal

$$h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix}$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + h \left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right)$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

1. La siguiente aplicación es lineal

$$h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix}$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right) = h \left(\begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + h \left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right)$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

1. La siguiente aplicación es lineal

$$h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix}$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right) = h \left(\begin{pmatrix} x_1+x'_1 \\ x_2+x'_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2(x_1+x'_1) - (x_2+x'_2) \\ 0 \\ -3(x_2+x'_2) \end{pmatrix}$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + h \left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right)$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

1. La siguiente aplicación es lineal

$$h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix}$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right) = h \left(\begin{pmatrix} x_1+x'_1 \\ x_2+x'_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2(x_1+x'_1) - (x_2+x'_2) \\ 0 \\ -3(x_2+x'_2) \end{pmatrix}$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + h \left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x'_1 - x'_2 \\ 0 \\ -3x'_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

1. La siguiente aplicación es lineal

$$h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix}$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right) = h \left(\begin{pmatrix} x_1+x'_1 \\ x_2+x'_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2(x_1+x'_1) - (x_2+x'_2) \\ 0 \\ -3(x_2+x'_2) \end{pmatrix}$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + h \left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x'_1 - x'_2 \\ 0 \\ -3x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 2x'_1 - x'_2 \\ 0 \\ -3x_2 - 3x'_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

1. La siguiente aplicación es lineal porque es de la forma $h = h_A$.

$$h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix}$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right) = h \left(\begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + x'_1) - (x_2 + x'_2) \\ 0 \\ -3(x_2 + x'_2) \end{pmatrix}$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + h \left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x'_1 - x'_2 \\ 0 \\ -3x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 2x'_1 - x'_2 \\ 0 \\ -3x_2 - 3x'_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

1. La siguiente aplicación es lineal porque es de la forma $h = h_A$.

$$h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right) = h \left(\begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + x'_1) - (x_2 + x'_2) \\ 0 \\ -3(x_2 + x'_2) \end{pmatrix}$$

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + h \left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x'_1 - x'_2 \\ 0 \\ -3x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 2x'_1 - x'_2 \\ 0 \\ -3x_2 - 3x'_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

2. La aplicación que a cada polinomio le asocia su derivada es lineal:

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

2. La aplicación que a cada polinomio le asocia su derivada es lineal:

$$\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

2. La aplicación que a cada polinomio le asocia su derivada es lineal:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n &\longmapsto \end{aligned}$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

2. La aplicación que a cada polinomio le asocia su derivada es lineal:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n &\longmapsto a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}\end{aligned}$$

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

2. La aplicación que a cada polinomio le asocia su derivada es lineal:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n &\longmapsto a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}\end{aligned}$$

3. La aplicación nula,

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

2. La aplicación que a cada polinomio le asocia su derivada es lineal:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n &\longmapsto a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}\end{aligned}$$

3. La aplicación nula, que a cada $v \in V$ lo envía a $\bar{0} \in W$,

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

2. La aplicación que a cada polinomio le asocia su derivada es lineal:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n &\longmapsto a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}\end{aligned}$$

3. La aplicación nula, que a cada $v \in V$ lo envía a $\bar{0} \in W$, es lineal.

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

2. La aplicación que a cada polinomio le asocia su derivada es lineal:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n &\longmapsto a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}\end{aligned}$$

3. La aplicación nula, que a cada $v \in V$ lo envía a $\bar{0} \in W$, es lineal.

La aplicación identidad $\text{id}_V : V \rightarrow V$,

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

2. La aplicación que a cada polinomio le asocia su derivada es lineal:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n &\longmapsto a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}\end{aligned}$$

3. La aplicación nula, que a cada $v \in V$ lo envía a $\bar{0} \in W$, es lineal.

La aplicación identidad $\text{id}_V : V \rightarrow V$, dada por $\text{id}_V(v) = v$,

Ejemplos 2.5.

2.1. Aplicaciones lineales

2. La aplicación que a cada polinomio le asocia su derivada es lineal:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n &\longmapsto a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}\end{aligned}$$

3. La aplicación nula, que a cada $v \in V$ lo envía a $\bar{0} \in W$, es lineal.

La aplicación identidad $\text{id}_V : V \rightarrow V$, dada por $\text{id}_V(v) = v$, es lineal.

Ejercicios 2.6.

2.1. Aplicaciones lineales

- 2.1
- 2.2
- 2.3

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f =$$

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid$$

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$$

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$$

2. Recordamos que la **imagen** de una aplicación $f : V \rightarrow W$ es:

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$$

2. Recordamos que la **imagen** de una aplicación $f : V \rightarrow W$ es:

$$\text{im } f =$$

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$$

2. Recordamos que la **imagen** de una aplicación $f : V \rightarrow W$ es:

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid$$

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$$

2. Recordamos que la **imagen** de una aplicación $f : V \rightarrow W$ es:

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid \text{existe } v \in V$$

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$$

2. Recordamos que la **imagen** de una aplicación $f : V \rightarrow W$ es:

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid \text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = w\}$$

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$$

2. Recordamos que la **imagen** de una aplicación $f : V \rightarrow W$ es:

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid \text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = w\}$$

Notas 2.8.

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$$

2. Recordamos que la **imagen** de una aplicación $f : V \rightarrow W$ es:

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid \text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = w\}$$

Notas 2.8.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$$

2. Recordamos que la **imagen** de una aplicación $f : V \rightarrow W$ es:

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid \text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = w\}$$

Notas 2.8. Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

1. $\ker f$ es un subespacio

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$$

2. Recordamos que la **imagen** de una aplicación $f : V \rightarrow W$ es:

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid \text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = w\}$$

Notas 2.8.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

1. $\ker f$ es un subespacio del espacio inicial V .

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$$

2. Recordamos que la **imagen** de una aplicación $f : V \rightarrow W$ es:

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid \text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = w\}$$

Notas 2.8.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

1. $\ker f$ es un subespacio del espacio inicial V .
2. $\operatorname{im} f$ es un subespacio

Definición 2.7 y notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\}$$

2. Recordamos que la **imagen** de una aplicación $f : V \rightarrow W$ es:

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid \text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = w\}$$

Notas 2.8.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

1. $\ker f$ es un subespacio del espacio inicial V .
2. $\operatorname{im} f$ es un subespacio del espacio final W .

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente.

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente.

Supongamos pues que $\ker f = \{\bar{0}\}$,

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente.

Supongamos pues que $\ker f = \{\bar{0}\}$,

y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$,

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente.

Supongamos pues que $\ker f = \{\bar{0}\}$,

y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$,

debemos probar que $v_1 = v_2$.

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente.

Supongamos pues que $\ker f = \{\bar{0}\}$,
y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$,
debemos probar que $v_1 = v_2$.

Observamos que $\bar{0} = f(v_1) - f(v_2)$

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente.

Supongamos pues que $\ker f = \{\bar{0}\}$,

y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$,

debemos probar que $v_1 = v_2$.

Observamos que $\bar{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$.

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente.

Supongamos pues que $\ker f = \{\bar{0}\}$,

y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$,

debemos probar que $v_1 = v_2$.

Observamos que $\bar{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$.

Luego el vector $v_1 - v_2$ está en

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente.

Supongamos pues que $\ker f = \{\bar{0}\}$,

y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$,

debemos probar que $v_1 = v_2$.

Observamos que $\bar{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$.

Luego el vector $v_1 - v_2$ está en el núcleo de f .

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente.

Supongamos pues que $\ker f = \{\bar{0}\}$,

y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$,

debemos probar que $v_1 = v_2$.

Observamos que $\bar{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$.

Luego el vector $v_1 - v_2$ está en el núcleo de f .

Por tanto $v_1 - v_2 = \bar{0}$,

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente.

Supongamos pues que $\ker f = \{\bar{0}\}$,

y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$,

debemos probar que $v_1 = v_2$.

Observamos que $\bar{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$.

Luego el vector $v_1 - v_2$ está en el núcleo de f .

Por tanto $v_1 - v_2 = \bar{0}$, es decir, $v_1 = v_2$. □

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente.

Supongamos pues que $\ker f = \{\bar{0}\}$,

y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$,

debemos probar que $v_1 = v_2$.

Observamos que $\bar{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$.

Luego el vector $v_1 - v_2$ está en el núcleo de f .

Por tanto $v_1 - v_2 = \bar{0}$, es decir, $v_1 = v_2$. □

4. f es sobreyectiva si y solo si

Notas 2.8.

2.2. Núcleo e imagen

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente.

Supongamos pues que $\ker f = \{\bar{0}\}$,

y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$,

debemos probar que $v_1 = v_2$.

Observamos que $\bar{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$.

Luego el vector $v_1 - v_2$ está en el núcleo de f .

Por tanto $v_1 - v_2 = \bar{0}$, es decir, $v_1 = v_2$. □

4. f es sobreyectiva si y solo si $\text{im } f = W$.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

Supongamos que $\dim V < \infty$.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

Supongamos que $\dim V < \infty$.

Entonces:

$$\dim V - \dim(\ker f) = \dim(\operatorname{im} f)$$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

Supongamos que $\dim V < \infty$.

Entonces:

$$\dim V - \dim(\ker f) = \dim(\operatorname{im} f)$$

Demostración.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

Supongamos que $\dim V < \infty$.

Entonces:

$$\underbrace{\dim V}_n - \dim(\ker f) = \dim(\operatorname{im} f)$$

Demostración.

Sea $n = \dim V$,

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

Supongamos que $\dim V < \infty$.

Entonces:

$$\underbrace{\dim V}_n - \underbrace{\dim(\ker f)}_m = \dim(\operatorname{im} f)$$

Demostración.

Sea $n = \dim V$, y sea $m = \dim(\ker f)$.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

Supongamos que $\dim V < \infty$.

Entonces:

$$\underbrace{\dim V}_n - \underbrace{\dim(\ker f)}_m = \underbrace{\dim(\operatorname{im} f)}_{? \ n-m?}$$

Demostración.

Sea $n = \dim V$, y sea $m = \dim(\ker f)$.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

Supongamos que $\dim V < \infty$.

Entonces:

$$\underbrace{\dim V}_n - \underbrace{\dim(\ker f)}_m = \underbrace{\dim(\operatorname{im} f)}_{? \ n-m?}$$

Demostración.

Sea $n = \dim V$, y sea $m = \dim(\ker f)$.

Tomamos una base (a_1, \dots, a_m) de $\ker f$,

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

Supongamos que $\dim V < \infty$.

Entonces:

$$\underbrace{\dim V}_n - \underbrace{\dim(\ker f)}_m = \underbrace{\dim(\operatorname{im} f)}_{? \ n-m?}$$

Demostración.

Sea $n = \dim V$, y sea $m = \dim(\ker f)$.

Tomamos una base (a_1, \dots, a_m) de $\ker f$,
y la ampliamos con a_{m+1}, \dots, a_n

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

Supongamos que $\dim V < \infty$.

Entonces:

$$\underbrace{\dim V}_n - \underbrace{\dim(\ker f)}_m = \underbrace{\dim(\operatorname{im} f)}_{? \ n-m ?}$$

Demostración.

Sea $n = \dim V$, y sea $m = \dim(\ker f)$.

Tomamos una base (a_1, \dots, a_m) de $\ker f$,
y la ampliamos con a_{m+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V .

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

Supongamos que $\dim V < \infty$.

Entonces:

$$\underbrace{\dim V}_n - \underbrace{\dim(\ker f)}_m = \underbrace{\dim(\operatorname{im} f)}_{? \ n-m?}$$

Demostración.

Sea $n = \dim V$, y sea $m = \dim(\ker f)$.

Tomamos una base (a_1, \dots, a_m) de $\ker f$,
y la ampliamos con a_{m+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V .

Basta que probemos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal.

Supongamos que $\dim V < \infty$.

Entonces:

$$\underbrace{\dim V}_n - \underbrace{\dim(\ker f)}_m = \underbrace{\dim(\operatorname{im} f)}_{? \ n-m ?}$$

Demostración.

Sea $n = \dim V$, y sea $m = \dim(\ker f)$.

Tomamos una base (a_1, \dots, a_m) de $\ker f$,
y la ampliamos con a_{m+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V .

Basta que probemos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ es base de $\operatorname{im} f$.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Cogemos un vector $w \in \text{im } f$ cualquiera,

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Cogemos un vector $w \in \text{im } f$ cualquiera,
esto significa que existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Cogemos un vector $w \in \text{im } f$ cualquiera,
esto significa que existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Como (a_1, \dots, a_n) es base de V ,

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Cogemos un vector $w \in \text{im } f$ cualquiera,
esto significa que existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Como (a_1, \dots, a_n) es base de V ,
existen escalares λ_j de manera que $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Cogemos un vector $w \in \text{im } f$ cualquiera,
esto significa que existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Como (a_1, \dots, a_n) es base de V ,
existen escalares λ_i de manera que $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

w

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Cogemos un vector $w \in \text{im } f$ cualquiera, esto significa que existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Como (a_1, \dots, a_n) es base de V , existen escalares λ_i de manera que $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

$$w = f(v)$$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Cogemos un vector $w \in \text{im } f$ cualquiera, esto significa que existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Como (a_1, \dots, a_n) es base de V , existen escalares λ_i de manera que $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

$$w = f(v) = f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n)$$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Cogemos un vector $w \in \text{im } f$ cualquiera, esto significa que existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Como (a_1, \dots, a_n) es base de V , existen escalares λ_i de manera que $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

$$\begin{aligned}w &= f(v) = f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) \\ &= \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n)\end{aligned}$$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Cogemos un vector $w \in \text{im } f$ cualquiera, esto significa que existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Como (a_1, \dots, a_n) es base de V , existen escalares λ_i de manera que $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

$$\begin{aligned}w &= f(v) = f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) \\&= \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) \\&= \lambda_1 \bar{0} + \dots + \lambda_m \bar{0}\end{aligned}$$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Cogemos un vector $w \in \text{im } f$ cualquiera, esto significa que existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Como (a_1, \dots, a_n) es base de V , existen escalares λ_i de manera que $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

$$\begin{aligned}w &= f(v) = f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) \\&= \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) \\&= \lambda_1 \bar{0} + \dots + \lambda_m \bar{0} + \lambda_{m+1} f(a_{m+1}) + \dots + \lambda_n f(a_n)\end{aligned}$$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Cogemos un vector $w \in \text{im } f$ cualquiera, esto significa que existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Como (a_1, \dots, a_n) es base de V , existen escalares λ_i de manera que $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

$$\begin{aligned}w &= f(v) = f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) \\&= \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) \\&= \lambda_1 \bar{0} + \dots + \lambda_m \bar{0} + \lambda_{m+1} f(a_{m+1}) + \dots + \lambda_n f(a_n) \\&= \lambda_{m+1} f(a_{m+1}) + \dots + \lambda_n f(a_n)\end{aligned}$$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

2. Veamos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ es familia libre.

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

2. Veamos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ es familia libre.

Sean μ_{m+1}, \dots, μ_n escalares tales que:

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

2. Veamos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ es familia libre.

Sean μ_{m+1}, \dots, μ_n escalares tales que:

$$\bar{0} = \mu_{m+1}f(a_{m+1}) + \dots + \mu_n f(a_n)$$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

2. Veamos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ es familia libre.

Sean μ_{m+1}, \dots, μ_n escalares tales que:

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \mu_{m+1}f(a_{m+1}) + \dots + \mu_n f(a_n) \\ &= f(\mu_{m+1}a_{m+1} + \dots + \mu_n a_n)\end{aligned}$$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

2. Veamos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ es familia libre.

Sean μ_{m+1}, \dots, μ_n escalares tales que:

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \mu_{m+1}f(a_{m+1}) + \dots + \mu_n f(a_n) \\ &= f(\mu_{m+1}a_{m+1} + \dots + \mu_n a_n)\end{aligned}$$

Por tanto el vector $u = \mu_{m+1}a_{m+1} + \dots + \mu_n a_n$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

2. Veamos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ es familia libre.

Sean μ_{m+1}, \dots, μ_n escalares tales que:

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \mu_{m+1}f(a_{m+1}) + \dots + \mu_n f(a_n) \\ &= f(\mu_{m+1}a_{m+1} + \dots + \mu_n a_n)\end{aligned}$$

Por tanto el vector $u = \mu_{m+1}a_{m+1} + \dots + \mu_n a_n$ está en el núcleo de f .

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

(Sabemos que el vector $u = \mu_{m+1}a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$ está en $\ker f$,

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

(Sabemos que el vector $u = \mu_{m+1}a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$ está en $\ker f$, y tenemos que probar que $\mu_{m+1} = \cdots = \mu_n = 0$).

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

(Sabemos que el vector $u = \mu_{m+1}a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$ está en $\ker f$, y tenemos que probar que $\mu_{m+1} = \cdots = \mu_n = 0$).

Como (a_1, \dots, a_m) es base de $\ker f$,

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

(Sabemos que el vector $u = \mu_{m+1}a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$ está en $\ker f$, y tenemos que probar que $\mu_{m+1} = \cdots = \mu_n = 0$).

Como (a_1, \dots, a_m) es base de $\ker f$, existen escalares μ_1, \dots, μ_m tales que:

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

(Sabemos que el vector $u = \mu_{m+1}a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$ está en $\ker f$, y tenemos que probar que $\mu_{m+1} = \cdots = \mu_n = 0$).

Como (a_1, \dots, a_m) es base de $\ker f$, existen escalares μ_1, \dots, μ_m tales que:

$$\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_m a_m = u$$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

(Sabemos que el vector $u = \mu_{m+1}a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$ está en $\ker f$, y tenemos que probar que $\mu_{m+1} = \cdots = \mu_n = 0$).

Como (a_1, \dots, a_m) es base de $\ker f$, existen escalares μ_1, \dots, μ_m tales que:

$$\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_m a_m = u = \mu_{m+1} a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$$

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

(Sabemos que el vector $u = \mu_{m+1}a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$ está en $\ker f$, y tenemos que probar que $\mu_{m+1} = \cdots = \mu_n = 0$).

Como (a_1, \dots, a_m) es base de $\ker f$, existen escalares μ_1, \dots, μ_m tales que:

$$\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_m a_m = u = \mu_{m+1} a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$$

Pero sabemos que $(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n)$ es familia libre,

Proposición 2.9.

2.2. Núcleo e imagen

Demostración.

(Sabemos que el vector $u = \mu_{m+1}a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$ está en $\ker f$, y tenemos que probar que $\mu_{m+1} = \cdots = \mu_n = 0$).

Como (a_1, \dots, a_m) es base de $\ker f$, existen escalares μ_1, \dots, μ_m tales que:

$$\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_m a_m = u = \mu_{m+1} a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$$

Pero sabemos que $(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n)$ es familia libre, por lo que necesariamente $\mu_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. □

Corolario 2.10 (de la demostración).

2.2. Núcleo e imagen

Corolario 2.10 (de la demostración).

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal y **biyectiva**.

Corolario 2.10 (de la demostración).

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal y **biyectiva**.

1. Si (a_1, \dots, a_n) es base de V ,

Corolario 2.10 (de la demostración).

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal y **biyectiva**.

1. Si (a_1, \dots, a_n) es base de V ,
entonces $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es base de W .

Corolario 2.10 (de la demostración).

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal y **biyectiva**.

1. Si (a_1, \dots, a_n) es base de V ,
entonces $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es base de W .
2. En particular, $\dim V = \dim W$.

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que $\dim V = \dim W$

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que $\dim V = \dim W < \infty$.

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que $\dim V = \dim W < \infty$.

Entonces:

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es sobreyectiva}$$

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que $\dim V = \dim W < \infty$.

Entonces:

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es sobreyectiva}$$

Demostración.

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que $\dim V = \dim W < \infty$.

Entonces:

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es sobreyectiva}$$

Demostración.

f es inyectiva

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que $\dim V = \dim W < \infty$.

Entonces:

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es sobreyectiva}$$

Demostración.

$$f \text{ es inyectiva} \iff \ker f = \{\bar{0}\}$$

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que $\dim V = \dim W < \infty$.

Entonces:

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es sobreyectiva}$$

Demostración.

$$f \text{ es inyectiva} \iff \ker f = \{\bar{0}\} \iff \dim(\ker f) = 0$$

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que $\dim V = \dim W < \infty$.

Entonces:

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es sobreyectiva}$$

Demostración.

$$f \text{ es inyectiva} \iff \ker f = \{\bar{0}\} \iff \dim(\ker f) = 0$$

Aplicando que $\dim V - \dim(\ker f) = \dim(\operatorname{im} f)$.

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que $\dim V = \dim W < \infty$.

Entonces:

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es sobreyectiva}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f \text{ es inyectiva} &\iff \ker f = \{\bar{0}\} \iff \dim(\ker f) = 0 \\ &\iff \dim(\operatorname{im} f) = \dim V \end{aligned}$$

Aplicando que $\dim V - \dim(\ker f) = \dim(\operatorname{im} f)$.

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que $\dim V = \dim W < \infty$.

Entonces:

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es sobreyectiva}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f \text{ es inyectiva} &\iff \ker f = \{\bar{0}\} \iff \dim(\ker f) = 0 \\ &\iff \dim(\operatorname{im} f) = \dim V \iff \dim(\operatorname{im} f) = \dim W \end{aligned}$$

Aplicando que $\dim V - \dim(\ker f) = \dim(\operatorname{im} f)$.

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que $\dim V = \dim W < \infty$.

Entonces:

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es sobreyectiva}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f \text{ es inyectiva} &\iff \ker f = \{\bar{0}\} \iff \dim(\ker f) = 0 \\ &\iff \dim(\operatorname{im} f) = \dim V \iff \dim(\operatorname{im} f) = \dim W \\ &\iff \operatorname{im} f = W \end{aligned}$$

Aplicando que $\dim V - \dim(\ker f) = \dim(\operatorname{im} f)$.

Corolario 2.11.

2.2. Núcleo e imagen

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que $\dim V = \dim W < \infty$.

Entonces:

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es sobreyectiva}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f \text{ es inyectiva} &\iff \ker f = \{\bar{0}\} \iff \dim(\ker f) = 0 \\ &\iff \dim(\operatorname{im} f) = \dim V \iff \dim(\operatorname{im} f) = \dim W \\ &\iff \operatorname{im} f = W \iff f \text{ es sobreyectiva} \end{aligned}$$

Aplicando que $\dim V - \dim(\ker f) = \dim(\operatorname{im} f)$. □

Ejercicios 2.12.

2.2. Núcleo e imagen

- 2.4
- 2.5
- 2.6
- 2.7
- 2.8
- 2.9

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

1. La composición de aplicaciones lineales es lineal.

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

1. La composición de aplicaciones lineales es lineal.

Es decir, si tanto $f : V \rightarrow W$ como $g : W \rightarrow U$ son \mathbb{F} -lineales,

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

1. La composición de aplicaciones lineales es lineal.

Es decir, si tanto $f : V \rightarrow W$ como $g : W \rightarrow U$ son \mathbb{F} -lineales, entonces la aplicación $g \circ f : V \rightarrow U$ también es \mathbb{F} -lineal.

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva,

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

$$f^{-1}(w_1 + w_2)$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

$$\begin{aligned} f^{-1}(w_1 + w_2) \\ = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

$$\begin{aligned} f^{-1}(w_1 + w_2) \\ = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\lambda w_1)$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

$$\begin{aligned} f^{-1}(w_1 + w_2) \\ &= f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda w_1) \\ &= \lambda f^{-1}(w_1) \end{aligned}$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

$$f^{-1}(w_1 + w_2)$$

$$f^{-1}(\lambda w_1)$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

Como f es biyectiva existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$.

$$f^{-1}(w_1 + w_2)$$

$$f^{-1}(\lambda w_1)$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

Como f es biyectiva existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$.

$$f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2))$$

$$f^{-1}(\lambda w_1)$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera. Como f es biyectiva existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$.

$$f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2))$$

$$f^{-1}(\lambda w_1)$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

Como f es biyectiva existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(w_1 + w_2) &= f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) \\ &= v_1 + v_2 \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\lambda w_1)$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

Como f es biyectiva existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(w_1 + w_2) &= f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) \\ &= v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\lambda w_1)$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

Como f es biyectiva existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(w_1 + w_2) &= f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) \\ &= v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\lambda w_1) = f^{-1}(\lambda f(v_1))$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

Como f es biyectiva existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(w_1 + w_2) &= f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) \\ &= v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\lambda w_1) = f^{-1}(\lambda f(v_1)) = f^{-1}(f(\lambda v_1))$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

Como f es biyectiva existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(w_1 + w_2) &= f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) \\ &= v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda w_1) &= f^{-1}(\lambda f(v_1)) = f^{-1}(f(\lambda v_1)) \\ &= \lambda v_1 \end{aligned}$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera.

Como f es biyectiva existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$.

$$\begin{aligned}f^{-1}(w_1 + w_2) &= f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) \\ &= v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f^{-1}(\lambda w_1) &= f^{-1}(\lambda f(v_1)) = f^{-1}(f(\lambda v_1)) \\ &= \lambda v_1 = \lambda f^{-1}(w_1)\end{aligned}$$

Propiedades 2.13.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Si la aplicación $f : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \rightarrow V$ también es lineal (y biyectiva).

Demostración.

Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera. Como f es biyectiva existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$.

$$\begin{aligned}f^{-1}(w_1 + w_2) &= f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) \\ &= v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f^{-1}(\lambda w_1) &= f^{-1}(\lambda f(v_1)) = f^{-1}(f(\lambda v_1)) \\ &= \lambda v_1 = \lambda f^{-1}(w_1)\end{aligned}$$



Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Sea (a_1, \dots, a_n) una base de V ,

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Sea (a_1, \dots, a_n) una base de V ,

y sea (b_1, \dots, b_n) una familia de vectores de W .

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Sea (a_1, \dots, a_n) una base de V ,

y sea (b_1, \dots, b_n) una familia de vectores de W .

Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \rightarrow W$

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Sea (a_1, \dots, a_n) una base de V ,

y sea (b_1, \dots, b_n) una familia de vectores de W .

Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \rightarrow W$

tal que $f(a_i) = b_i$ para todo i .

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Antes de demostrar la propiedad 2.14, veamos qué puede pasar si la familia del espacio inicial no es base.

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Antes de demostrar la propiedad 2.14, veamos qué puede pasar si la familia del espacio inicial no es base.

Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$.

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Antes de demostrar la propiedad 2.14, veamos qué puede pasar si la familia del espacio inicial no es base.

Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$.

1. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Antes de demostrar la propiedad 2.14, veamos qué puede pasar si la familia del espacio inicial no es base.

Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$.

1. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = 9$.

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Antes de demostrar la propiedad 2.14, veamos qué puede pasar si la familia del espacio inicial no es base.

Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$.

1. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = 9$.

No puede existir $f : V \rightarrow W$ lineal tal que $f(a_i) = b_i$ ya que:

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Antes de demostrar la propiedad 2.14, veamos qué puede pasar si la familia del espacio inicial no es base.

Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$.

1. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = 9$.

No puede existir $f : V \rightarrow W$ lineal tal que $f(a_i) = b_i$ ya que:

$$f(a_3)$$

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Antes de demostrar la propiedad 2.14, veamos qué puede pasar si la familia del espacio inicial no es base.

Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$.

1. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = 9$.

No puede existir $f : V \rightarrow W$ lineal tal que $f(a_i) = b_i$ ya que:

$$f(a_3) = f(a_1 + a_2)$$

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Antes de demostrar la propiedad 2.14, veamos qué puede pasar si la familia del espacio inicial no es base.

Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$.

1. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = 9$.

No puede existir $f : V \rightarrow W$ lineal tal que $f(a_i) = b_i$ ya que:

$$f(a_3) = f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$$

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Antes de demostrar la propiedad 2.14, veamos qué puede pasar si la familia del espacio inicial no es base.

Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$.

1. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = 9$.

No puede existir $f : V \rightarrow W$ lineal tal que $f(a_i) = b_i$ ya que:

$$f(a_3) = f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) = 2 + 5$$

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Antes de demostrar la propiedad 2.14, veamos qué puede pasar si la familia del espacio inicial no es base.

Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$.

1. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = 9$.

No puede existir $f : V \rightarrow W$ lineal tal que $f(a_i) = b_i$ ya que:

$$f(a_3) = f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) = 2 + 5 = 7$$

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Antes de demostrar la propiedad 2.14, veamos qué puede pasar si la familia del espacio inicial no es base.

Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$.

1. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = 9$.

No puede existir $f : V \rightarrow W$ lineal tal que $f(a_i) = b_i$ ya que:

$$f(a_3) = f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) = 2 + 5 = 7 \neq 9$$

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$.

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$.

Existe más de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(a_1) = b_1$.

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$.

Existe más de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(a_1) = b_1$.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$.

Existe más de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(a_1) = b_1$.

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2x - 10y \end{aligned}$$

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$.

Existe más de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(a_1) = b_1$.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2x - 10y = \begin{pmatrix} 2 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$.

Existe más de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(a_1) = b_1$.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2x - 10y = \begin{pmatrix} 2 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$.

Existe más de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(a_1) = b_1$.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2x - 10y = \begin{pmatrix} 2 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2x - 24y$$

Ejemplos 2.15.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2. Sean $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = 2$.

Existe más de una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(a_1) = b_1$.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2x - 10y = \begin{pmatrix} 2 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2x - 24y = \begin{pmatrix} 2 & -24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Sea (a_1, \dots, a_n) una base de V ,

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Sea (a_1, \dots, a_n) una base de V ,

y sea (b_1, \dots, b_n) una familia de vectores de W .

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Sea (a_1, \dots, a_n) una base de V ,

y sea (b_1, \dots, b_n) una familia de vectores de W .

Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \rightarrow W$

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Sea (a_1, \dots, a_n) una base de V ,

y sea (b_1, \dots, b_n) una familia de vectores de W .

Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(a_i) = b_i$ para todo i .

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Sea (a_1, \dots, a_n) una base de V ,

y sea (b_1, \dots, b_n) una familia de vectores de W .

Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(a_i) = b_i$ para todo i .

Demostración de la propiedad 2.14.

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Sea (a_1, \dots, a_n) una base de V ,

y sea (b_1, \dots, b_n) una familia de vectores de W .

Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(a_i) = b_i$ para todo i .

Demostración de la propiedad 2.14.

Recordamos que, como (a_1, \dots, a_n) es base de V , dado un vector $v \in V$,

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Sea (a_1, \dots, a_n) una base de V ,

y sea (b_1, \dots, b_n) una familia de vectores de W .

Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(a_i) = b_i$ para todo i .

Demostración de la propiedad 2.14.

Recordamos que, como (a_1, \dots, a_n) es base de V , dado un vector $v \in V$, existen unos únicos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Sea (a_1, \dots, a_n) una base de V ,

y sea (b_1, \dots, b_n) una familia de vectores de W .

Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(a_i) = b_i$ para todo i .

Demostración de la propiedad 2.14.

Recordamos que, como (a_1, \dots, a_n) es base de V , dado un vector $v \in V$, existen unos únicos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

Por lo tanto la existencia, la linealidad y la unicidad de la aplicación f son consecuencia de la ecuación:

Propiedad 2.14.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales.

Sea (a_1, \dots, a_n) una base de V ,

y sea (b_1, \dots, b_n) una familia de vectores de W .

Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(a_i) = b_i$ para todo i .

Demostración de la propiedad 2.14.

Recordamos que, como (a_1, \dots, a_n) es base de V , dado un vector $v \in V$, existen unos únicos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t.q. $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

Por lo tanto la existencia, la linealidad y la unicidad de la aplicación f son consecuencia de la ecuación:

$$f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$$



Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sea $h : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ una aplicación lineal.

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sea $h : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ una aplicación lineal.

Llamemos (e_1, \dots, e_n) a la base canónica de \mathbb{F}^n .

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sea $h : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ una aplicación lineal.

Llamemos (e_1, \dots, e_n) a la base canónica de \mathbb{F}^n .

Entonces $h = h_A$,

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Sea $h : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ una aplicación lineal.

Llamemos (e_1, \dots, e_n) a la base canónica de \mathbb{F}^n .

Entonces $h = h_A$,

donde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es la matriz por columnas $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

$$h_A(X)$$

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

$$\begin{aligned} h_A(X) & \\ & = h(X) \end{aligned}$$

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

$$h_A(X)$$

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

$$h_A(X) = AX$$

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

$$h_A(X) = AX$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

$$h_A(X) = AX$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

$$h_A(X) = AX = x_1 h(e_1) + \dots + x_n h(e_n)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

$$\begin{aligned}h_A(X) &= AX = x_1 h(e_1) + \dots + x_n h(e_n) \\ &= h(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

$$\begin{aligned}h_A(X) &= AX = x_1 h(e_1) + \dots + x_n h(e_n) \\ &= h(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

$$\begin{aligned}h_A(X) &= AX = x_1 h(e_1) + \dots + x_n h(e_n) \\ &= h(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

$$\begin{aligned}h_A(X) &= AX = x_1 h(e_1) + \dots + x_n h(e_n) \\ &= h(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = h(X)\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Lema 2.16.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Demostración.

Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz $A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$.

Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$ cualquiera, calculamos su imagen:

$$\begin{aligned}h_A(X) &= AX = x_1 h(e_1) + \dots + x_n h(e_n) \\ &= h(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = h(X)\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



Ejercicios 2.17.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

- 2.10
- 2.11

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales de dimensión finita,

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales de dimensión finita,

 V W

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales de dimensión finita,
 $\dim V = n$, $\dim W = m$.

V

W

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales de dimensión finita,

$\dim V = n$, $\dim W = m$.

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V ,

V

W

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales de dimensión finita,

$\dim V = n$, $\dim W = m$.

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V ,

$$\begin{array}{ccc} V & & W \\ & \downarrow f_{\mathcal{B}} & \\ & \mathbb{F}^n & \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales de dimensión finita,

$\dim V = n$, $\dim W = m$.

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V ,

y sea $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ una base de W .

$$\begin{array}{ccc} V & & W \\ & \downarrow f_{\mathcal{B}} & \\ & \mathbb{F}^n & \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales de dimensión finita,

$\dim V = n$, $\dim W = m$.

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V ,

y sea $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ una base de W .

$$\begin{array}{ccc} V & & W \\ \downarrow f_{\mathcal{B}} & & \downarrow f_{\mathcal{C}} \\ \mathbb{F}^n & & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

$$\begin{array}{ccc} V & & W \\ \downarrow f_B & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

1. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$,

$$\begin{array}{ccc} V & & W \\ \downarrow f_B & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

1. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$,

$$\begin{array}{ccc} V & & W \\ \downarrow f_B & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

1. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$,
podemos construir una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$

$$\begin{array}{ccc} V & & W \\ \downarrow f_B & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

1. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$,
podemos construir una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$
definiendo $f = f_C^{-1} \circ h_A \circ f_B$.

$$\begin{array}{ccc} V & & W \\ \downarrow f_B & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

1. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$,
podemos construir una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$
definiendo $f = f_C^{-1} \circ h_A \circ f_B$.

$$\begin{array}{ccc} V & \overset{f}{\dashrightarrow} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

1. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$,

podemos construir una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$

definiendo $f = f_C^{-1} \circ h_A \circ f_B$.

Es decir, tomamos como f la única aplicación que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} V & \overset{f}{\dashrightarrow} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

1. Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$,

podemos construir una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$

definiendo $f = f_C^{-1} \circ h_A \circ f_B$.

Es decir, tomamos como f la única aplicación que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} V & \overset{f}{\dashrightarrow} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

($f_C^{-1} \circ h_A \circ f_B$ es lineal por ser composición de aplicaciones lineales).

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

$$\begin{array}{ccc} V & & W \\ \downarrow f_B & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \rightarrow W$ lineal,

$$\begin{array}{ccc} V & & W \\ \downarrow f_B & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \rightarrow W$ lineal,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \rightarrow W$ lineal, definimos $h = f_C \circ f \circ f_B^{-1}$,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \rightarrow W$ lineal, definimos $h = f_C \circ f \circ f_B^{-1}$, es decir, h es la única aplicación que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \rightarrow W$ lineal, definimos $h = f_C \circ f \circ f_B^{-1}$, es decir, h es la única aplicación que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \rightarrow W$ lineal, definimos $h = f_C \circ f \circ f_B^{-1}$, es decir, h es la única aplicación que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

El lema 2.16 dice que existe una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ t.q. $h = h_A$.

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \rightarrow W$ lineal, definimos $h = f_C \circ f \circ f_B^{-1}$, es decir, h es la única aplicación que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

El lema 2.16 dice que existe una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ t.q. $h = h_A$.

Si (e_1, \dots, e_n) es la base canónica de \mathbb{F}^n ,

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \rightarrow W$ lineal, definimos $h = f_C \circ f \circ f_B^{-1}$, es decir, h es la única aplicación que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

El lema 2.16 dice que existe una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ t.q. $h = h_A$.

Si (e_1, \dots, e_n) es la base canónica de \mathbb{F}^n ,

$$A = (h(e_1) \mid \dots \mid h(e_n))$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \rightarrow W$ lineal, definimos $h = f_C \circ f \circ f_B^{-1}$, es decir, h es la única aplicación que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

El lema 2.16 dice que existe una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ t.q. $h = h_A$.

Si (e_1, \dots, e_n) es la base canónica de \mathbb{F}^n , entonces $f_B(b_i) = e_i \quad \forall i$,

$$A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \rightarrow W$ lineal, definimos $h = f_C \circ f \circ f_B^{-1}$, es decir, h es la única aplicación que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

El lema 2.16 dice que existe una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ t.q. $h = h_A$.

Si (e_1, \dots, e_n) es la base canónica de \mathbb{F}^n , entonces $f_B(b_i) = e_i \quad \forall i$, es decir, $f_B^{-1}(e_i) = b_i \quad \forall i$;

$$A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \rightarrow W$ lineal, definimos $h = f_C \circ f \circ f_B^{-1}$, es decir, h es la única aplicación que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

El lema 2.16 dice que existe una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ t.q. $h = h_A$.

Si (e_1, \dots, e_n) es la base canónica de \mathbb{F}^n , entonces $f_B(b_i) = e_i \quad \forall i$, es decir, $f_B^{-1}(e_i) = b_i \quad \forall i$; luego A es la matriz por columnas:

$$A = (h(e_1) | \dots | h(e_n))$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \rightarrow W$ lineal, definimos $h = f_C \circ f \circ f_B^{-1}$, es decir, h es la única aplicación que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

El lema 2.16 dice que existe una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ t.q. $h = h_A$.

Si (e_1, \dots, e_n) es la base canónica de \mathbb{F}^n , entonces $f_B(b_i) = e_i \quad \forall i$, es decir, $f_B^{-1}(e_i) = b_i \quad \forall i$; luego A es la matriz por columnas:

$$A = (h(e_1) \mid \dots \mid h(e_n)) = \left(f_C(f(b_1)) \mid \dots \mid f_C(f(b_n)) \right)$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2. Recíprocamente, dada $f : V \rightarrow W$ lineal, definimos $h = f_{\mathcal{C}} \circ f \circ f_{\mathcal{B}}^{-1}$, es decir, h es la única aplicación que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow f_{\mathcal{C}} \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

El lema 2.16 dice que existe una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ t.q. $h = h_A$.

Si (e_1, \dots, e_n) es la base canónica de \mathbb{F}^n , entonces $f_{\mathcal{B}}(b_i) = e_i \quad \forall i$, es decir, $f_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i) = b_i \quad \forall i$; luego A es la matriz por columnas:

$$A = (h(e_1) \mid \dots \mid h(e_n)) = \left(f_{\mathcal{C}}(f(b_1)) \mid \dots \mid f_{\mathcal{C}}(f(b_n)) \right)$$

Por definición, A es la **matriz** de f **respecto** de las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} .

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

En conclusión:

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

En conclusión:

3. Una vez que fijamos bases en V y W ,

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

En conclusión:

3. Una vez que fijamos bases en V y W , tenemos una correspondencia **biyectiva**

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

En conclusión:

3. Una vez que fijamos bases en V y W , tenemos una correspondencia **biyectiva** entre las aplicaciones lineales de V en W

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

En conclusión:

3. Una vez que fijamos bases en V y W , tenemos una correspondencia **biyectiva** entre las aplicaciones lineales de V en W y las matrices de $M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

En conclusión:

3. Una vez que fijamos bases en V y W , tenemos una correspondencia **biyectiva** entre las aplicaciones lineales de V en W y las matrices de $M_{m \times n}(\mathbb{F})$.
4. Dicha correspondencia biyectiva viene dada por el siguiente diagrama:

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

En conclusión:

- Una vez que fijamos bases en V y W , tenemos una correspondencia **biyectiva** entre las aplicaciones lineales de V en W y las matrices de $M_{m \times n}(\mathbb{F})$.
- Dicha correspondencia biyectiva viene dada por el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

5. Dada una aplicación lineal, construimos su matriz así:

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

5. Dada una aplicación lineal, construimos su matriz así:
 - 1) Partimos de los vectores de la base inicial.

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

5. Dada una aplicación lineal, construimos su matriz así:
 - I) Partimos de los vectores de la base inicial.
 - II) Calculamos sus imágenes.

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

5. Dada una aplicación lineal, construimos su matriz así:
 - I) Partimos de los vectores de la base inicial.
 - II) Calculamos sus imágenes.
 - III) Los expresamos en coordenadas respecto de la base final.

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

5. Dada una aplicación lineal, construimos su matriz así:
 - I) Partimos de los vectores de la base inicial.
 - II) Calculamos sus imágenes.
 - III) Los expresamos en coordenadas respecto de la base final.
 - IV) El resultado son las columnas de la matriz.

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

5. Dada una aplicación lineal, construimos su matriz así:
 - I) Partimos de los vectores de la base inicial.
 - II) Calculamos sus imágenes.
 - III) Los expresamos en coordenadas respecto de la base final.
 - IV) El resultado son las columnas de la matriz.

6. Que A sea la matriz de f en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} significa lo siguiente.

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

5. Dada una aplicación lineal, construimos su matriz así:
 - I) Partimos de los vectores de la base inicial.
 - II) Calculamos sus imágenes.
 - III) Los expresamos en coordenadas respecto de la base final.
 - IV) El resultado son las columnas de la matriz.

6. Que A sea la matriz de f en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} significa lo siguiente. Si $X \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base \mathcal{B} ,

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

5. Dada una aplicación lineal, construimos su matriz así:
 - I) Partimos de los vectores de la base inicial.
 - II) Calculamos sus imágenes.
 - III) Los expresamos en coordenadas respecto de la base final.
 - IV) El resultado son las columnas de la matriz.

6. Que A sea la matriz de f en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} significa lo siguiente. Si $X \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base \mathcal{B} , y $Y \in \mathbb{F}^m$ son las coordenadas de su imagen $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} ,

Observación 2.18.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

5. Dada una aplicación lineal, construimos su matriz así:
 - I) Partimos de los vectores de la base inicial.
 - II) Calculamos sus imágenes.
 - III) Los expresamos en coordenadas respecto de la base final.
 - IV) El resultado son las columnas de la matriz.

6. Que A sea la matriz de f en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} significa lo siguiente. Si $X \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base \mathcal{B} , y $Y \in \mathbb{F}^m$ son las coordenadas de su imagen $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} , entonces:

$$Y = AX$$

Nota 2.19.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Nota 2.19.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

¿Cuál es la matriz de

$$\begin{aligned}h_A : \mathbb{F}^n &\longrightarrow \mathbb{F}^m \\ X &\longmapsto AX\end{aligned}$$

Nota 2.19.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

¿Cuál es la matriz de

$$\begin{aligned}h_A : \mathbb{F}^n &\longrightarrow \mathbb{F}^m \\ X &\longmapsto AX\end{aligned}$$

respecto de las bases canónicas?

Nota 2.19.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

¿Cuál es la matriz de

$$\begin{aligned}h_A : \mathbb{F}^n &\longrightarrow \mathbb{F}^m \\ X &\longmapsto AX\end{aligned}$$

respecto de las bases canónicas? Es la matriz A .

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Calculemos la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Calculemos la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$ respecto de las bases $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ y $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Calculemos la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$ respecto de las bases $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ y $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Solución.

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Calculemos la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$ respecto de las bases $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ y $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Solución.

1) $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Calculemos la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$ respecto de las bases $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ y $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Solución.

I) $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

II) $f(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Calculemos la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$ respecto de las bases $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ y $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Solución.

I) $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

II) $f(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(b_2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Solución.

III) Buscamos escalares λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Solución.

III) Buscamos escalares λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
y μ_1, μ_2 tales que $\mu_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Solución.

III) Buscamos escalares λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
y μ_1, μ_2 tales que $\mu_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Podemos resolver estos dos sistemas a la vez:

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Solución.

III) Buscamos escalares λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
y μ_1, μ_2 tales que $\mu_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Podemos resolver estos dos sistemas a la vez:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Solución.

III) Buscamos escalares λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
y μ_1, μ_2 tales que $\mu_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Podemos resolver estos dos sistemas a la vez:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Solución.

III) Buscamos escalares λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
y μ_1, μ_2 tales que $\mu_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Podemos resolver estos dos sistemas a la vez:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -8 & -12 \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Solución.

III) Buscamos escalares λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
y μ_1, μ_2 tales que $\mu_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Podemos resolver estos dos sistemas a la vez:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -8 & -12 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Solución.

III) Buscamos escalares λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
y μ_1, μ_2 tales que $\mu_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Podemos resolver estos dos sistemas a la vez:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -8 & -12 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.20.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Solución.

III) Buscamos escalares λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
y μ_1, μ_2 tales que $\mu_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Podemos resolver estos dos sistemas a la vez:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -8 & -12 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

IV) La matriz que buscamos es $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.



Ejercicios 2.21.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

- 2.12
- 2.13

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales de dimensión finita,

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales de dimensión finita,
 $\dim V = n$, $\dim W = m$.

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Sean V y W dos \mathbb{F} -espacios vectoriales de dimensión finita, $\dim V = n$, $\dim W = m$.

1. Recordamos que $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2. Sea $\text{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones \mathbb{F} -lineales del espacio inicial V al espacio final W , es decir:

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2. Sea $\text{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones \mathbb{F} -lineales del espacio inicial V al espacio final W , es decir:

$$\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ lineal}\}$$

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2. Sea $\text{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones \mathbb{F} -lineales del espacio inicial V al espacio final W , es decir:

$$\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ lineal}\}$$

$\text{Hom}(V, W)$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial con las operaciones siguientes.

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2. Sea $\text{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones \mathbb{F} -lineales del espacio inicial V al espacio final W , es decir:

$$\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ lineal}\}$$

$\text{Hom}(V, W)$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial con las operaciones siguientes.

- La suma de dos vectores $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ es

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2. Sea $\text{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones \mathbb{F} -lineales del espacio inicial V al espacio final W , es decir:

$$\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ lineal}\}$$

$\text{Hom}(V, W)$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial con las operaciones siguientes.

- La suma de dos vectores $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $f(v) + g(v) \in W$.

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2. Sea $\text{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones \mathbb{F} -lineales del espacio inicial V al espacio final W , es decir:

$$\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ lineal}\}$$

$\text{Hom}(V, W)$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial con las operaciones siguientes.

- La suma de dos vectores $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $f(v) + g(v) \in W$.
- El producto del escalar λ por el vector $f \in \text{Hom}(V, W)$ es

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2. Sea $\text{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones \mathbb{F} -lineales del espacio inicial V al espacio final W , es decir:

$$\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ lineal}\}$$

$\text{Hom}(V, W)$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial con las operaciones siguientes.

- La suma de dos vectores $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $f(v) + g(v) \in W$.
- El producto del escalar λ por el vector $f \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $\lambda f(v) \in W$.

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2. Sea $\text{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones \mathbb{F} -lineales del espacio inicial V al espacio final W , es decir:

$$\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ lineal}\}$$

$\text{Hom}(V, W)$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial con las operaciones siguientes.

- La suma de dos vectores $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $f(v) + g(v) \in W$.
- El producto del escalar λ por el vector $f \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $\lambda f(v) \in W$.

$\text{Hom}(V, W)$ cumple las ocho propiedades de espacio vectorial

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2. Sea $\text{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones \mathbb{F} -lineales del espacio inicial V al espacio final W , es decir:

$$\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ lineal}\}$$

$\text{Hom}(V, W)$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial con las operaciones siguientes.

- La suma de dos vectores $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $f(v) + g(v) \in W$.
- El producto del escalar λ por el vector $f \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $\lambda f(v) \in W$.

$\text{Hom}(V, W)$ cumple las ocho propiedades de espacio vectorial gracias a que el espacio final W es espacio vectorial;

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2. Sea $\text{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones \mathbb{F} -lineales del espacio inicial V al espacio final W , es decir:

$$\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ lineal}\}$$

$\text{Hom}(V, W)$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial con las operaciones siguientes.

- La suma de dos vectores $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $f(v) + g(v) \in W$.
- El producto del escalar λ por el vector $f \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $\lambda f(v) \in W$.

$\text{Hom}(V, W)$ cumple las ocho propiedades de espacio vectorial gracias a que el espacio final W es espacio vectorial; aquí las propiedades del espacio inicial V no juegan ningún papel.

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2. Sea $\text{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones \mathbb{F} -lineales del espacio inicial V al espacio final W , es decir:

$$\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ lineal}\}$$

$\text{Hom}(V, W)$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial con las operaciones siguientes.

- La suma de dos vectores $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $f(v) + g(v) \in W$.
- El producto del escalar λ por el vector $f \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $\lambda f(v) \in W$.

$\text{Hom}(V, W)$ cumple las ocho propiedades de espacio vectorial gracias a que el espacio final W es espacio vectorial; aquí las propiedades del espacio inicial V no juegan ningún papel.

El vector neutro de $\text{Hom}(V, W)$ es

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2. Sea $\text{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones \mathbb{F} -lineales del espacio inicial V al espacio final W , es decir:

$$\text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ lineal}\}$$

$\text{Hom}(V, W)$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial con las operaciones siguientes.

- La suma de dos vectores $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $f(v) + g(v) \in W$.
- El producto del escalar λ por el vector $f \in \text{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $\lambda f(v) \in W$.

$\text{Hom}(V, W)$ cumple las ocho propiedades de espacio vectorial gracias a que el espacio final W es espacio vectorial; aquí las propiedades del espacio inicial V no juegan ningún papel.

El vector neutro de $\text{Hom}(V, W)$ es la aplicación nula, que a cada $v \in V$ lo envía a $\bar{0} \in W$.

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

3. Fijemos una base en V y una base en W .

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

3. Fijemos una base en V y una base en W .

Obtenemos una aplicación biyectiva entre $\text{Hom}(V, W)$ y $M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

3. Fijemos una base en V y una base en W .

Obtenemos una aplicación biyectiva entre $\text{Hom}(V, W)$ y $M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Además esta aplicación biyectiva es lineal.

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

3. Fijemos una base en V y una base en W .

Obtenemos una aplicación biyectiva entre $\text{Hom}(V, W)$ y $M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Además esta aplicación biyectiva es lineal.

En otras palabras,

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

3. Fijemos una base en V y una base en W .

Obtenemos una aplicación biyectiva entre $\text{Hom}(V, W)$ y $M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Además esta aplicación biyectiva es lineal.

En otras palabras,

si A es la matriz de f , y B es la matriz de g ,

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

3. Fijemos una base en V y una base en W .

Obtenemos una aplicación biyectiva entre $\text{Hom}(V, W)$ y $M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Además esta aplicación biyectiva es lineal.

En otras palabras,

si A es la matriz de f , y B es la matriz de g ,
entonces $A + B$ es la matriz de $f + g$;

Notas 2.22.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

3. Fijemos una base en V y una base en W .

Obtenemos una aplicación biyectiva entre $\text{Hom}(V, W)$ y $M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Además esta aplicación biyectiva es lineal.

En otras palabras,

si A es la matriz de f , y B es la matriz de g ,

entonces $A + B$ es la matriz de $f + g$;

y si λ es un escalar, entonces λA es la matriz de λf .

Nota 2.23.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Nota 2.23.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

La construcción anterior tiene especial interés en el caso $W = \mathbb{F}$.

Nota 2.23.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

La construcción anterior tiene especial interés en el caso $W = \mathbb{F}$.

Decimos que $\text{Hom}(V, \mathbb{F})$ es el espacio vectorial **dual** del espacio vectorial V , y lo denotamos:

Nota 2.23.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

La construcción anterior tiene especial interés en el caso $W = \mathbb{F}$.

Decimos que $\text{Hom}(V, \mathbb{F})$ es el espacio vectorial **dual** del espacio vectorial V , y lo denotamos:

$$V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{F}) = \{f : V \rightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ lineal}\}$$

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Componer aplicaciones lineales es equivalente a multiplicar matrices.

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Componer aplicaciones lineales es equivalente a multiplicar matrices.

En términos precisos:

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Componer aplicaciones lineales es equivalente a multiplicar matrices.

En términos precisos:

Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de $f : V \rightarrow W$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} ,

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Componer aplicaciones lineales es equivalente a multiplicar matrices.

En términos precisos:

Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de $f : V \rightarrow W$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} ,
y $B \in M_{p \times m}(\mathbb{F})$ es la matriz de $g : W \rightarrow U$ en las bases \mathcal{C} y \mathcal{D} ,

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Componer aplicaciones lineales es equivalente a multiplicar matrices.

En términos precisos:

Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de $f : V \rightarrow W$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} ,
y $B \in M_{p \times m}(\mathbb{F})$ es la matriz de $g : W \rightarrow U$ en las bases \mathcal{C} y \mathcal{D} ,
entonces la matriz de la composición $g \circ f : V \rightarrow U$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{D}

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Componer aplicaciones lineales es equivalente a multiplicar matrices.

En términos precisos:

Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de $f : V \rightarrow W$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} ,
y $B \in M_{p \times m}(\mathbb{F})$ es la matriz de $g : W \rightarrow U$ en las bases \mathcal{C} y \mathcal{D} ,
entonces la matriz de la composición $g \circ f : V \rightarrow U$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{D}
es el producto $BA \in M_{p \times n}(\mathbb{F})$.

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Componer aplicaciones lineales es equivalente a multiplicar matrices.

En términos precisos:

Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de $f : V \rightarrow W$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} ,
y $B \in M_{p \times m}(\mathbb{F})$ es la matriz de $g : W \rightarrow U$ en las bases \mathcal{C} y \mathcal{D} ,
entonces la matriz de la composición $g \circ f : V \rightarrow U$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{D}
es el producto $BA \in M_{p \times n}(\mathbb{F})$.

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$$

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Componer aplicaciones lineales es equivalente a multiplicar matrices.

En términos precisos:

Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de $f : V \rightarrow W$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} ,
y $B \in M_{p \times m}(\mathbb{F})$ es la matriz de $g : W \rightarrow U$ en las bases \mathcal{C} y \mathcal{D} ,
entonces la matriz de la composición $g \circ f : V \rightarrow U$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{D}
es el producto $BA \in M_{p \times n}(\mathbb{F})$.

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow f_{\mathcal{B}} & & \downarrow f_{\mathcal{C}} & & \downarrow f_{\mathcal{D}} \\ \mathbb{F}^n & & \mathbb{F}^m & & \mathbb{F}^p \end{array}$$

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Componer aplicaciones lineales es equivalente a multiplicar matrices.

En términos precisos:

Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de $f : V \rightarrow W$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} ,
y $B \in M_{p \times m}(\mathbb{F})$ es la matriz de $g : W \rightarrow U$ en las bases \mathcal{C} y \mathcal{D} ,
entonces la matriz de la composición $g \circ f : V \rightarrow U$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{D}
es el producto $BA \in M_{p \times n}(\mathbb{F})$.

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow f_{\mathcal{B}} & & \downarrow f_{\mathcal{C}} & & \downarrow f_{\mathcal{D}} \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^p \end{array}$$

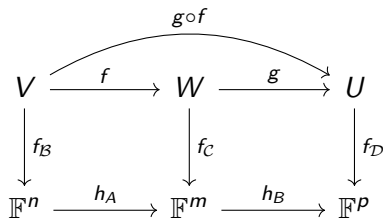
Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Componer aplicaciones lineales es equivalente a multiplicar matrices.

En términos precisos:

Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de $f : V \rightarrow W$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} , y $B \in M_{p \times m}(\mathbb{F})$ es la matriz de $g : W \rightarrow U$ en las bases \mathcal{C} y \mathcal{D} , entonces la matriz de la composición $g \circ f : V \rightarrow U$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{D} es el producto $BA \in M_{p \times n}(\mathbb{F})$.



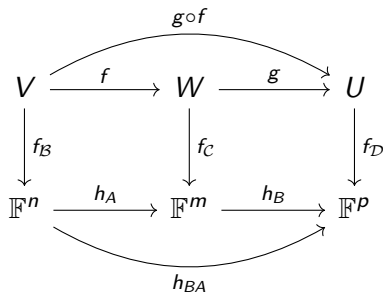
Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Componer aplicaciones lineales es equivalente a multiplicar matrices.

En términos precisos:

Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de $f : V \rightarrow W$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} , y $B \in M_{p \times m}(\mathbb{F})$ es la matriz de $g : W \rightarrow U$ en las bases \mathcal{C} y \mathcal{D} , entonces la matriz de la composición $g \circ f : V \rightarrow U$ en las bases \mathcal{B} y \mathcal{D} es el producto $BA \in M_{p \times n}(\mathbb{F})$.



Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Demostración.

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Demostración.

Basta comprobar que $h_B \circ h_A = h_{BA}$.

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Demostración.

Basta comprobar que $h_B \circ h_A = h_{BA}$.

Pero esto es consecuencia de la asociatividad del producto de matrices,

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Demostración.

Basta comprobar que $h_B \circ h_A = h_{BA}$.

Pero esto es consecuencia de la asociatividad del producto de matrices, ya que para todo $X \in \mathbb{F}^n$:

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Demostración.

Basta comprobar que $h_B \circ h_A = h_{BA}$.

Pero esto es consecuencia de la asociatividad del producto de matrices, ya que para todo $X \in \mathbb{F}^n$:

$$h_B(h_A(X))$$

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Demostración.

Basta comprobar que $h_B \circ h_A = h_{BA}$.

Pero esto es consecuencia de la asociatividad del producto de matrices, ya que para todo $X \in \mathbb{F}^n$:

$$h_B(h_A(X)) = B(AX)$$

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Demostración.

Basta comprobar que $h_B \circ h_A = h_{BA}$.

Pero esto es consecuencia de la asociatividad del producto de matrices, ya que para todo $X \in \mathbb{F}^n$:

$$h_B(h_A(X)) = B(AX) = (BA)X$$

Propiedad 2.24.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Demostración.

Basta comprobar que $h_B \circ h_A = h_{BA}$.

Pero esto es consecuencia de la asociatividad del producto de matrices, ya que para todo $X \in \mathbb{F}^n$:

$$h_B(h_A(X)) = B(AX) = (BA)X = h_{BA}(X)$$



Ejercicios 2.25.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

- 2.14
- 2.15

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Definiciones 2.26.

2.6. Matrices regulares

Definiciones 2.26.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas en \mathbb{F} ,

Definiciones 2.26.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas en \mathbb{F} , i.e., sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Definiciones 2.26.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas en \mathbb{F} , i.e., sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

La matriz A se dice **regular** si

Definiciones 2.26.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas en \mathbb{F} , i.e., sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

La matriz A se dice **regular** si la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

Definiciones 2.26.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas en \mathbb{F} , i.e., sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

La matriz A se dice **regular** si la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

En tal caso,

Definiciones 2.26.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas en \mathbb{F} , i.e., sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

La matriz A se dice **regular** si la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

En tal caso,

sabemos que la aplicación inversa $(h_A)^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es también lineal,

Definiciones 2.26.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas en \mathbb{F} , i.e., sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

La matriz A se dice **regular** si la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

En tal caso,

sabemos que la aplicación inversa $(h_A)^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es también lineal, así que denotamos A^{-1} a su matriz respecto de las bases canónicas,

Definiciones 2.26.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas en \mathbb{F} , i.e., sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

La matriz A se dice **regular** si la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

En tal caso,

sabemos que la aplicación inversa $(h_A)^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es también lineal, así que denotamos A^{-1} a su matriz respecto de las bases canónicas, es decir, $(h_A)^{-1} = h_{A^{-1}}$.

Definiciones 2.26.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas en \mathbb{F} , i.e., sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

La matriz A se dice **regular** si la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

En tal caso,

sabemos que la aplicación inversa $(h_A)^{-1} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es también lineal, así que denotamos A^{-1} a su matriz respecto de las bases canónicas, es decir, $(h_A)^{-1} = h_{A^{-1}}$.

Decimos que A^{-1} es la matriz **inversa** de A .

Notas 2.27.

2.6. Matrices regulares

Notas 2.27.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz regular. Entonces:

Notas 2.27.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz regular. Entonces:

1. A^{-1} también es regular,

Notas 2.27.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz regular. Entonces:

1. A^{-1} también es regular, y $(A^{-1})^{-1} = A$.

Notas 2.27.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz regular. Entonces:

1. A^{-1} también es regular, y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$,

Notas 2.27.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz regular. Entonces:

1. A^{-1} también es regular, y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

Notas 2.27.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz regular. Entonces:

1. A^{-1} también es regular, y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

Demostración.

Notas 2.27.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz regular. Entonces:

1. A^{-1} también es regular, y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

Demostración.

$$h_{AA^{-1}}$$

Notas 2.27.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz regular. Entonces:

1. A^{-1} también es regular, y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

Demostración.

$$h_{AA^{-1}} = h_A \circ h_{A^{-1}}$$

Notas 2.27.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz regular. Entonces:

1. A^{-1} también es regular, y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

Demostración.

$$h_{AA^{-1}} = h_A \circ h_{A^{-1}} = h_A \circ (h_A)^{-1}$$

Notas 2.27.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz regular. Entonces:

1. A^{-1} también es regular, y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

Demostración.

$$h_{AA^{-1}} = h_A \circ h_{A^{-1}} = h_A \circ (h_A)^{-1} = \text{id}_{\mathbb{F}^n}$$

Notas 2.27.

2.6. Matrices regulares

Sea A una matriz regular. Entonces:

1. A^{-1} también es regular, y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

Demostración.

$$h_{AA^{-1}} = h_A \circ h_{A^{-1}} = h_A \circ (h_A)^{-1} = \text{id}_{\mathbb{F}^n} = h_{I_n}.$$



Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$,

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.

Demostración.

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.

Demostración.

Este es un resultado de la teoría de matrices, sin embargo para probarlo vamos a utilizar la teoría de aplicaciones lineales.

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.

Demostración.

Este es un resultado de la teoría de matrices, sin embargo para probarlo vamos a utilizar la teoría de aplicaciones lineales.

1. Veamos que la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.

Demostración.

Este es un resultado de la teoría de matrices, sin embargo para probarlo vamos a utilizar la teoría de aplicaciones lineales.

1. Veamos que la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

$$h_A \circ h_B = h_{AB}$$

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.

Demostración.

Este es un resultado de la teoría de matrices, sin embargo para probarlo vamos a utilizar la teoría de aplicaciones lineales.

1. Veamos que la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

$$h_A \circ h_B = h_{AB} = h_{I_n}$$

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.

Demostración.

Este es un resultado de la teoría de matrices, sin embargo para probarlo vamos a utilizar la teoría de aplicaciones lineales.

1. Veamos que la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

$$h_A \circ h_B = h_{AB} = h_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{F}^n},$$

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.

Demostración.

Este es un resultado de la teoría de matrices, sin embargo para probarlo vamos a utilizar la teoría de aplicaciones lineales.

1. Veamos que la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

$h_A \circ h_B = h_{AB} = h_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{F}^n}$, luego la aplicación $h_A \circ h_B$ es biyectiva.

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.

Demostración.

Este es un resultado de la teoría de matrices, sin embargo para probarlo vamos a utilizar la teoría de aplicaciones lineales.

1. Veamos que la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

$h_A \circ h_B = h_{AB} = h_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{F}^n}$, luego la aplicación $h_A \circ h_B$ es biyectiva.

Por tanto $h_A \circ h_B$ es sobreyectiva,

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.

Demostración.

Este es un resultado de la teoría de matrices, sin embargo para probarlo vamos a utilizar la teoría de aplicaciones lineales.

1. Veamos que la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

$h_A \circ h_B = h_{AB} = h_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{F}^n}$, luego la aplicación $h_A \circ h_B$ es biyectiva.

Por tanto $h_A \circ h_B$ es sobreyectiva, luego h_A es sobreyectiva,

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.

Demostración.

Este es un resultado de la teoría de matrices, sin embargo para probarlo vamos a utilizar la teoría de aplicaciones lineales.

1. Veamos que la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

$h_A \circ h_B = h_{AB} = h_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{F}^n}$, luego la aplicación $h_A \circ h_B$ es biyectiva.

Por tanto $h_A \circ h_B$ es sobreyectiva, luego h_A es sobreyectiva, y como la dimensión del espacio inicial es igual a la del espacio final,

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices **cuadradas** $n \times n$.

Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.

Demostración.

Este es un resultado de la teoría de matrices, sin embargo para probarlo vamos a utilizar la teoría de aplicaciones lineales.

1. Veamos que la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

$h_A \circ h_B = h_{AB} = h_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{F}^n}$, luego la aplicación $h_A \circ h_B$ es biyectiva.

Por tanto $h_A \circ h_B$ es sobreyectiva, luego h_A es sobreyectiva, y como la dimensión del espacio inicial es igual a la del espacio final, $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Demostración.

2. Como h_A es biyectiva,

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Demostración.

2. Como h_A es biyectiva, A es regular,

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Demostración.

2. Como h_A es biyectiva, A es regular, y existe A^{-1} .

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Demostración.

2. Como h_A es biyectiva, A es regular, y existe A^{-1} .

Calculamos $A^{-1}AB$:

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Demostración.

2. Como h_A es biyectiva, A es regular, y existe A^{-1} .

Calculamos $A^{-1}AB$:

$$A^{-1}AB$$

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Demostración.

2. Como h_A es biyectiva, A es regular, y existe A^{-1} .

Calculamos $A^{-1}AB$:

$$A^{-1}I_n = A^{-1}AB$$

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Demostración.

2. Como h_A es biyectiva, A es regular, y existe A^{-1} .

Calculamos $A^{-1}AB$:

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB$$

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Demostración.

2. Como h_A es biyectiva, A es regular, y existe A^{-1} .

Calculamos $A^{-1}AB$:

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB$$

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Demostración.

2. Como h_A es biyectiva, A es regular, y existe A^{-1} .

Calculamos $A^{-1}AB$:

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Demostración.

2. Como h_A es biyectiva, A es regular, y existe A^{-1} .

Calculamos $A^{-1}AB$:

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

B es regular porque

Teorema 2.28 (de la matrices inversas).

2.6. Matrices regulares

Demostración.

2. Como h_A es biyectiva, A es regular, y existe A^{-1} .

Calculamos $A^{-1}AB$:

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B$$

B es regular porque A^{-1} es regular.



Corolario 2.29.

2.6. Matrices regulares

Corolario 2.29.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas tales que $AB = I_n$.

Corolario 2.29.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas tales que $AB = I_n$.

1. Entonces las matrices A y B conmutan, $AB = BA = I_n$.

Corolario 2.29.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas tales que $AB = I_n$.

1. Entonces las matrices A y B conmutan, $AB = BA = I_n$.
2. Si A' es otra matriz cuadrada tal que $A'B = I_n$,

Corolario 2.29.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas tales que $AB = I_n$.

1. Entonces las matrices A y B conmutan, $AB = BA = I_n$.
2. Si A' es otra matriz cuadrada tal que $A'B = I_n$, entonces $A = A'$.

Corolario 2.29.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas tales que $AB = I_n$.

1. Entonces las matrices A y B conmutan, $AB = BA = I_n$.
2. Si A' es otra matriz cuadrada tal que $A'B = I_n$, entonces $A = A'$.
3. Si B' es otra matriz cuadrada tal que $AB' = I_n$,

Corolario 2.29.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas tales que $AB = I_n$.

1. Entonces las matrices A y B conmutan, $AB = BA = I_n$.
2. Si A' es otra matriz cuadrada tal que $A'B = I_n$, entonces $A = A'$.
3. Si B' es otra matriz cuadrada tal que $AB' = I_n$, entonces $B = B'$.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas.

1. La matriz producto AB es regular sii

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas.

1. La matriz producto AB es regular sii tanto A como B son regulares.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas.

1. La matriz producto AB es regular sii tanto A como B son regulares.
En tal caso $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas.

1. La matriz producto AB es regular sii tanto A como B son regulares.
En tal caso $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Recuerda que, al trasponer matrices, el orden de los productos también se invierte, es decir, $(AB)^T = B^T A^T$.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas.

1. La matriz producto AB es regular sii tanto A como B son regulares. En tal caso $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Recuerda que, al trasponer matrices, el orden de los productos también se invierte, es decir, $(AB)^T = B^T A^T$.
3. La matriz A es regular si y solo si

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas.

1. La matriz producto AB es regular sii tanto A como B son regulares. En tal caso $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Recuerda que, al trasponer matrices, el orden de los productos también se invierte, es decir, $(AB)^T = B^T A^T$.
3. La matriz A es regular si y solo si su traspuesta A^T es regular.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas.

1. La matriz producto AB es regular sii tanto A como B son regulares.
En tal caso $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Recuerda que, al trasponer matrices, el orden de los productos también se invierte, es decir, $(AB)^T = B^T A^T$.
3. La matriz A es regular si y solo si su traspuesta A^T es regular.
En tal caso $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Si A y B son regulares, entonces:

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Si A y B son regulares, entonces:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})$$

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Si A y B son regulares, entonces:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1}$$

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Si A y B son regulares, entonces:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1}$$

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Si A y B son regulares, entonces:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Si A y B son regulares, entonces:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$A^T(A^{-1})^T$$

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Si A y B son regulares, entonces:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T$$

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Si A y B son regulares, entonces:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T$$

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Si A y B son regulares, entonces:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$$

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Si A y B son regulares, entonces:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$$

Luego el teorema de las matrices inversas nos dice

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Si A y B son regulares, entonces:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$$

Luego el teorema de las matrices inversas nos dice que AB y A^T son matrices regulares,

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Si A y B son regulares, entonces:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$$

Luego el teorema de las matrices inversas nos dice que AB y A^T son matrices regulares, y que sus inversas son $B^{-1}A^{-1}$ y $(A^{-1})^T$.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Recíprocamente, si la matriz AB es regular,

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Recíprocamente, si la matriz AB es regular, entonces la aplicación lineal $h_{AB} = h_A \circ h_B$ es biyectiva.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Recíprocamente, si la matriz AB es regular, entonces la aplicación lineal $h_{AB} = h_A \circ h_B$ es biyectiva.

Por consiguiente h_A es sobreyectiva y h_B es inyectiva.

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Recíprocamente, si la matriz AB es regular, entonces la aplicación lineal $h_{AB} = h_A \circ h_B$ es biyectiva.

Por consiguiente h_A es sobreyectiva y h_B es inyectiva.

Luego tanto h_A como h_B son biyectivas,

Corolario 2.30.

2.6. Matrices regulares

Demostración.

Recíprocamente, si la matriz AB es regular, entonces la aplicación lineal $h_{AB} = h_A \circ h_B$ es biyectiva.

Por consiguiente h_A es sobreyectiva y h_B es inyectiva.

Luego tanto h_A como h_B son biyectivas, ya que la dimensión de sus espacios iniciales es igual a la de sus espacios finales. □

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Sea $A \in M_3(\mathbb{C})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Es A regular? En caso afirmativo, calcula su matriz inversa.

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

El teorema de las matrices inversas nos dice que simplemente debemos comprobar si existe una matriz tal que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

El teorema de las matrices inversas nos dice que simplemente debemos comprobar si existe una matriz tal que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad entre matrices 3×3 es equivalente a que se cumplan tres sistemas de ecuaciones a la vez:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

El teorema de las matrices inversas nos dice que simplemente debemos comprobar si existe una matriz tal que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad entre matrices 3×3 es equivalente a que se cumplan tres sistemas de ecuaciones a la vez:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gracias al método de Gauss, podemos averiguar si los tres sistemas son compatibles y hallar su solución mediante un único cálculo:

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 6 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 6 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 6 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego A es regular,

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 6 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego A es regular, y su matriz inversa es:

Ejemplo 2.31.

2.6. Matrices regulares

Solución.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 6 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego A es regular, y su matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -5 & 2 & 10 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$



Ejercicios 2.32.

2.6. Matrices regulares

- 2.16
- 2.17
- 2.18
- 2.19

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

1. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

1. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que intercambiarle las filas 1 y 2.

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

1. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que intercambiarle las filas 1 y 2.

Demostración.

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

1. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que intercambiarle las filas 1 y 2.

Demostración.

En efecto, por ejemplo si la matriz tiene 2 columnas:

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

1. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que intercambiarle las filas 1 y 2.

Demostración.

En efecto, por ejemplo si la matriz tiene 2 columnas:

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

1. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que intercambiarle las filas 1 y 2.

Demostración.

En efecto, por ejemplo si la matriz tiene 2 columnas:

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$



Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

2. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

2. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que multiplicar la segunda fila por λ .

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

2. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que multiplicar la segunda fila por λ .

Demostración.

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

2. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que multiplicar la segunda fila por λ .

Demostración.

Por ejemplo si la matriz tiene 3 columnas:

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

2. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que multiplicar la segunda fila por λ .

Demostración.

Por ejemplo si la matriz tiene 3 columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

2. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que multiplicar la segunda fila por λ .

Demostración.

Por ejemplo si la matriz tiene 3 columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

3. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

3. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que sumarle a la fila 3 la fila 1.

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

3. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que sumarle a la fila 3 la fila 1.

Demostración.

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

3. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que sumarle a la fila 3 la fila 1.

Demostración.

Por ejemplo si la matriz tiene 1 columna:

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

3. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que sumarle a la fila 3 la fila 1.

Demostración.

Por ejemplo si la matriz tiene 1 columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

Notas 2.33.

2.7. Matrices elementales

3. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

por la izquierda es lo mismo que sumarle a la fila 3 la fila 1.

Demostración.

Por ejemplo si la matriz tiene 1 columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{11} + a_{31} \end{pmatrix}$$



Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos **matrices elementales** a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos **matrices elementales** a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35.

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos **matrices elementales** a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35.

No es necesario que memoricemos la expresión de las matrices elementales,

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos **matrices elementales** a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35.

No es necesario que memoricemos la expresión de las matrices elementales, en su lugar aplicamos la operación elemental deseada a la matriz identidad.

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos **matrices elementales** a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35.

No es necesario que memoricemos la expresión de las matrices elementales, en su lugar aplicamos la operación elemental deseada a la matriz identidad.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la matriz elemental 4×4

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos **matrices elementales** a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35.

No es necesario que memoricemos la expresión de las matrices elementales, en su lugar aplicamos la operación elemental deseada a la matriz identidad.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la matriz elemental 4×4 correspondiente a sumarle a la fila 2 la fila 4;

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos **matrices elementales** a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35.

No es necesario que memoricemos la expresión de las matrices elementales, en su lugar aplicamos la operación elemental deseada a la matriz identidad.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la matriz elemental 4×4 correspondiente a sumarle a la fila 2 la fila 4; llamemos F a dicha matriz.

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos **matrices elementales** a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35.

No es necesario que memoricemos la expresión de las matrices elementales, en su lugar aplicamos la operación elemental deseada a la matriz identidad.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la matriz elemental 4×4 correspondiente a sumarle a la fila 2 la fila 4; llamemos F a dicha matriz.

$$F \cdot I_4$$

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos **matrices elementales** a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35.

No es necesario que memoricemos la expresión de las matrices elementales, en su lugar aplicamos la operación elemental deseada a la matriz identidad.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la matriz elemental 4×4 correspondiente a sumarle a la fila 2 la fila 4; llamemos F a dicha matriz.

$$\underline{\underline{\text{propiedad de } I_4}} \quad F \cdot I_4$$

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos **matrices elementales** a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35.

No es necesario que memoricemos la expresión de las matrices elementales, en su lugar aplicamos la operación elemental deseada a la matriz identidad.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la matriz elemental 4×4 correspondiente a sumarle a la fila 2 la fila 4; llamemos F a dicha matriz.

$$F \xrightarrow{\text{propiedad de } I_4} F \cdot I_4$$

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos **matrices elementales** a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35.

No es necesario que memoricemos la expresión de las matrices elementales, en su lugar aplicamos la operación elemental deseada a la matriz identidad.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la matriz elemental 4×4 correspondiente a sumarle a la fila 2 la fila 4; llamemos F a dicha matriz.

$$F \xrightarrow{\text{propiedad de } I_4} F \cdot I_4 \xrightarrow{\text{propiedad de } F}$$

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos **matrices elementales** a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35.

No es necesario que memoricemos la expresión de las matrices elementales, en su lugar aplicamos la operación elemental deseada a la matriz identidad.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la matriz elemental 4×4 correspondiente a sumarle a la fila 2 la fila 4; llamemos F a dicha matriz.

$$F \xrightarrow{\text{propiedad de } I_4} F \cdot I_4 \xrightarrow{\text{propiedad de } F} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 2.34 y truco 2.35.

2.7. Matrices elementales

Definición 2.34.

Llamaremos **matrices elementales** a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35.

No es necesario que memoricemos la expresión de las matrices elementales, en su lugar aplicamos la operación elemental deseada a la matriz identidad.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la matriz elemental 4×4 correspondiente a sumarle a la fila 2 la fila 4; llamemos F a dicha matriz.

$$F \xrightarrow{\text{propiedad de } I_4} F \cdot I_4 \xrightarrow{\text{propiedad de } F} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.
2. Como las operaciones de Gauss son reversibles,

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.
2. Como las operaciones de Gauss son reversibles, las matrices elementales son regulares,

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.
2. Como las operaciones de Gauss son reversibles, las matrices elementales son regulares, y sus inversas también son matrices elementales.

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.
2. Como las operaciones de Gauss son reversibles, las matrices elementales son regulares, y sus inversas también son matrices elementales.

Operación	Inversa

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.
2. Como las operaciones de Gauss son reversibles, las matrices elementales son regulares, y sus inversas también son matrices elementales.

Operación	Inversa
$F_i \rightarrow \lambda F_i$	

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.
2. Como las operaciones de Gauss son reversibles, las matrices elementales son regulares, y sus inversas también son matrices elementales.

Operación	Inversa
$F_i \rightarrow \lambda F_i$	$F_i \rightarrow \lambda^{-1} F_i$

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.
2. Como las operaciones de Gauss son reversibles, las matrices elementales son regulares, y sus inversas también son matrices elementales.

Operación	Inversa
$F_i \rightarrow \lambda F_i$	$F_i \rightarrow \lambda^{-1} F_i$
$F_i \longleftrightarrow F_j$	

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.
2. Como las operaciones de Gauss son reversibles, las matrices elementales son regulares, y sus inversas también son matrices elementales.

Operación	Inversa
$F_i \rightarrow \lambda F_i$	$F_i \rightarrow \lambda^{-1} F_i$
$F_i \longleftrightarrow F_j$	$F_i \longleftrightarrow F_j$

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.
2. Como las operaciones de Gauss son reversibles, las matrices elementales son regulares, y sus inversas también son matrices elementales.

Operación	Inversa
$F_i \rightarrow \lambda F_i$	$F_i \rightarrow \lambda^{-1} F_i$
$F_i \longleftrightarrow F_j$	$F_i \longleftrightarrow F_j$
$F_i \rightarrow F_i + F_j$	

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.
2. Como las operaciones de Gauss son reversibles, las matrices elementales son regulares, y sus inversas también son matrices elementales.

Operación	Inversa
$F_i \rightarrow \lambda F_i$	$F_i \rightarrow \lambda^{-1} F_i$
$F_i \longleftrightarrow F_j$	$F_i \longleftrightarrow F_j$
$F_i \rightarrow F_i + F_j$	$F_i \rightarrow F_i - F_j$

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.
2. Como las operaciones de Gauss son reversibles, las matrices elementales son regulares, y sus inversas también son matrices elementales.

Operación	Inversa
$F_i \rightarrow \lambda F_i$	$F_i \rightarrow \lambda^{-1} F_i$
$F_i \longleftrightarrow F_j$	$F_i \longleftrightarrow F_j$
$F_i \rightarrow F_i + F_j$	$F_i \rightarrow F_i - F_j$
$F_i \rightarrow F_i + \mu F_j$	

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.
2. Como las operaciones de Gauss son reversibles, las matrices elementales son regulares, y sus inversas también son matrices elementales.

Operación	Inversa
$F_i \rightarrow \lambda F_i$	$F_i \rightarrow \lambda^{-1} F_i$
$F_i \longleftrightarrow F_j$	$F_i \longleftrightarrow F_j$
$F_i \rightarrow F_i + F_j$	$F_i \rightarrow F_i - F_j$
$F_i \rightarrow F_i + \mu F_j$	$F_i \rightarrow F_i - \mu F_j$

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

3. Las matrices elementales, al multiplicarlas por la derecha en lugar de por la izquierda, actúan por columnas en lugar de por filas.

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

3. Las matrices elementales, al multiplicarlas por la derecha en lugar de por la izquierda, actúan por columnas en lugar de por filas.
4. ¡Cuidado!

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

3. Las matrices elementales, al multiplicarlas por la derecha en lugar de por la izquierda, actúan por columnas en lugar de por filas.

4. ¡Cuidado! La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

3. Las matrices elementales, al multiplicarlas por la derecha en lugar de por la izquierda, actúan por columnas en lugar de por filas.
4. ¡Cuidado! La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

le suma a la fila 2 la fila 4 al multiplicarla por la izquierda,

Notas 2.36.

2.7. Matrices elementales

3. Las matrices elementales, al multiplicarlas por la derecha en lugar de por la izquierda, actúan por columnas en lugar de por filas.
4. ¡Cuidado! La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

le suma a la fila 2 la fila 4 al multiplicarla por la izquierda,
le suma a la columna 4 la columna 2 al multiplicarla por la derecha.

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada.

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada. Son equivalentes:

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada. Son equivalentes:

1. A es regular.

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada. Son equivalentes:

1. A es regular.
2. A es producto de matrices elementales.

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada. Son equivalentes:

1. A es regular.
2. A es producto de matrices elementales.
3. Existen $F_1, F_2, \dots, F_r \in M_n(\mathbb{F})$ matrices elementales tales que:

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada. Son equivalentes:

1. A es regular.
2. A es producto de matrices elementales.
3. Existen $F_1, F_2, \dots, F_r \in M_n(\mathbb{F})$ matrices elementales tales que:

$$F_r \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot A = I_n$$

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada. Son equivalentes:

1. A es regular.
2. A es producto de matrices elementales.
3. Existen $F_1, F_2, \dots, F_r \in M_n(\mathbb{F})$ matrices elementales tales que:

$$F_r \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot A = I_n$$

Demostración.

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada. Son equivalentes:

1. A es regular.
2. A es producto de matrices elementales.
3. Existen $F_1, F_2, \dots, F_r \in M_n(\mathbb{F})$ matrices elementales tales que:

$$F_r \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot A = I_n$$

Demostración.

- $(3 \Rightarrow 2)$

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada. Son equivalentes:

1. A es regular.
2. A es producto de matrices elementales.
3. Existen $F_1, F_2, \dots, F_r \in M_n(\mathbb{F})$ matrices elementales tales que:

$$F_r \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot A = I_n$$

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Despejando obtenemos $A = (F_1)^{-1} \cdot (F_2)^{-1} \cdots (F_r)^{-1}$.

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada. Son equivalentes:

1. A es regular.
2. A es producto de matrices elementales.
3. Existen $F_1, F_2, \dots, F_r \in M_n(\mathbb{F})$ matrices elementales tales que:

$$F_r \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot A = I_n$$

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Despejando obtenemos $A = (F_1)^{-1} \cdot (F_2)^{-1} \cdots (F_r)^{-1}$.
(Cuidado con el cambio de orden).

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada. Son equivalentes:

1. A es regular.
2. A es producto de matrices elementales.
3. Existen $F_1, F_2, \dots, F_r \in M_n(\mathbb{F})$ matrices elementales tales que:

$$F_r \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot A = I_n$$

Demostración.

- (3 \Rightarrow 2) Despejando obtenemos $A = (F_1)^{-1} \cdot (F_2)^{-1} \cdots (F_r)^{-1}$. (Cuidado con el cambio de orden). Así, el resultado es consecuencia de que la inversa de una matriz elemental es también elemental.

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Las matrices elementales son regulares,

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Las matrices elementales son regulares, y el producto de matrices regulares es regular.

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Las matrices elementales son regulares, y el producto de matrices regulares es regular.
- $(1 \Rightarrow 3)$

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Las matrices elementales son regulares, y el producto de matrices regulares es regular.
- $(1 \Rightarrow 3)$ El algoritmo desarrollado en el ejemplo 2.31 nos dice que

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Las matrices elementales son regulares, y el producto de matrices regulares es regular.
- $(1 \Rightarrow 3)$ El algoritmo desarrollado en el ejemplo 2.31 nos dice que una matriz cuadrada es regular si y solo si existe

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Las matrices elementales son regulares, y el producto de matrices regulares es regular.
- $(1 \Rightarrow 3)$ El algoritmo desarrollado en el ejemplo 2.31 nos dice que una matriz cuadrada es regular si y solo si existe una sucesión finita de operaciones del método de Gauss por filas,

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Las matrices elementales son regulares, y el producto de matrices regulares es regular.
- $(1 \Rightarrow 3)$ El algoritmo desarrollado en el ejemplo 2.31 nos dice que una matriz cuadrada es regular si y solo si existe una sucesión finita de operaciones del método de Gauss por filas, de manera que al aplicarlas a la matriz,

Propiedad 2.37.

2.7. Matrices elementales

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Las matrices elementales son regulares, y el producto de matrices regulares es regular.
- $(1 \Rightarrow 3)$ El algoritmo desarrollado en el ejemplo 2.31 nos dice que una matriz cuadrada es regular si y solo si existe una sucesión finita de operaciones del método de Gauss por filas, de manera que al aplicarlas a la matriz, obtenemos la matriz identidad.



Ejercicios 2.38.

2.7. Matrices elementales

- 2.20

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Definición 2.39.

2.8. Cambios de bases I

Definición 2.39.

2.8. Cambios de bases I

Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' dos bases de un mismo espacio vectorial V

Definición 2.39.

2.8. Cambios de bases I

Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' dos bases de un mismo espacio vectorial V de dimensión finita.

Definición 2.39.

2.8. Cambios de bases I

Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' dos bases de un mismo espacio vectorial V de dimensión finita.

La **matriz de cambio de bases** de \mathcal{B} a \mathcal{B}' es

Definición 2.39.

2.8. Cambios de bases I

Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' dos bases de un mismo espacio vectorial V de dimensión finita.

La **matriz de cambio de bases** de \mathcal{B} a \mathcal{B}' es la matriz de la aplicación identidad $\text{id}_V : V \rightarrow V$ respecto de \mathcal{B} y \mathcal{B}' .

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Sean b_1, b_2, b_3 y b'_1, b'_2, b'_3 los vectores de \mathbb{Q}^3 :

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Sean b_1, b_2, b_3 y b'_1, b'_2, b'_3 los vectores de \mathbb{Q}^3 :

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Observamos que $\dim \text{span}\langle b_1, b_2, b_3 \rangle = 3 = \dim \text{span}\langle b'_1, b'_2, b'_3 \rangle$,

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Sean b_1, b_2, b_3 y b'_1, b'_2, b'_3 los vectores de \mathbb{Q}^3 :

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Observamos que $\dim \text{span}\langle b_1, b_2, b_3 \rangle = 3 = \dim \text{span}\langle b'_1, b'_2, b'_3 \rangle$, por lo tanto (b_1, b_2, b_3) y (b'_1, b'_2, b'_3) son bases de \mathbb{Q}^3 .

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Sean b_1, b_2, b_3 y b'_1, b'_2, b'_3 los vectores de \mathbb{Q}^3 :

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Observamos que $\dim \text{span}\langle b_1, b_2, b_3 \rangle = 3 = \dim \text{span}\langle b'_1, b'_2, b'_3 \rangle$, por lo tanto (b_1, b_2, b_3) y (b'_1, b'_2, b'_3) son bases de \mathbb{Q}^3 .

Calculemos la matriz de cambio de bases de (b_1, b_2, b_3) a (b'_1, b'_2, b'_3) .

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

$$1) \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

$$\text{I) } b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II) No hay que hacer nada.

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

I) $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II) No hay que hacer nada.

III)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

I) $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II) No hay que hacer nada.

III)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

I) $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II) No hay que hacer nada.

III)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

I) $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II) No hay que hacer nada.

III)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -5 & -2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

I) $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II) No hay que hacer nada.

III)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -5 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

I) $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II) No hay que hacer nada.

III)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -5 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

I) $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II) No hay que hacer nada.

III)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -5 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.40.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

I) $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II) No hay que hacer nada.

III)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -5 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -7 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

IV) La matriz que buscamos es $\begin{pmatrix} -7 & -8 & -3 \\ -7 & -9 & -4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.



Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Sea P la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}'

Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Sea P la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' en el \mathbb{F} -espacio vectorial V .

Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Sea P la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' en el \mathbb{F} -espacio vectorial V .

1. P es una matriz cuadrada $n \times n$,

Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Sea P la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' en el \mathbb{F} -espacio vectorial V .

1. P es una matriz cuadrada $n \times n$, es decir $P \in M_n(\mathbb{F})$,

Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Sea P la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' en el \mathbb{F} -espacio vectorial V .

1. P es una matriz cuadrada $n \times n$, es decir $P \in M_n(\mathbb{F})$, con $n = \dim V$.

Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Sea P la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' en el \mathbb{F} -espacio vectorial V .

1. P es una matriz cuadrada $n \times n$, es decir $P \in M_n(\mathbb{F})$, con $n = \dim V$.
2. Las columnas de P son las coordenadas de los vectores de \mathcal{B} respecto de \mathcal{B}' .

Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Sea P la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' en el \mathbb{F} -espacio vectorial V .

1. P es una matriz cuadrada $n \times n$, es decir $P \in M_n(\mathbb{F})$, con $n = \dim V$.
2. Las columnas de P son las coordenadas de los vectores de \mathcal{B} respecto de \mathcal{B}' .
3. Como la aplicación identidad $\text{id}_V : V \rightarrow V$ es biyectiva,

Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Sea P la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' en el \mathbb{F} -espacio vectorial V .

1. P es una matriz cuadrada $n \times n$, es decir $P \in M_n(\mathbb{F})$, con $n = \dim V$.
2. Las columnas de P son las coordenadas de los vectores de \mathcal{B} respecto de \mathcal{B}' .
3. Como la aplicación identidad $\text{id}_V : V \rightarrow V$ es biyectiva, la matriz P es regular,

Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Sea P la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' en el \mathbb{F} -espacio vectorial V .

1. P es una matriz cuadrada $n \times n$, es decir $P \in M_n(\mathbb{F})$, con $n = \dim V$.
2. Las columnas de P son las coordenadas de los vectores de \mathcal{B} respecto de \mathcal{B}' .
3. Como la aplicación identidad $\text{id}_V : V \rightarrow V$ es biyectiva, la matriz P es regular, y su matriz inversa P^{-1} es

Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Sea P la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' en el \mathbb{F} -espacio vectorial V .

1. P es una matriz cuadrada $n \times n$, es decir $P \in M_n(\mathbb{F})$, con $n = \dim V$.
2. Las columnas de P son las coordenadas de los vectores de \mathcal{B} respecto de \mathcal{B}' .
3. Como la aplicación identidad $\text{id}_V : V \rightarrow V$ es biyectiva, la matriz P es regular, y su matriz inversa P^{-1} es la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} .

Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Sea P la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' en el \mathbb{F} -espacio vectorial V .

1. P es una matriz cuadrada $n \times n$, es decir $P \in M_n(\mathbb{F})$, con $n = \dim V$.
2. Las columnas de P son las coordenadas de los vectores de \mathcal{B} respecto de \mathcal{B}' .
3. Como la aplicación identidad $\text{id}_V : V \rightarrow V$ es biyectiva, la matriz P es regular, y su matriz inversa P^{-1} es la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} .
4. Si $X \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base \mathcal{B} ,

Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Sea P la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' en el \mathbb{F} -espacio vectorial V .

1. P es una matriz cuadrada $n \times n$, es decir $P \in M_n(\mathbb{F})$, con $n = \dim V$.
2. Las columnas de P son las coordenadas de los vectores de \mathcal{B} respecto de \mathcal{B}' .
3. Como la aplicación identidad $\text{id}_V : V \rightarrow V$ es biyectiva, la matriz P es regular, y su matriz inversa P^{-1} es la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} .
4. Si $X \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base \mathcal{B} , y $X' \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas del mismo vector $v \in V$ en la base \mathcal{B}' ,

Notas 2.41.

2.8. Cambios de bases I

Sea P la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' en el \mathbb{F} -espacio vectorial V .

1. P es una matriz cuadrada $n \times n$, es decir $P \in M_n(\mathbb{F})$, con $n = \dim V$.
2. Las columnas de P son las coordenadas de los vectores de \mathcal{B} respecto de \mathcal{B}' .
3. Como la aplicación identidad $\text{id}_V : V \rightarrow V$ es biyectiva, la matriz P es regular, y su matriz inversa P^{-1} es la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} .
4. Si $X \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base \mathcal{B} , y $X' \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas del mismo vector $v \in V$ en la base \mathcal{B}' , entonces:

$$X' = PX$$

Propiedad 2.42.

2.8. Cambios de bases I

Propiedad 2.42.

2.8. Cambios de bases I

Recíprocamente,

Propiedad 2.42.

2.8. Cambios de bases I

Recíprocamente,
dada una base \mathcal{B} de un \mathbb{F} -espacio vectorial V ,

Propiedad 2.42.

2.8. Cambios de bases I

Recíprocamente,
dada una base \mathcal{B} de un \mathbb{F} -espacio vectorial V ,
con $\dim V = n < \infty$,

Propiedad 2.42.

2.8. Cambios de bases I

Recíprocamente,
dada una base \mathcal{B} de un \mathbb{F} -espacio vectorial V ,
con $\dim V = n < \infty$,
y dada una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ **regular**,

Propiedad 2.42.

2.8. Cambios de bases I

Recíprocamente,
dada una base \mathcal{B} de un \mathbb{F} -espacio vectorial V ,
con $\dim V = n < \infty$,
y dada una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ **regular**,
existe una única base \mathcal{B}' de V tal que

Propiedad 2.42.

2.8. Cambios de bases I

Recíprocamente,
dada una base \mathcal{B} de un \mathbb{F} -espacio vectorial V ,
con $\dim V = n < \infty$,
y dada una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ **regular**,

existe una única base \mathcal{B}' de V tal que
 P es la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' .

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Observa que $\mathcal{B} = (b_1, b_2) = \left(\left(\frac{2}{3}\right), \left(\frac{3}{4}\right)\right)$ es una base de \mathbb{R}^2 ,

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Observa que $\mathcal{B} = (b_1, b_2) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ es una base de \mathbb{R}^2 ,
y que $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ es una matriz regular.

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Observa que $\mathcal{B} = (b_1, b_2) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ es una base de \mathbb{R}^2 ,
y que $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ es una matriz regular.

Halla la base $\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2)$ de \mathbb{R}^2 tal que

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Observa que $\mathcal{B} = (b_1, b_2) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ es una base de \mathbb{R}^2 ,
y que $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ es una matriz regular.

Halla la base $\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2)$ de \mathbb{R}^2 tal que
la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' es P .

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} ,

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , que es P^{-1} ,

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , que es P^{-1} , ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de \mathcal{B}' ,

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , que es P^{-1} , ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de \mathcal{B}' , que buscamos,

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , que es P^{-1} , ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de \mathcal{B}' , que buscamos, expresados en coordenadas de los vectores de \mathcal{B} ,

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , que es P^{-1} , ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de \mathcal{B}' , que buscamos, expresados en coordenadas de los vectores de \mathcal{B} , que conocemos.

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , que es P^{-1} , ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de \mathcal{B}' , que buscamos, expresados en coordenadas de los vectores de \mathcal{B} , que conocemos.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , que es P^{-1} , ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de \mathcal{B}' , que buscamos, expresados en coordenadas de los vectores de \mathcal{B} , que conocemos.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b'_1

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , que es P^{-1} , ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de \mathcal{B}' , que buscamos, expresados en coordenadas de los vectores de \mathcal{B} , que conocemos.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b'_1 = -3b_1 - 2b_2$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , que es P^{-1} , ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de \mathcal{B}' , que buscamos, expresados en coordenadas de los vectores de \mathcal{B} , que conocemos.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b'_1 = -3b_1 - 2b_2 = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , que es P^{-1} , ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de \mathcal{B}' , que buscamos, expresados en coordenadas de los vectores de \mathcal{B} , que conocemos.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b'_1 = -3b_1 - 2b_2 = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , que es P^{-1} , ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de \mathcal{B}' , que buscamos, expresados en coordenadas de los vectores de \mathcal{B} , que conocemos.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b'_1 = -3b_1 - 2b_2 = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -17 \end{pmatrix} \quad b'_2$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , que es P^{-1} , ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de \mathcal{B}' , que buscamos, expresados en coordenadas de los vectores de \mathcal{B} , que conocemos.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b'_1 = -3b_1 - 2b_2 = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -17 \end{pmatrix} \quad b'_2 = b_1 + b_2$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Las columnas de P son los vectores de \mathcal{B} expresados en coordenadas de \mathcal{B}' .

En este caso es mejor conocer la matriz de cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , que es P^{-1} , ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de \mathcal{B}' , que buscamos, expresados en coordenadas de los vectores de \mathcal{B} , que conocemos.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b'_1 = -3b_1 - 2b_2 = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -17 \end{pmatrix} \quad b'_2 = b_1 + b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Comprobemos que \mathcal{B}' es base.

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Comprobemos que \mathcal{B}' es base.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Comprobemos que \mathcal{B}' es base.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b_1 = -1b'_1 - 2b'_2 \end{cases}$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Comprobemos que \mathcal{B}' es base.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b_1 = -1b'_1 - 2b'_2 \\ b_2 = +1b'_1 + 3b'_2 \end{cases}$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Comprobemos que \mathcal{B}' es base.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b_1 = -1b'_1 - 2b'_2 \\ b_2 = +1b'_1 + 3b'_2 \end{cases} \implies b_1 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Comprobemos que \mathcal{B}' es base.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b_1 = -1b'_1 - 2b'_2 & \implies b_1 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \\ b_2 = +1b'_1 + 3b'_2 & \implies b_2 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \end{cases}$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Comprobemos que \mathcal{B}' es base.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b_1 = -1b'_1 - 2b'_2 & \implies b_1 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \\ b_2 = +1b'_1 + 3b'_2 & \implies b_2 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \end{cases}$$
$$\implies \text{span}\langle b_1, b_2 \rangle \subseteq \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Comprobemos que \mathcal{B}' es base.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b_1 = -1b'_1 - 2b'_2 & \implies b_1 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \\ b_2 = +1b'_1 + 3b'_2 & \implies b_2 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \end{cases}$$
$$\implies \text{span}\langle b_1, b_2 \rangle \subseteq \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Comprobemos que \mathcal{B}' es base.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b_1 = -1b'_1 - 2b'_2 & \implies b_1 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \\ b_2 = +1b'_1 + 3b'_2 & \implies b_2 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \end{cases}$$
$$\implies \text{span}\langle b_1, b_2 \rangle \subseteq \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \implies \dots \implies$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Comprobemos que \mathcal{B}' es base.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b_1 = -1b'_1 - 2b'_2 & \implies b_1 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \\ b_2 = +1b'_1 + 3b'_2 & \implies b_2 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \end{cases}$$
$$\implies \text{span}\langle b_1, b_2 \rangle \subseteq \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \implies \dots \implies \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \subseteq \text{span}\langle b_1, b_2 \rangle$$

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Comprobemos que \mathcal{B}' es base.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b_1 = -1b'_1 - 2b'_2 & \implies b_1 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \\ b_2 = +1b'_1 + 3b'_2 & \implies b_2 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \end{cases}$$
$$\implies \text{span}\langle b_1, b_2 \rangle \subseteq \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \implies \dots \implies \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \subseteq \text{span}\langle b_1, b_2 \rangle$$

En conclusión: $\text{span}\langle b_1, b_2 \rangle = \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle$.

Ejemplo 2.43.

2.8. Cambios de bases I

Solución.

Comprobemos que \mathcal{B}' es base.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b_1 = -1b'_1 - 2b'_2 & \implies b_1 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \\ b_2 = +1b'_1 + 3b'_2 & \implies b_2 \in \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \end{cases}$$
$$\implies \text{span}\langle b_1, b_2 \rangle \subseteq \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \implies \dots \implies \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle \subseteq \text{span}\langle b_1, b_2 \rangle$$

En conclusión: $\text{span}\langle b_1, b_2 \rangle = \text{span}\langle b'_1, b'_2 \rangle$.

Por lo tanto \mathcal{B}' es base de \mathbb{R}^2 . □

Ejercicios 2.44.

2.8. Cambios de bases I

- 2.21

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal.

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal.

Supongamos que $\dim V = n < \infty$ y $\dim W = m < \infty$.

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal.

Supongamos que $\dim V = n < \infty$ y $\dim W = m < \infty$.

Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' bases de V , y sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' bases de W .

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal.

Supongamos que $\dim V = n < \infty$ y $\dim W = m < \infty$.

Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' bases de V , y sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' bases de W .

1. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ la matriz de f en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} .

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal.

Supongamos que $\dim V = n < \infty$ y $\dim W = m < \infty$.

Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' bases de V , y sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' bases de W .

1. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ la matriz de f en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} .
2. Sea $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ la matriz de f en las bases \mathcal{B}' y \mathcal{C}' .

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal.

Supongamos que $\dim V = n < \infty$ y $\dim W = m < \infty$.

Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' bases de V , y sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' bases de W .

1. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ la matriz de f en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} .
2. Sea $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ la matriz de f en las bases \mathcal{B}' y \mathcal{C}' .
3. Sea $P \in M_n(\mathbb{F})$ la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' .

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal.

Supongamos que $\dim V = n < \infty$ y $\dim W = m < \infty$.

Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' bases de V , y sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' bases de W .

1. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ la matriz de f en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} .
2. Sea $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ la matriz de f en las bases \mathcal{B}' y \mathcal{C}' .
3. Sea $P \in M_n(\mathbb{F})$ la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' .
4. Sea $Q \in M_m(\mathbb{F})$ la matriz de cambio de bases de \mathcal{C} a \mathcal{C}' .

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación \mathbb{F} -lineal.

Supongamos que $\dim V = n < \infty$ y $\dim W = m < \infty$.

Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' bases de V , y sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' bases de W .

1. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ la matriz de f en las bases \mathcal{B} y \mathcal{C} .
2. Sea $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ la matriz de f en las bases \mathcal{B}' y \mathcal{C}' .
3. Sea $P \in M_n(\mathbb{F})$ la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{B}' .
4. Sea $Q \in M_m(\mathbb{F})$ la matriz de cambio de bases de \mathcal{C} a \mathcal{C}' .

Entonces:

$$B = QAP^{-1}$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

a) Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .
- Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} .

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .
- Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} .
- Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C}' .

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .
- Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} .
- Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C}' .

$$Y = AX$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .
- Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} .
- Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C}' .

$$Y = AX \quad Y' = BX'$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .
- Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} .
- Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C}' .

$$Y = AX \quad Y' = BX' \quad X' = PX$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .
- Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} .
- Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C}' .

$$Y = AX \quad Y' = BX' \quad X' = PX \quad Y' = QY$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .
- Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} .
- Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C}' .

$$Y = AX \quad Y' = BX' \quad X' = PX \quad Y' = QY$$

$$Y'$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .
- Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} .
- Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C}' .

$$Y = AX \quad Y' = BX' \quad X' = PX \quad Y' = QY$$

$$QY = Y'$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .
- Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} .
- Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C}' .

$$Y = AX \quad Y' = BX' \quad X' = PX \quad Y' = QY$$

$$QAX = QY = Y'$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- a) Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- b) Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .
- c) Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} .
- d) Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C}' .

$$Y = AX \quad Y' = BX' \quad X' = PX \quad Y' = QY$$

$$QAX = QY = Y' = BX'$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .
- Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} .
- Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C}' .

$$Y = AX \quad Y' = BX' \quad X' = PX \quad Y' = QY$$

$$QAX = QY = Y' = BX' = BPX$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .
- Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} .
- Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C}' .

$$Y = AX \quad Y' = BX' \quad X' = PX \quad Y' = QY$$

$$QAX = QY = Y' = BX' = BPX$$

Esto es cierto para todo $X \in \mathbb{F}^n$, ya que v puede ser cualquier vector,

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración de la propiedad 2.45.

Sea v un vector cualquiera de V .

- Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B} .
- Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base \mathcal{B}' .
- Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C} .
- Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base \mathcal{C}' .

$$Y = AX \quad Y' = BX' \quad X' = PX \quad Y' = QY$$

$$QAX = QY = Y' = BX' = BPX$$

Esto es cierto para todo $X \in \mathbb{F}^n$, ya que v puede ser cualquier vector, por lo tanto $QA = BP$. □

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:

$$V \xrightarrow{f} W$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow f_B & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow f_B & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xleftarrow{\text{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & W \\ & & \downarrow f_B & & \downarrow f_C \\ & & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xleftarrow{\text{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow f_{B'} & & \downarrow f_B & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xleftarrow{\text{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow f_{B'} & & \downarrow f_B & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xleftarrow{h_P} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xleftarrow{\text{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\text{id}_W} & W \\ \downarrow f_{B'} & & \downarrow f_B & & \downarrow f_C & & \\ \mathbb{F}^n & \xleftarrow{h_P} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & & \end{array}$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xleftarrow{\text{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\text{id}_W} & W \\ \downarrow f_{B'} & & \downarrow f_B & & \downarrow f_C & & \downarrow f_{C'} \\ \mathbb{F}^n & \xleftarrow{h_P} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:

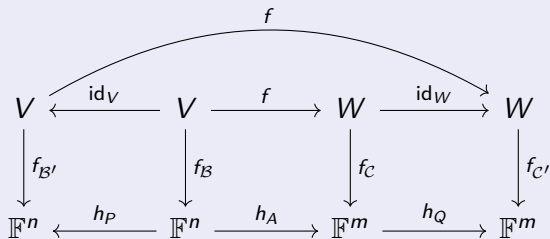
$$\begin{array}{ccccccc} V & \xleftarrow{\text{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\text{id}_W} & W \\ \downarrow f_{B'} & & \downarrow f_B & & \downarrow f_C & & \downarrow f_{C'} \\ \mathbb{F}^n & \xleftarrow{h_P} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & \xrightarrow{h_Q} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:

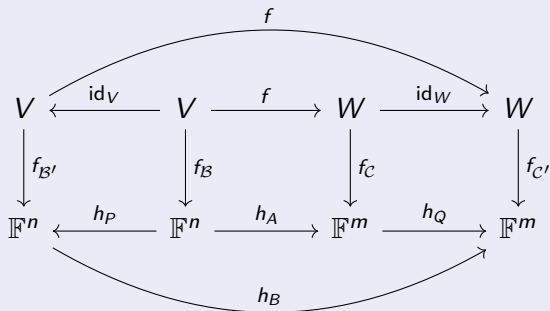


Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:

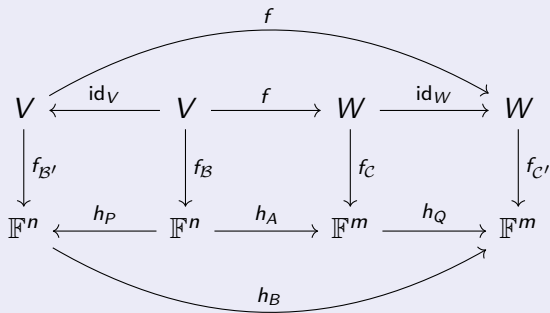


Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:



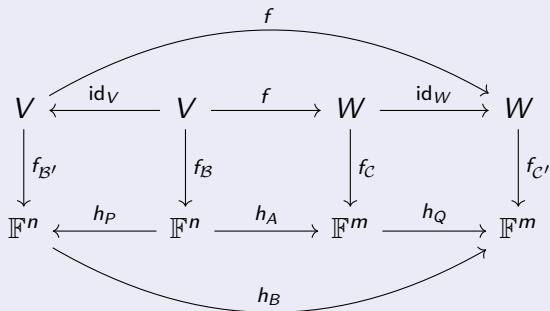
Por lo tanto $h_B = h_Q \circ h_A \circ (h_P)^{-1}$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:



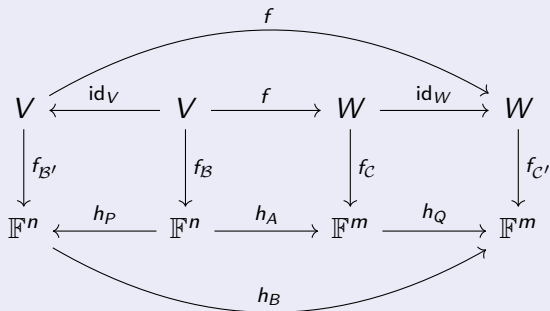
Por lo tanto $h_B = h_Q \circ h_A \circ (h_P)^{-1} = h_Q \circ h_A \circ h_{P^{-1}}$

Propiedad 2.45.

2.9. Cambios de bases II

Demostración alternativa de la propiedad 2.45.

Tenemos el diagrama:



Por lo tanto $h_B = h_Q \circ h_A \circ (h_P)^{-1} = h_Q \circ h_A \circ h_{P^{-1}} = h_{QA P^{-1}}$. □

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

En el ejemplo 2.20 vimos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$ respecto de las bases $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ y $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

En el ejemplo 2.20 vimos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$ respecto de las bases $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ y $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Calculemos la matriz de la aplicación respecto de las bases canónicas, y comprobemos que se cumple la propiedad 2.45.

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Solución.

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Solución.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Solución.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Solución.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Solución.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Solución.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$, en b. canón. es

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Solución.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$, en b. canón. es $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Solución.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$, en b. canón. es $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(Es fácil calcular matrices si la base final es la canónica).

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Solución.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$, en b. canón. es $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(Es fácil calcular matrices si la base final es la canónica).

En efecto, se cumple que $BP = QA$:

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Solución.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$, en b. canón. es $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(Es fácil calcular matrices si la base final es la canónica).

En efecto, se cumple que $BP = QA$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Solución.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$, en b. canón. es $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(Es fácil calcular matrices si la base final es la canónica).

En efecto, se cumple que $BP = QA$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Solución.

La matriz de cambio de bases de $((\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}))$ a $((\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}))$ es $P = (\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix})$.

La matriz de cambio de bases de $((\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}))$ a $((\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}))$ es $Q = (\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix})$.

La matriz de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) \mapsto (\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix})$, en b. canón. es $B = (\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix})$.

(Es fácil calcular matrices si la base final es la canónica).

En efecto, se cumple que $BP = QA$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

Ejemplo 2.46.

2.9. Cambios de bases II

Solución.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz de cambio de bases de $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$, en b. canón. es $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(Es fácil calcular matrices si la base final es la canónica).

En efecto, se cumple que $BP = QA$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$



Notas 2.47.

2.9. Cambios de bases II

Notas 2.47.

2.9. Cambios de bases II

1. Un **endomorfismo** es una aplicación lineal en la que el espacio inicial es igual al espacio final.

Notas 2.47.

2.9. Cambios de bases II

1. Un **endomorfismo** es una aplicación lineal en la que el espacio inicial es igual al espacio final.
2. Cuando calculemos la matriz de un endomorfismo, exigiremos que la base inicial sea igual a la base final.

Notas 2.47.

2.9. Cambios de bases II

1. Un **endomorfismo** es una aplicación lineal en la que el espacio inicial es igual al espacio final.
2. Cuando calculemos la matriz de un endomorfismo, exigiremos que la base inicial sea igual a la base final.
3. En tal caso en la propiedad 2.45 tendríamos que $V = W$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ y $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$.

Notas 2.47.

2.9. Cambios de bases II

1. Un **endomorfismo** es una aplicación lineal en la que el espacio inicial es igual al espacio final.
2. Cuando calculemos la matriz de un endomorfismo, exigiremos que la base inicial sea igual a la base final.
3. En tal caso en la propiedad 2.45 tendríamos que $V = W$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ y $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$. Por tanto $P = Q$, y la ecuación se escribe:

Notas 2.47.

2.9. Cambios de bases II

1. Un **endomorfismo** es una aplicación lineal en la que el espacio inicial es igual al espacio final.
2. Cuando calculemos la matriz de un endomorfismo, exigiremos que la base inicial sea igual a la base final.
3. En tal caso en la propiedad 2.45 tendríamos que $V = W$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ y $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$. Por tanto $P = Q$, y la ecuación se escribe:

$$B = PAP^{-1}$$

Ejercicios 2.48.

2.9. Cambios de bases II

- 2.22
- 2.23

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Definiciones 2.49.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

Definiciones 2.49.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ matrices $m \times n$.

Definiciones 2.49.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ matrices $m \times n$.

A es **equivalente** a B si

Definiciones 2.49.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ matrices $m \times n$.

A es **equivalente** a B si

existen matrices $P \in M_m(\mathbb{F})$ y $Q \in M_n(\mathbb{F})$ **regulares** t.q. $B = PAQ$.

Definiciones 2.49.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ matrices $m \times n$.

A es **equivalente** a B si

existen matrices $P \in M_m(\mathbb{F})$ y $Q \in M_n(\mathbb{F})$ **regulares** t.q. $B = PAQ$.

2. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas $n \times n$.

Definiciones 2.49.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ matrices $m \times n$.

A es **equivalente** a B si

existen matrices $P \in M_m(\mathbb{F})$ y $Q \in M_n(\mathbb{F})$ **regulares** t.q. $B = PAQ$.

2. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas $n \times n$.

A es **semejante** a B si

Definiciones 2.49.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ matrices $m \times n$.

A es **equivalente** a B si

existen matrices $P \in M_m(\mathbb{F})$ y $Q \in M_n(\mathbb{F})$ **regulares** t.q. $B = PAQ$.

2. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas $n \times n$.

A es **semejante** a B si

existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ **regular** tal que $B = PAP^{-1}$.

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

Estas dos relaciones son reflexivas, simétricas y transitivas.

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

Estas dos relaciones son reflexivas, simétricas y transitivas.

Veámoslo por ejemplo con la equivalencia.

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

Estas dos relaciones son reflexivas, simétricas y transitivas.

Veámoslo por ejemplo con la equivalencia.

1. **Reflexiva.**

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

Estas dos relaciones son reflexivas, simétricas y transitivas.

Veámoslo por ejemplo con la equivalencia.

1. **Reflexiva.** Toda matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es equivalente a sí misma.

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

Estas dos relaciones son reflexivas, simétricas y transitivas.

Veámoslo por ejemplo con la equivalencia.

1. **Reflexiva.** Toda matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es equivalente a sí misma.

Demostración.

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

Estas dos relaciones son reflexivas, simétricas y transitivas.

Veámoslo por ejemplo con la equivalencia.

1. **Reflexiva.** Toda matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es equivalente a sí misma.

Demostración.

Tomando $P = I_m$ y $Q = I_n$,

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

Estas dos relaciones son reflexivas, simétricas y transitivas.

Veámoslo por ejemplo con la equivalencia.

1. **Reflexiva.** Toda matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es equivalente a sí misma.

Demostración.

Tomando $P = I_m$ y $Q = I_n$, tenemos que $A = I_m A I_n = PAQ$;

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

Estas dos relaciones son reflexivas, simétricas y transitivas.

Veámoslo por ejemplo con la equivalencia.

1. **Reflexiva.** Toda matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es equivalente a sí misma.

Demostración.

Tomando $P = I_m$ y $Q = I_n$, tenemos que $A = I_m A I_n = PAQ$; y tanto I_m como I_n son regulares. □

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. Simétrica.

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B ,

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Demostración.

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Demostración.

Si $B = PAQ$,

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Demostración.

Si $B = PAQ$, entonces $A = P^{-1}BQ^{-1}$;

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Demostración.

Si $B = PAQ$, entonces $A = P^{-1}BQ^{-1}$;
y tanto P^{-1} como Q^{-1} son regulares. □

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Demostración.

Si $B = PAQ$, entonces $A = P^{-1}BQ^{-1}$;
y tanto P^{-1} como Q^{-1} son regulares. □

3. **Transitiva.**

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Demostración.

Si $B = PAQ$, entonces $A = P^{-1}BQ^{-1}$;
y tanto P^{-1} como Q^{-1} son regulares. □

3. **Transitiva.** Si A es equivalente a B ,

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Demostración.

Si $B = PAQ$, entonces $A = P^{-1}BQ^{-1}$;
y tanto P^{-1} como Q^{-1} son regulares. □

3. **Transitiva.** Si A es equivalente a B , y B es equivalente a C ,

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Demostración.

Si $B = PAQ$, entonces $A = P^{-1}BQ^{-1}$;
y tanto P^{-1} como Q^{-1} son regulares. □

3. **Transitiva.** Si A es equivalente a B , y B es equivalente a C , entonces A es equivalente a C .

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Demostración.

Si $B = PAQ$, entonces $A = P^{-1}BQ^{-1}$;
y tanto P^{-1} como Q^{-1} son regulares. □

3. **Transitiva.** Si A es equivalente a B , y B es equivalente a C ,
entonces A es equivalente a C .

Demostración.

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Demostración.

Si $B = PAQ$, entonces $A = P^{-1}BQ^{-1}$;
y tanto P^{-1} como Q^{-1} son regulares. □

3. **Transitiva.** Si A es equivalente a B , y B es equivalente a C ,
entonces A es equivalente a C .

Demostración.

Si $B = PAQ$,

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Demostración.

Si $B = PAQ$, entonces $A = P^{-1}BQ^{-1}$;
y tanto P^{-1} como Q^{-1} son regulares. □

3. **Transitiva.** Si A es equivalente a B , y B es equivalente a C ,
entonces A es equivalente a C .

Demostración.

Si $B = PAQ$, y $C = RBS$,

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Demostración.

Si $B = PAQ$, entonces $A = P^{-1}BQ^{-1}$;
y tanto P^{-1} como Q^{-1} son regulares. □

3. **Transitiva.** Si A es equivalente a B , y B es equivalente a C ,
entonces A es equivalente a C .

Demostración.

Si $B = PAQ$, y $C = RBS$, entonces $C = (RP)A(QS)$;

Nota 2.50.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. **Simétrica.** Si A es equivalente a B , entonces B es equivalente a A .

Demostración.

Si $B = PAQ$, entonces $A = P^{-1}BQ^{-1}$;
y tanto P^{-1} como Q^{-1} son regulares. □

3. **Transitiva.** Si A es equivalente a B , y B es equivalente a C ,
entonces A es equivalente a C .

Demostración.

Si $B = PAQ$, y $C = RBS$, entonces $C = (RP)A(QS)$;
y tanto RP como QS son regulares. □

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Las matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes si y solo si

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Las matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes si y solo si son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Las matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes si y solo si son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.
En términos precisos: A y B son equivalentes si y solo si existe

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Las matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes si y solo si son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son equivalentes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Las matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes si y solo si son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son equivalentes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,
- un \mathbb{F} -espacio vectorial W de dimensión m ,

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Las matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes si y solo si son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son equivalentes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,
- un \mathbb{F} -espacio vectorial W de dimensión m ,
- una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$,

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Las matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes si y solo si son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son equivalentes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,
- un \mathbb{F} -espacio vectorial W de dimensión m ,
- una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$,
- bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V ,

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Las matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes si y solo si son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son equivalentes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,
- un \mathbb{F} -espacio vectorial W de dimensión m ,
- una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$,
- bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V ,
- y bases $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ de W

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Las matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes si y solo si son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son equivalentes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,
- un \mathbb{F} -espacio vectorial W de dimensión m ,
- una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$,
- bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V ,
- y bases $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ de W

de manera que

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Las matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes si y solo si son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son equivalentes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,
- un \mathbb{F} -espacio vectorial W de dimensión m ,
- una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$,
- bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V ,
- y bases $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ de W

de manera que

- A es la matriz de f respecto de \mathcal{B} y \mathcal{C} ,

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

1. Las matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes si y solo si son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son equivalentes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,
- un \mathbb{F} -espacio vectorial W de dimensión m ,
- una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$,
- bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V ,
- y bases $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ de W

de manera que

- A es la matriz de f respecto de \mathcal{B} y \mathcal{C} ,
- y B es la matriz de f respecto de \mathcal{B}' y \mathcal{C}' .

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. Las matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ son semejantes si y solo si

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. Las matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ son semejantes si y solo si son matrices del mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. Las matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ son semejantes si y solo si son matrices del mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son semejantes si y solo si existe

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. Las matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ son semejantes si y solo si son matrices del mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son semejantes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. Las matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ son semejantes si y solo si son matrices del mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son semejantes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,
- un endomorfismo $f : V \rightarrow V$,

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. Las matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ son semejantes si y solo si son matrices del mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son semejantes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,
- un endomorfismo $f : V \rightarrow V$,
- y bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. Las matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ son semejantes si y solo si son matrices del mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son semejantes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,
- un endomorfismo $f : V \rightarrow V$,
- y bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V

de manera que

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. Las matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ son semejantes si y solo si son matrices del mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son semejantes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,
- un endomorfismo $f : V \rightarrow V$,
- y bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V

de manera que

- A es la matriz de f respecto de \mathcal{B} y \mathcal{B} ,

Notas 2.51.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2. Las matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ son semejantes si y solo si son matrices del mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

En términos precisos: A y B son semejantes si y solo si existe

- un \mathbb{F} -espacio vectorial V de dimensión n ,
- un endomorfismo $f : V \rightarrow V$,
- y bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V

de manera que

- A es la matriz de f respecto de \mathcal{B} y \mathcal{B} ,
- y B es la matriz de f respecto de \mathcal{B}' y \mathcal{B}' .

Ejercicios 2.52.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

- 2.24
- 2.25

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal,

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal, y sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal, y sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

1. El **rango** de f es

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal, y sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

1. El **rango** de f es la dimensión del subespacio $\text{im } f$

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal, y sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

1. El **rango** de f es la dimensión del subespacio $\text{im } f$ de W .

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal, y sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

1. El **rango** de f es la dimensión del subespacio $\text{im } f$ de W .
2. El **rango por columnas** de A es

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal, y sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

1. El **rango** de f es la dimensión del subespacio $\text{im } f$ de W .
2. El **rango por columnas** de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{F}^m

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal, y sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

1. El **rango** de f es la dimensión del subespacio $\text{im } f$ de W .
2. El **rango por columnas** de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{F}^m generado por las columnas de A .

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal, y sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

1. El **rango** de f es la dimensión del subespacio $\text{im } f$ de W .
2. El **rango por columnas** de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{F}^m generado por las columnas de A .
3. El **rango por filas** de A es

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal, y sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

1. El **rango** de f es la dimensión del subespacio $\text{im } f$ de W .
2. El **rango por columnas** de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{F}^m generado por las columnas de A .
3. El **rango por filas** de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{F}^n

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal, y sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

1. El **rango** de f es la dimensión del subespacio $\text{im } f$ de W .
2. El **rango por columnas** de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{F}^m generado por las columnas de A .
3. El **rango por filas** de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{F}^n generado por las filas de A .

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal, y sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

1. El **rango** de f es la dimensión del subespacio $\text{im } f$ de W .
2. El **rango por columnas** de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{F}^m generado por las columnas de A .
3. El **rango por filas** de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{F}^n generado por las filas de A .

Nota 2.54.

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal, y sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

1. El **rango** de f es la dimensión del subespacio $\text{im } f$ de W .
2. El **rango por columnas** de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{F}^m generado por las columnas de A .
3. El **rango por filas** de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{F}^n generado por las filas de A .

Nota 2.54.

El rango por filas de una matriz A es igual

Definiciones 2.53 y nota 2.54.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal, y sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

1. El **rango** de f es la dimensión del subespacio $\text{im } f$ de W .
2. El **rango por columnas** de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{F}^m generado por las columnas de A .
3. El **rango por filas** de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{F}^n generado por las filas de A .

Nota 2.54.

El rango por filas de una matriz A es igual al rango por columnas de su matriz traspuesta A^T .

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal.

Supongamos que $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de f respecto a algunas bases.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal.

Supongamos que $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de f respecto a algunas bases.

Entonces el rango de f es igual al rango por columnas de A .

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

El diagrama que relaciona f y A es:

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

El diagrama que relaciona f y A es:

$$V \xrightarrow{f} W$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

El diagrama que relaciona f y A es:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

El diagrama que relaciona f y A es:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

El diagrama que relaciona f y A es:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Recordamos que multiplicar la matriz A por el vector columna X es lo mismo que

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

El diagrama que relaciona f y A es:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Recordamos que multiplicar la matriz A por el vector columna X es lo mismo que hacer una combinación lineal de las columnas de A con pesos las componentes de X .

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

El diagrama que relaciona f y A es:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Recordamos que multiplicar la matriz A por el vector columna X es lo mismo que hacer una combinación lineal de las columnas de A con pesos las componentes de X .

Por lo tanto el rango de h_A es igual al rango por columnas de A ,

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

El diagrama que relaciona f y A es:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Recordamos que multiplicar la matriz A por el vector columna X es lo mismo que hacer una combinación lineal de las columnas de A con pesos las componentes de X .

Por lo tanto el rango de h_A es igual al rango por columnas de A , y lo que tenemos que demostrar es que $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } h_A)$.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\text{im } f \longrightarrow \text{im } h_A$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{im} f &\longrightarrow \operatorname{im} h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{im} f &\longrightarrow \operatorname{im} h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

Vamos a probar que esta aplicación está bien definida, es lineal y biyectiva.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\text{im } f \longrightarrow \text{im } h_A$$

$$w \longmapsto f_C(w)$$

Vamos a probar que esta aplicación está bien definida, es lineal y biyectiva. Por lo tanto $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } h_A)$ y habremos terminado.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\text{im } f \longrightarrow \text{im } h_A$$

$$w \longmapsto f_C(w)$$

Vamos a probar que esta aplicación está bien definida, es lineal y biyectiva. Por lo tanto $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } h_A)$ y habremos terminado. La aplicación es lineal e inyectiva porque f_C es lineal e inyectiva.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\text{im } f \longrightarrow \text{im } h_A$$

$$w \longmapsto f_C(w)$$

Vamos a probar que esta aplicación está bien definida, es lineal y biyectiva. Por lo tanto $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } h_A)$ y habremos terminado. La aplicación es lineal e inyectiva porque f_C es lineal e inyectiva.

1. Está bien definida.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

Vamos a probar que esta aplicación está bien definida, es lineal y biyectiva. Por lo tanto $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } h_A)$ y habremos terminado. La aplicación es lineal e inyectiva porque f_C es lineal e inyectiva.

1. Está bien definida.

Dado $w \in \text{im } f$ hay que ver que $f_C(w)$ pertenece a $\text{im } h_A$.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

Vamos a probar que esta aplicación está bien definida, es lineal y biyectiva. Por lo tanto $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } h_A)$ y habremos terminado. La aplicación es lineal e inyectiva porque f_C es lineal e inyectiva.

1. Está bien definida.

Dado $w \in \text{im } f$ hay que ver que $f_C(w)$ pertenece a $\text{im } h_A$. Existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

Vamos a probar que esta aplicación está bien definida, es lineal y biyectiva. Por lo tanto $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } h_A)$ y habremos terminado. La aplicación es lineal e inyectiva porque f_C es lineal e inyectiva.

1. Está bien definida.

Dado $w \in \text{im } f$ hay que ver que $f_C(w)$ pertenece a $\text{im } h_A$. Existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

$$f_C(w)$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

Vamos a probar que esta aplicación está bien definida, es lineal y biyectiva. Por lo tanto $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } h_A)$ y habremos terminado. La aplicación es lineal e inyectiva porque f_C es lineal e inyectiva.

1. Está bien definida.

Dado $w \in \text{im } f$ hay que ver que $f_C(w)$ pertenece a $\text{im } h_A$.

Existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

$$f_C(w) = f_C(f(v))$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

Vamos a probar que esta aplicación está bien definida, es lineal y biyectiva. Por lo tanto $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } h_A)$ y habremos terminado. La aplicación es lineal e inyectiva porque f_C es lineal e inyectiva.

1. Está bien definida.

Dado $w \in \text{im } f$ hay que ver que $f_C(w)$ pertenece a $\text{im } h_A$. Existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

$$f_C(w) = f_C(f(v)) = h_A(f_B(v))$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

Vamos a probar que esta aplicación está bien definida, es lineal y biyectiva. Por lo tanto $\dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } h_A)$ y habremos terminado. La aplicación es lineal e inyectiva porque f_C es lineal e inyectiva.

1. Está bien definida.

Dado $w \in \text{im } f$ hay que ver que $f_C(w)$ pertenece a $\text{im } h_A$. Existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$.

$$f_C(w) = f_C(f(v)) = h_A(f_B(v)) \in \text{im } h_A$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{im} f &\longrightarrow \operatorname{im} h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

2. Es sobreyectiva.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{im} f &\longrightarrow \operatorname{im} h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

2. Es sobreyectiva.

Dado $Y \in \operatorname{im} h_A$ hay que ver que

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

2. Es sobreyectiva.

Dado $Y \in \text{im } h_A$ hay que ver que existe $w \in \text{im } f$ tal que $f_C(w) = Y$.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

2. Es sobreyectiva.

Dado $Y \in \text{im } h_A$ hay que ver que existe $w \in \text{im } f$ tal que $f_C(w) = Y$.
Existe $X \in \mathbb{F}^n$ tal que $h_A(X) = Y$.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

2. Es sobreyectiva.

Dado $Y \in \text{im } h_A$ hay que ver que existe $w \in \text{im } f$ tal que $f_C(w) = Y$.
Existe $X \in \mathbb{F}^n$ tal que $h_A(X) = Y$.

Como f_B es biyectiva,

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

2. Es sobreyectiva.

Dado $Y \in \text{im } h_A$ hay que ver que existe $w \in \text{im } f$ tal que $f_C(w) = Y$.
Existe $X \in \mathbb{F}^n$ tal que $h_A(X) = Y$.

Como f_B es biyectiva, existe $v \in V$ tal que $f_B(v) = X$.

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

2. Es sobreyectiva.

Dado $Y \in \text{im } h_A$ hay que ver que existe $w \in \text{im } f$ tal que $f_C(w) = Y$.
Existe $X \in \mathbb{F}^n$ tal que $h_A(X) = Y$.

Como f_B es biyectiva, existe $v \in V$ tal que $f_B(v) = X$.

Luego podemos tomar $w = f(v) \in \text{im } f$ ya que:

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

2. Es sobreyectiva.

Dado $Y \in \text{im } h_A$ hay que ver que existe $w \in \text{im } f$ tal que $f_C(w) = Y$.
Existe $X \in \mathbb{F}^n$ tal que $h_A(X) = Y$.

Como f_B es biyectiva, existe $v \in V$ tal que $f_B(v) = X$.

Luego podemos tomar $w = f(v) \in \text{im } f$ ya que:

$$f_C(w)$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

2. Es sobreyectiva.

Dado $Y \in \text{im } h_A$ hay que ver que existe $w \in \text{im } f$ tal que $f_C(w) = Y$.
Existe $X \in \mathbb{F}^n$ tal que $h_A(X) = Y$.

Como f_B es biyectiva, existe $v \in V$ tal que $f_B(v) = X$.

Luego podemos tomar $w = f(v) \in \text{im } f$ ya que:

$$f_C(w) = f_C(f(v))$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

2. Es sobreyectiva.

Dado $Y \in \text{im } h_A$ hay que ver que existe $w \in \text{im } f$ tal que $f_C(w) = Y$.
Existe $X \in \mathbb{F}^n$ tal que $h_A(X) = Y$.

Como f_B es biyectiva, existe $v \in V$ tal que $f_B(v) = X$.

Luego podemos tomar $w = f(v) \in \text{im } f$ ya que:

$$f_C(w) = f_C(f(v)) = h_A(f_B(v))$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

2. Es sobreyectiva.

Dado $Y \in \text{im } h_A$ hay que ver que existe $w \in \text{im } f$ tal que $f_C(w) = Y$.
Existe $X \in \mathbb{F}^n$ tal que $h_A(X) = Y$.

Como f_B es biyectiva, existe $v \in V$ tal que $f_B(v) = X$.

Luego podemos tomar $w = f(v) \in \text{im } f$ ya que:

$$f_C(w) = f_C(f(v)) = h_A(f_B(v)) = h_A(X)$$

Proposición 2.55.

2.11. Rango I

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ f_B \downarrow & & \downarrow f_C \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{im } f &\longrightarrow \text{im } h_A \\ w &\longmapsto f_C(w) \end{aligned}$$

2. Es sobreyectiva.

Dado $Y \in \text{im } h_A$ hay que ver que existe $w \in \text{im } f$ tal que $f_C(w) = Y$.
Existe $X \in \mathbb{F}^n$ tal que $h_A(X) = Y$.

Como f_B es biyectiva, existe $v \in V$ tal que $f_B(v) = X$.

Luego podemos tomar $w = f(v) \in \text{im } f$ ya que:

$$f_C(w) = f_C(f(v)) = h_A(f_B(v)) = h_A(X) = Y$$



Lema 2.56.

2.11. Rango I

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Si el rango por columnas de una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es r ,

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Si el rango por columnas de una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es r , entonces A es equivalente a la matriz por bloques:

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Si el rango por columnas de una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es r , entonces A es equivalente a la matriz por bloques:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal tal que A es la matriz de f respecto a algunas bases.

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal tal que A es la matriz de f respecto a algunas bases.

Simplificamos el problema a demostrar que

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal tal que A es la matriz de f respecto a algunas bases.

Simplificamos el problema a demostrar que existen otras bases respecto de las cuales la matriz de f es:

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal tal que A es la matriz de f respecto a algunas bases.

Simplificamos el problema a demostrar que existen otras bases respecto de las cuales la matriz de f es:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal tal que A es la matriz de f respecto a algunas bases.

Simplificamos el problema a demostrar que existen otras bases respecto de las cuales la matriz de f es:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$$

A y B son matrices de $f \implies$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal tal que A es la matriz de f respecto a algunas bases.

Simplificamos el problema a demostrar que existen otras bases respecto de las cuales la matriz de f es:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$$

A y B son matrices de $f \implies$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{notas 2.51}} \end{array} \right.$$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal tal que A es la matriz de f respecto a algunas bases.

Simplificamos el problema a demostrar que existen otras bases respecto de las cuales la matriz de f es:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$$

A y B son matrices de $f \implies$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{notas 2.51}} A \text{ y } B \text{ son equivalentes} \end{array} \right.$$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal tal que A es la matriz de f respecto a algunas bases.

Simplificamos el problema a demostrar que existen otras bases respecto de las cuales la matriz de f es:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$$

A y B son matrices de $f \implies$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{notas 2.51}} \\ \xrightarrow{\text{proposición 2.55}} \end{array} \right. A \text{ y } B \text{ son equivalentes}$$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal tal que A es la matriz de f respecto a algunas bases.

Simplificamos el problema a demostrar que existen otras bases respecto de las cuales la matriz de f es:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$$

A y B son matrices de $f \implies$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{notas 2.51}} A \text{ y } B \text{ son equivalentes} \\ \xrightarrow{\text{proposición 2.55}} \text{rango } A = \text{rango } f = \text{rango } B \end{array} \right.$$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal tal que A es la matriz de f respecto a algunas bases.

Simplificamos el problema a demostrar que existen otras bases respecto de las cuales la matriz de f es:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$$

A y B son matrices de $f \implies$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{notas 2.51}} A \text{ y } B \text{ son equivalentes} \\ \xrightarrow{\text{proposición 2.55}} r = \text{rango } A = \text{rango } f = \text{rango } B \end{array} \right.$$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea $f : V \rightarrow W$ lineal tal que A es la matriz de f respecto a algunas bases.

Simplificamos el problema a demostrar que existen otras bases respecto de las cuales la matriz de f es:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$$

A y B son matrices de $f \implies$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{notas 2.51}} A \text{ y } B \text{ son equivalentes} \\ \xrightarrow{\text{proposición 2.55}} r = \text{rango } A = \text{rango } f = \text{rango } B = r' \end{array} \right.$$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9.

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9.
Repitiendo argumentos, la familia $\mathcal{F} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\operatorname{im} f$.

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9.

Repitiendo argumentos, la familia $\mathcal{F} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Sin embargo ahora no hace falta que probemos que \mathcal{F} es libre,

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9.

Repitiendo argumentos, la familia $\mathcal{F} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.

Sin embargo ahora no hace falta que probemos que \mathcal{F} es libre,

ya que sabemos que $\dim(\text{im } f) = \dim V - \dim(\ker f) = n - s$,

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9.
Repitiendo argumentos, la familia $\mathcal{F} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\operatorname{im} f$.
Sin embargo ahora no hace falta que probemos que \mathcal{F} es libre,
ya que sabemos que $\dim(\operatorname{im} f) = \dim V - \dim(\ker f) = n - s$,
luego \mathcal{F} es base de $\operatorname{im} f$ por dimensiones.

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9.
Repitiendo argumentos, la familia $\mathcal{F} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\operatorname{im} f$.
Sin embargo ahora no hace falta que probemos que \mathcal{F} es libre,
ya que sabemos que $\dim(\operatorname{im} f) = \dim V - \dim(\ker f) = n - s$,
luego \mathcal{F} es base de $\operatorname{im} f$ por dimensiones.

Ampliamos \mathcal{F} con b_1, \dots, b_k hasta formar una base de W ;

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9.
Repitiendo argumentos, la familia $\mathcal{F} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\operatorname{im} f$.
Sin embargo ahora no hace falta que probemos que \mathcal{F} es libre,
ya que sabemos que $\dim(\operatorname{im} f) = \dim V - \dim(\ker f) = n - s$,
luego \mathcal{F} es base de $\operatorname{im} f$ por dimensiones.

Ampliamos \mathcal{F} con b_1, \dots, b_k hasta formar una base de W ;
las bases que buscamos son:

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9.
Repitiendo argumentos, la familia $\mathcal{F} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.
Sin embargo ahora no hace falta que probemos que \mathcal{F} es libre,
ya que sabemos que $\dim(\text{im } f) = \dim V - \dim(\ker f) = n - s$,
luego \mathcal{F} es base de $\text{im } f$ por dimensiones.

Ampliamos \mathcal{F} con b_1, \dots, b_k hasta formar una base de W ;
las bases que buscamos son:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{array}{c} \\ \end{array} \right)$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{array}{c} \\ \end{array} \right)$$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9.
Repitiendo argumentos, la familia $\mathcal{F} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.
Sin embargo ahora no hace falta que probemos que \mathcal{F} es libre,
ya que sabemos que $\dim(\text{im } f) = \dim V - \dim(\ker f) = n - s$,
luego \mathcal{F} es base de $\text{im } f$ por dimensiones.

Ampliamos \mathcal{F} con b_1, \dots, b_k hasta formar una base de W ;
las bases que buscamos son:

$$\mathcal{B} = \left(a_{s+1}, \dots, a_n \right)$$

$$\mathcal{C} = \left(\right)$$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9.
Repitiendo argumentos, la familia $\mathcal{F} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\text{im } f$.
Sin embargo ahora no hace falta que probemos que \mathcal{F} es libre,
ya que sabemos que $\dim(\text{im } f) = \dim V - \dim(\ker f) = n - s$,
luego \mathcal{F} es base de $\text{im } f$ por dimensiones.

Ampliamos \mathcal{F} con b_1, \dots, b_k hasta formar una base de W ;
las bases que buscamos son:

$$\mathcal{B} = \left(a_{s+1}, \dots, a_n \right)$$
$$\mathcal{C} = \left(f(a_{s+1}), \dots, f(a_n) \right)$$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9.
Repitiendo argumentos, la familia $\mathcal{F} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\operatorname{im} f$.
Sin embargo ahora no hace falta que probemos que \mathcal{F} es libre,
ya que sabemos que $\dim(\operatorname{im} f) = \dim V - \dim(\ker f) = n - s$,
luego \mathcal{F} es base de $\operatorname{im} f$ por dimensiones.

Ampliamos \mathcal{F} con b_1, \dots, b_k hasta formar una base de W ;
las bases que buscamos son:

$$\mathcal{B} = (a_{s+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_s)$$
$$\mathcal{C} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n) \quad)$$

Lema 2.56.

2.11. Rango I

Demostración.

Sea (a_1, \dots, a_s) una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$),
y la ampliamos con a_{s+1}, \dots, a_n hasta formar una base de V ($\dim V = n$).

Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9.
Repitiendo argumentos, la familia $\mathcal{F} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\operatorname{im} f$.
Sin embargo ahora no hace falta que probemos que \mathcal{F} es libre,
ya que sabemos que $\dim(\operatorname{im} f) = \dim V - \dim(\ker f) = n - s$,
luego \mathcal{F} es base de $\operatorname{im} f$ por dimensiones.

Ampliamos \mathcal{F} con b_1, \dots, b_k hasta formar una base de W ;
las bases que buscamos son:

$$\mathcal{B} = (a_{s+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_s)$$

$$\mathcal{C} = (f(a_{s+1}), \dots, f(a_n), b_1, \dots, b_k)$$



Ejercicios 2.57.

2.11. Rango I

- 2.26
- 2.27
- 2.28

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ matrices. Entonces:

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ matrices. Entonces:

1. El rango por columnas de A es igual al rango por filas de A .

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ matrices. Entonces:

1. El rango por columnas de A es igual al rango por filas de A .
Así que simplemente escribiremos $\text{rango}(A)$.

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ matrices. Entonces:

1. El rango por columnas de A es igual al rango por filas de A .
Así que simplemente escribiremos $\text{rango}(A)$.
2. A y B son equivalentes si y solo si $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$.

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

1. Nuestro objetivo es demostrar que el rango por columnas de A

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

1. Nuestro objetivo es demostrar que el rango por columnas de A es igual al rango por columnas de A^T .

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

1. Nuestro objetivo es demostrar que el rango por columnas de A es igual al rango por columnas de A^T .

Sea r el rango por columnas de A ,

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

1. Nuestro objetivo es demostrar que el rango por columnas de A es igual al rango por columnas de A^T .

Sea r el rango por columnas de A , el lema 2.56 nos dice que

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

1. Nuestro objetivo es demostrar que el rango por columnas de A es igual al rango por columnas de A^T .

Sea r el rango por columnas de A , el lema 2.56 nos dice que existen matrices P y Q regulares tales que:

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

1. Nuestro objetivo es demostrar que el rango por columnas de A es igual al rango por columnas de A^T .

Sea r el rango por columnas de A , el lema 2.56 nos dice que existen matrices P y Q regulares tales que:

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$$

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

1. Nuestro objetivo es demostrar que el rango por columnas de A es igual al rango por columnas de A^T .

Sea r el rango por columnas de A , el lema 2.56 nos dice que existen matrices P y Q regulares tales que:

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$$

Trasponiendo:

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

$$(PAQ)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)^T$$

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

$$Q^T A^T P^T = (PAQ)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)^T$$

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

$$Q^T A^T P^T = (PAQ)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

$$Q^T A^T P^T = (PAQ)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$$

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

$$Q^T A^T P^T = (PAQ)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$$

Pero Q^T y P^T son matrices regulares,

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

$$Q^T A^T P^T = (PAQ)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$$

Pero Q^T y P^T son matrices regulares,
luego A^T y $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ son matrices equivalentes.

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

$$Q^T A^T P^T = (PAQ)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$$

Pero Q^T y P^T son matrices regulares, luego A^T y $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ son matrices equivalentes.

Por la proposición 2.55,

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

$$Q^T A^T P^T = (PAQ)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$$

Pero Q^T y P^T son matrices regulares, luego A^T y $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ son matrices equivalentes.

Por la proposición 2.55, estas dos matrices equivalentes tienen el mismo rango por columnas,

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

$$Q^T A^T P^T = (PAQ)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$$

Pero Q^T y P^T son matrices regulares, luego A^T y $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices equivalentes.

Por la proposición 2.55, estas dos matrices equivalentes tienen el mismo rango por columnas, es decir, el rango por columnas de A^T también es r .

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

Demostración.

2. (\implies)

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

2. A y B son equivalentes \iff $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$

Demostración.

2. (\implies)

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

2. A y B son equivalentes \iff $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$

Demostración.

2. (\implies) Esta implicación ya nos ha aparecido en un par de ocasiones;

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

2. A y B son equivalentes \iff $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$

Demostración.

2. (\implies) Esta implicación ya nos ha aparecido en un par de ocasiones; repitamos de nuevo el argumento.

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

2. A y B son equivalentes \iff $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$

Demostración.

2. (\implies) Esta implicación ya nos ha aparecido en un par de ocasiones; repitamos de nuevo el argumento.

Si A y B son equivalentes,

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

$$2. \quad A \text{ y } B \text{ son equivalentes} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(B)$$

Demostración.

2. (\implies) Esta implicación ya nos ha aparecido en un par de ocasiones; repitamos de nuevo el argumento.

Si A y B son equivalentes, existe una aplicación lineal f

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

$$2. \quad A \text{ y } B \text{ son equivalentes} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(B)$$

Demostración.

2. (\implies) Esta implicación ya nos ha aparecido en un par de ocasiones; repitamos de nuevo el argumento.

Si A y B son equivalentes, existe una aplicación lineal f de manera que A y B son matrices de f respecto de algunas bases.

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

$$2. \quad A \text{ y } B \text{ son equivalentes} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(B)$$

Demostración.

2. (\implies) Esta implicación ya nos ha aparecido en un par de ocasiones; repitamos de nuevo el argumento.

Si A y B son equivalentes, existe una aplicación lineal f de manera que A y B son matrices de f respecto de algunas bases. Luego la proposición 2.55 nos asegura que:

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

$$2. \quad A \text{ y } B \text{ son equivalentes} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(B)$$

Demostración.

2. (\implies) Esta implicación ya nos ha aparecido en un par de ocasiones; repitamos de nuevo el argumento.

Si A y B son equivalentes, existe una aplicación lineal f de manera que A y B son matrices de f respecto de algunas bases. Luego la proposición 2.55 nos asegura que:

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(f) = \text{rango}(B)$$

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

2. A y B son equivalentes \iff $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$

Demostración.

(\Leftarrow)

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

2. A y B son equivalentes \iff $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$

Demostración.

(\Leftarrow) Sea $r = \text{rango}(A) = \text{rango}(B)$,

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

2. A y B son equivalentes \iff $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$

Demostración.

(\Leftarrow) Sea $r = \text{rango}(A) = \text{rango}(B)$, el lema 2.56 nos dice que

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

2. A y B son equivalentes \iff $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$

Demostración.

(\Leftarrow) Sea $r = \text{rango}(A) = \text{rango}(B)$, el lema 2.56 nos dice que existen matrices P_1, Q_1, P_2, Q_2 regulares tales que:

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

2. A y B son equivalentes \iff $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$

Demostración.

(\Leftarrow) Sea $r = \text{rango}(A) = \text{rango}(B)$, el lema 2.56 nos dice que existen matrices P_1, Q_1, P_2, Q_2 regulares tales que:

$$P_1 A Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = P_2 B Q_2$$

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

2. A y B son equivalentes \iff $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$

Demostración.

(\Leftarrow) Sea $r = \text{rango}(A) = \text{rango}(B)$, el lema 2.56 nos dice que existen matrices P_1, Q_1, P_2, Q_2 regulares tales que:

$$P_1 A Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = P_2 B Q_2$$

Por tanto A y B son equivalentes entre sí,

Teorema 2.58 (del rango).

2.12. Rango II

2. A y B son equivalentes \iff $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$

Demostración.

(\Leftarrow) Sea $r = \text{rango}(A) = \text{rango}(B)$, el lema 2.56 nos dice que existen matrices P_1, Q_1, P_2, Q_2 regulares tales que:

$$P_1 A Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = P_2 B Q_2$$

Por tanto A y B son equivalentes entre sí, ya que ambas son equivalentes a la matriz por bloques $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

Propiedad 2.59.

2.12. Rango II

Propiedad 2.59.

2.12. Rango II

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada $n \times n$.

Propiedad 2.59.

2.12. Rango II

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada $n \times n$.

Entonces:

$$A \text{ es regular} \iff \text{rango}(A) = n$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Mediante un único cálculo, vamos a hallar matrices P y Q regulares t.q. PAQ es una matriz por bloques de la forma $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Mediante un único cálculo, vamos a hallar matrices P y Q regulares t.q. PAQ es una matriz por bloques de la forma $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En particular, habremos calculado el rango de A , ya que $\text{rango}(A) =$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Mediante un único cálculo, vamos a hallar matrices P y Q regulares t.q. PAQ es una matriz por bloques de la forma $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En particular, habremos calculado el rango de A , ya que $\text{rango}(A) = r$.

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

La idea es hacer operaciones elementales de Gauss partiendo de la matriz por bloques:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_2 \\ \hline I_3 & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

La idea es hacer operaciones elementales de Gauss partiendo de la matriz por bloques:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_2 \\ \hline I_3 & \end{array} \right)$$

Cada vez que hacemos una operación por filas, la aplicamos a los dos bloques superiores a la vez,

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

La idea es hacer operaciones elementales de Gauss partiendo de la matriz por bloques:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_2 \\ \hline I_3 & \end{array} \right)$$

Cada vez que hacemos una operación por filas, la aplicamos a los dos bloques superiores a la vez, y cada vez que hacemos una operación por columnas, la aplicamos a los dos bloques de la izquierda a la vez.

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Recordamos que hacer Gauss por filas/columnas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda/derecha.

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Recordamos que hacer Gauss por filas/columnas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda/derecha.

Así obtendremos:

$$\left(\begin{array}{c|c} & I_2 \\ \hline I_3 & A \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Recordamos que hacer Gauss por filas/columnas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda/derecha.

Así obtendremos:

$$\left(\begin{array}{c|c} F_1 \cdot A & F_1 \cdot I_2 \\ \hline I_3 & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Recordamos que hacer Gauss por filas/columnas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda/derecha.

Así obtendremos:

$$\left(\begin{array}{c|c} F_1 \cdot A \cdot C_1 & F_1 \cdot I_2 \\ \hline I_3 \cdot C_1 & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Recordamos que hacer Gauss por filas/columnas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda/derecha.

Así obtendremos:

$$\left(\begin{array}{c|c} F_1 \cdot A \cdot C_1 \cdot C_2 & F_1 \cdot I_2 \\ \hline I_3 \cdot C_1 \cdot C_2 & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Recordamos que hacer Gauss por filas/columnas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda/derecha.

Así obtendremos:

$$\left(\begin{array}{c|c} F_2 \cdot F_1 \cdot A \cdot C_1 \cdot C_2 & F_2 \cdot F_1 \cdot I_2 \\ \hline I_3 \cdot C_1 \cdot C_2 & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Recordamos que hacer Gauss por filas/columnas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda/derecha.

Así obtendremos:

$$\left(\begin{array}{c|c} F_s \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot A \cdot C_1 \cdot C_2 & F_s \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot I_2 \\ \hline I_3 \cdot C_1 \cdot C_2 & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Recordamos que hacer Gauss por filas/columnas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda/derecha.

Así obtendremos:

$$\left(\begin{array}{c|c} F_s \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot A \cdot C_1 \cdot C_2 \cdots C_t & F_s \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot I_2 \\ \hline I_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdots C_t & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Recordamos que hacer Gauss por filas/columnas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda/derecha.

Así obtendremos:

$$\left(\begin{array}{c|c} F_s \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot A \cdot C_1 \cdot C_2 \cdots C_t & F_s \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot I_2 \\ \hline I_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdots C_t & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} & P \\ \hline Q & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Recordamos que hacer Gauss por filas/columnas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda/derecha.

Así obtendremos:

$$\left(\begin{array}{c|c} F_s \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot A \cdot C_1 \cdot C_2 \cdots C_t & F_s \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot I_2 \\ \hline I_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdots C_t & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} PAQ & P \\ \hline Q & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Lo entenderemos mejor al hacer el ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Lo entenderemos mejor al hacer el ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Luego:

$$P = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Luego:

$$P = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La propiedad 2.37 nos asegura que las matrices P y Q son regulares.

Ejemplo 2.60.

2.12. Rango II

Solución.

Luego:

$$P = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La propiedad 2.37 nos asegura que las matrices P y Q son regulares.

Observa que las matrices P y Q no son únicas. □

Ejercicios 2.61.

2.12. Rango II

- 2.29
- 2.30
- 2.31
- 2.32
- 2.33
- 2.34

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal,

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado.

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$,

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p .

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$f(v) = w$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$f(v) = w \iff$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$f(v) = w \iff f(v) - f(v_p) = \bar{0}$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$f(v) = w \iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} \iff$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$f(v) = w \iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} \iff f(v - v_p) = \bar{0}$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$\begin{aligned} f(v) = w & \iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} & \iff f(v - v_p) = \bar{0} \\ & \iff \end{aligned}$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$\begin{aligned} f(v) = w &\iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} &\iff f(v - v_p) = \bar{0} \\ &\iff v - v_p \in \ker f \end{aligned}$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$\begin{aligned} f(v) = w &\iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} &\iff f(v - v_p) = \bar{0} \\ &\iff v - v_p \in \ker f &\iff \end{aligned}$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$\begin{aligned} f(v) = w &\iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} &\iff f(v - v_p) = \bar{0} \\ &\iff v - v_p \in \ker f &\iff v - v_p = v_0 \end{aligned}$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$\begin{aligned} f(v) = w &\iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} &\iff f(v - v_p) = \bar{0} \\ &\iff v - v_p \in \ker f &\iff v - v_p = v_0 \quad \text{con } v_0 \in \ker f \end{aligned}$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$\begin{aligned} f(v) = w &\iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} &\iff f(v - v_p) = \bar{0} \\ &\iff v - v_p \in \ker f &\iff v = v_p + v_0 \quad \text{con } v_0 \in \ker f \end{aligned}$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$\begin{aligned} f(v) = w &\iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} &\iff f(v - v_p) = \bar{0} \\ &\iff v - v_p \in \ker f &\iff v = v_p + v_0 \quad \text{con } v_0 \in \ker f \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\{w\})$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$\begin{aligned} f(v) = w &\iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} \iff f(v - v_p) = \bar{0} \\ &\iff v - v_p \in \ker f \iff v = v_p + v_0 \quad \text{con } v_0 \in \ker f \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v_p + v_0 \mid v_0 \in \ker f\}$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$\begin{aligned} f(v) = w &\iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} &\iff f(v - v_p) = \bar{0} \\ &\iff v - v_p \in \ker f &\iff v = v_p + v_0 \quad \text{con } v_0 \in \ker f \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v_p + v_0 \mid v_0 \in \ker f\} =:$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$\begin{aligned} f(v) = w &\iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} &\iff f(v - v_p) = \bar{0} \\ &\iff v - v_p \in \ker f &\iff v = v_p + v_0 \quad \text{con } v_0 \in \ker f \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v_p + v_0 \mid v_0 \in \ker f\} =: v_p + \ker f$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío.

Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p . Entonces, para cualquier $v \in V$:

$$\begin{aligned} f(v) = w &\iff f(v) - f(v_p) = \bar{0} &\iff f(v - v_p) = \bar{0} \\ &\iff v - v_p \in \ker f &\iff v = v_p + v_0 \quad \text{con } v_0 \in \ker f \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v_p + v_0 \mid v_0 \in \ker f\} =: \underbrace{v_p}_{\text{elemento}} + \underbrace{\ker f}_{\text{conjunto}}$$

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

2. Consideremos el caso particular en el que la aplicación es $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

2. Consideremos el caso particular en el que la aplicación es $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Fijado un vector columna $b \in \mathbb{F}^m$,

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

2. Consideremos el caso particular en el que la aplicación es $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Fijado un vector columna $b \in \mathbb{F}^m$, vemos que $h_A^{-1}(\{b\})$ es

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

2. Consideremos el caso particular en el que la aplicación es $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Fijado un vector columna $b \in \mathbb{F}^m$, vemos que $h_A^{-1}(\{b\})$ es el conjunto de soluciones del sistema $AX = b$.

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

2. Consideremos el caso particular en el que la aplicación es $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Fijado un vector columna $b \in \mathbb{F}^m$, vemos que $h_A^{-1}(\{b\})$ es el conjunto de soluciones del sistema $AX = b$.

Así, en este caso el apartado anterior se traduce en la propiedad

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

2. Consideremos el caso particular en el que la aplicación es $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Fijado un vector columna $b \in \mathbb{F}^m$, vemos que $h_A^{-1}(\{b\})$ es el conjunto de soluciones del sistema $AX = b$.

Así, en este caso el apartado anterior se traduce en la propiedad de que el conjunto de soluciones de un sistema lineal

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

2. Consideremos el caso particular en el que la aplicación es $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Fijado un vector columna $b \in \mathbb{F}^m$, vemos que $h_A^{-1}(\{b\})$ es el conjunto de soluciones del sistema $AX = b$.

Así, en este caso el apartado anterior se traduce en la propiedad de que el conjunto de soluciones de un sistema lineal se obtiene hallando una solución particular,

Notas 2.62.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

2. Consideremos el caso particular en el que la aplicación es $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

Fijado un vector columna $b \in \mathbb{F}^m$, vemos que $h_A^{-1}(\{b\})$ es el conjunto de soluciones del sistema $AX = b$.

Así, en este caso el apartado anterior se traduce en la propiedad de que el conjunto de soluciones de un sistema lineal se obtiene hallando una solución particular, y sumándole todas las soluciones del sistema homogéneo asociado.

Nota 2.63.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Nota 2.63.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$,

Nota 2.63.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, donde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $b \in \mathbb{F}^m$.

Nota 2.63.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, donde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $b \in \mathbb{F}^m$.

Así, el sistema tiene m ecuaciones y n incógnitas.

Nota 2.63.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, donde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $b \in \mathbb{F}^m$.

Así, el sistema tiene m ecuaciones y n incógnitas.

Entonces:

Nota 2.63.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, donde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $b \in \mathbb{F}^m$.

Así, el sistema tiene m ecuaciones y n incógnitas.

Entonces:

1. Si $\text{rank}(A) < \text{rank}(A, b)$, el sistema es incompatible.
2. Si $\text{rank}(A) = \text{rank}(A, b) = n$, el sistema es compatible determinado.
3. Si $\text{rank}(A) = \text{rank}(A, b) < n$, el sist. es compatible indeterminado.

Nota 2.63.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, donde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $b \in \mathbb{F}^m$.

Así, el sistema tiene m ecuaciones y n incógnitas.

Entonces:

1. Si $\text{rango}(A) < \text{rango}(A|b)$, el sistema es incompatible.
2. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = n$, el sistema es compatible determinado.
3. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) < n$, el sist. es compatible indeterminado.

Nota 2.63.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, donde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $b \in \mathbb{F}^m$.

Así, el sistema tiene m ecuaciones y n incógnitas.

Entonces:

1. Si $\text{rango}(A) < \text{rango}(A|b)$, el sistema es incompatible.
2. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) < n$, el sistema es compatible determinado.
3. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = n$, el sist. es compatible indeterminado.

Nota 2.63.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, donde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $b \in \mathbb{F}^m$.

Así, el sistema tiene m ecuaciones y n incógnitas.

Entonces:

1. Si $\text{rango}(A) < \text{rango}(A|b)$, el sistema es incompatible.
2. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = n$, el sistema es compatible determinado.
3. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) < n$, el sist. es compatible indeterminado.

Nota 2.63.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, donde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y $b \in \mathbb{F}^m$.

Así, el sistema tiene m ecuaciones y n incógnitas.

Entonces:

1. Si $\text{rango}(A) < \text{rango}(A|b)$, el sistema es incompatible.
2. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = n$, el sistema es compatible determinado.
3. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) < n$, el sist. es compatible indeterminado.

Ejercicios 2.64.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

- 2.35

Capítulo 2. Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

2.2. Núcleo e imagen

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

2.6. Matrices regulares

2.7. Matrices elementales

2.8. Cambios de bases I

2.9. Cambios de bases II

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

2.11. Rango I

2.12. Rango II

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

▶ Ejercicio 2.1.1.

▶ Ejercicio 2.1.2.

▶ Ejercicio 2.3.3.

▶ Ejercicio 2.3.4.

▶ Ejercicio 2.4.1.

▶ Ejercicio 2.5.1.

▶ Ejercicio 2.7.

▶ Ejercicio 2.9.1.

▶ Ejercicio 2.11.1.

▶ Ejercicio 2.11.2.

▶ Ejercicio 2.12.2.

▶ Ejercicio 2.14.

▶ Ejercicio 2.16.1.

▶ Ejercicio 2.16.2.

▶ Ejercicio 2.16.3.

▶ Ejercicio 2.21.1.

▶ Ejercicio 2.24.1.

▶ Ejercicio 2.26.1.

▶ Ejercicio 2.26.2.

▶ Ejercicio 2.26.3.

▶ Ejercicio 2.31.1.

▶ Ejercicio 2.31.2.

▶ Ejercicio 2.34.1.

▶ Ejercicio 2.34.3.

Ejercicio 2.1.1.

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera.

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.

$$\boxed{\supseteq} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 \cup A_2 \supseteq A_1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



$$\left\{ \begin{array}{l} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ \end{array} \right.$$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



$$\begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ A_1 \cup A_2 \supseteq A_2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



$$\begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases}$$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



$$\begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies$$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.

$$\boxed{\supseteq} \quad \begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq$$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



$$\begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



$$\begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$



Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.

$$\boxed{\supseteq} \quad \begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$\boxed{\subseteq} \quad \text{Sea } y \in f(A_1 \cup A_2).$$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.

$$\boxed{\supseteq} \quad \begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$\boxed{\subseteq} \quad \text{Sea } y \in f(A_1 \cup A_2).$$

$$\implies y \in f(A_1) \cup f(A_2)$$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.

$$\boxed{\supseteq} \quad \begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$\boxed{\subseteq} \quad \text{Sea } y \in f(A_1 \cup A_2).$$

$$\implies$$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.

$$\boxed{\supseteq} \quad \begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$

$\boxed{\subseteq}$ Sea $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

\implies existe $x \in A_1 \cup A_2$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



$$\begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$



Sea $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

\implies existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



$$\begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$



Sea $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

\implies existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$

$\implies \begin{cases} \text{o bien} & x \in A_1 \\ \text{o bien} & x \in A_2 \end{cases}$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



$$\begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$



Sea $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

\implies existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$

\implies $\begin{cases} \text{o bien existe } x \in A_1 \text{ tal que } y = f(x) \\ \text{o bien } x \in A_2 \end{cases}$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.

$$\boxed{\supseteq} \quad \begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$

$\boxed{\subseteq}$ Sea $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

\implies existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$

$\implies \begin{cases} \text{o bien existe } x \in A_1 \text{ tal que } y = f(x) \\ \text{o bien existe } x \in A_2 \text{ tal que } y = f(x) \end{cases}$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



$$\begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$



Sea $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

\implies existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$

\implies $\begin{cases} \text{o bien existe } x \in A_1 \text{ tal que } y = f(x) \\ \text{o bien existe } x \in A_2 \text{ tal que } y = f(x) \end{cases}$

\implies $\begin{cases} \text{o bien} \\ \text{o bien} \end{cases}$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



$$\begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$



Sea $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

\implies existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$

$\implies \begin{cases} \text{o bien existe } x \in A_1 \text{ tal que } y = f(x) \\ \text{o bien existe } x \in A_2 \text{ tal que } y = f(x) \end{cases}$

$\implies \begin{cases} \text{o bien } y \in f(A_1) \\ \text{o bien} \end{cases}$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



$$\begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$



Sea $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

\implies existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$

\implies $\begin{cases} \text{o bien existe } x \in A_1 \text{ tal que } y = f(x) \\ \text{o bien existe } x \in A_2 \text{ tal que } y = f(x) \end{cases}$

\implies $\begin{cases} \text{o bien } y \in f(A_1) \\ \text{o bien } y \in f(A_2) \end{cases}$

Ejercicio 2.1.1.

La igualdad es verdadera. Vamos a demostrarlo.



$$\begin{cases} f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$



Sea $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

\implies existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$

$\implies \begin{cases} \text{o bien existe } x \in A_1 \text{ tal que } y = f(x) \\ \text{o bien existe } x \in A_2 \text{ tal que } y = f(x) \end{cases}$

$\implies \begin{cases} \text{o bien } y \in f(A_1) \\ \text{o bien } y \in f(A_2) \end{cases} \implies y \in f(A_1) \cup f(A_2)$

Ejercicio 2.1.2.

Ejercicio 2.1.2.

La igualdad no es cierta en general.

Ejercicio 2.1.2.

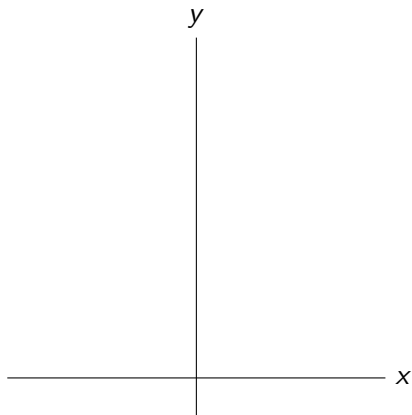
La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

Ejercicio 2.1.2.

La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

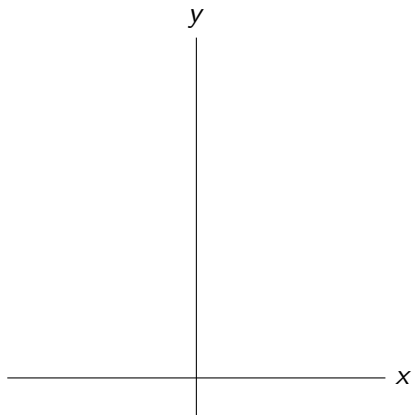
Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ejercicio 2.1.2.

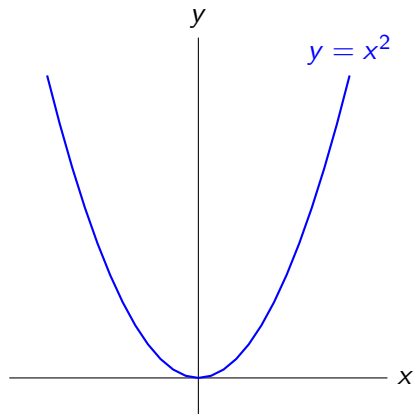


La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

Ejercicio 2.1.2.

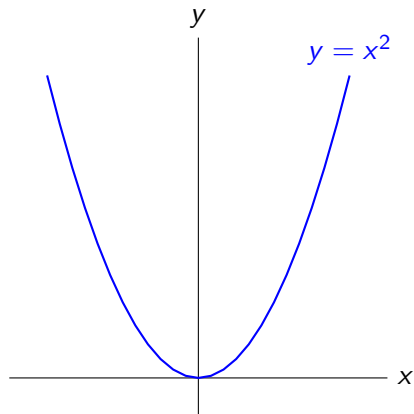


La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

Ejercicio 2.1.2.



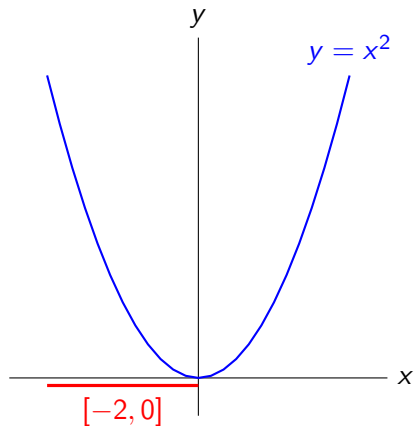
La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0]$$

Ejercicio 2.1.2.



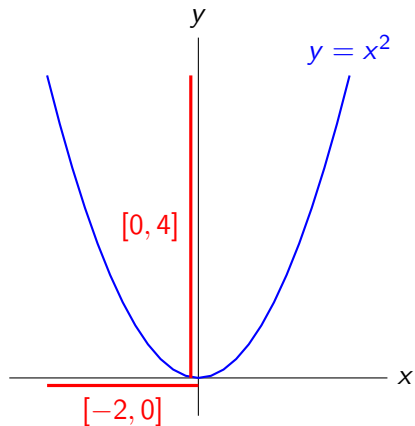
La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0]$$

Ejercicio 2.1.2.



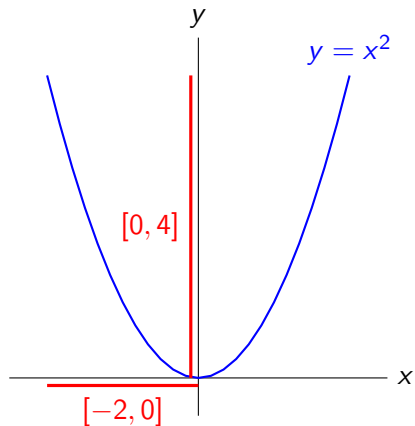
La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0]$$

Ejercicio 2.1.2.



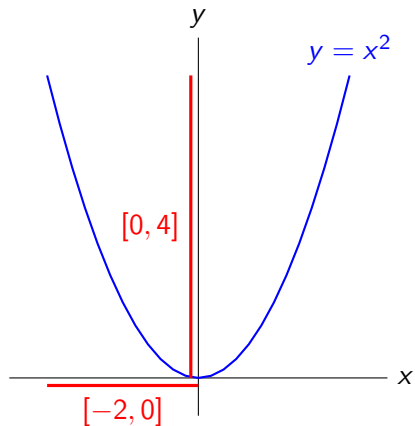
La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

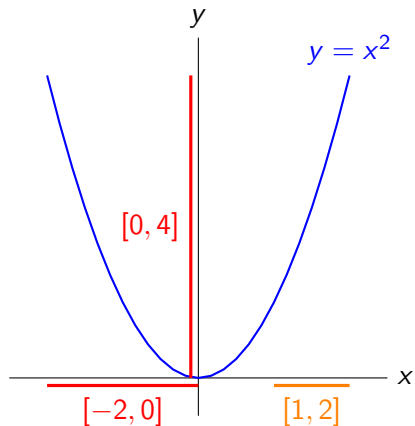
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

$$A_2 = [1, 2]$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

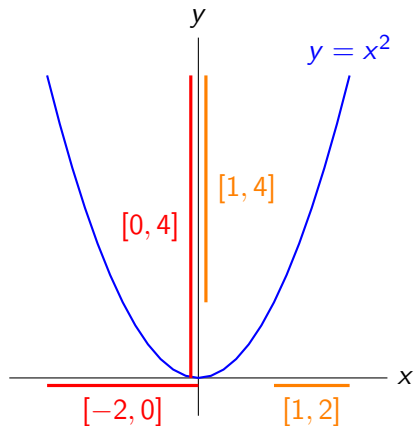
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

$$A_2 = [1, 2]$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

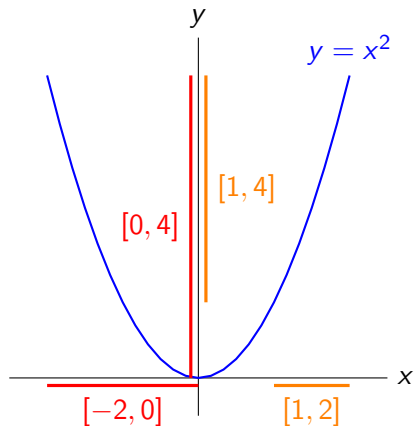
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

$$A_2 = [1, 2]$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

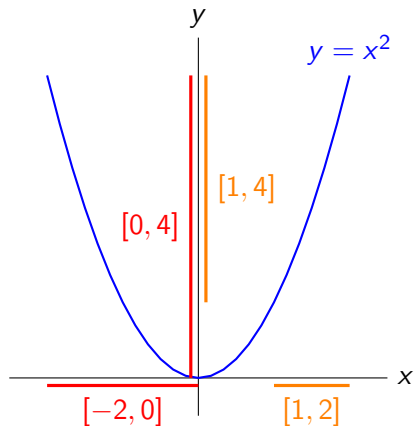
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

$$A_2 = [1, 2] \quad f(A_2) = [1, 4]$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

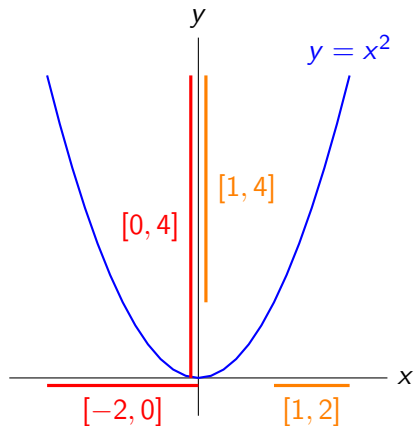
$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

$$A_2 = [1, 2] \quad f(A_2) = [1, 4]$$

$$f(A_1 \cap A_2)$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

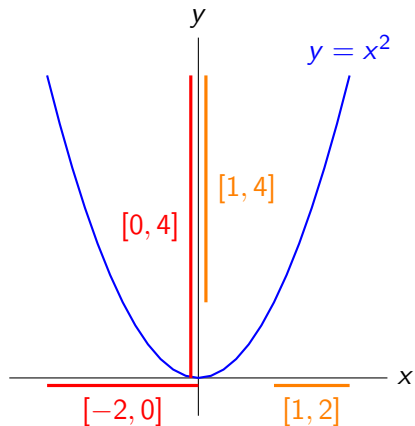
$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

$$A_2 = [1, 2] \quad f(A_2) = [1, 4]$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset)$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

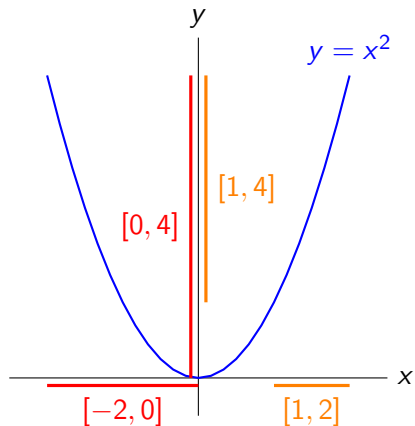
$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

$$A_2 = [1, 2] \quad f(A_2) = [1, 4]$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

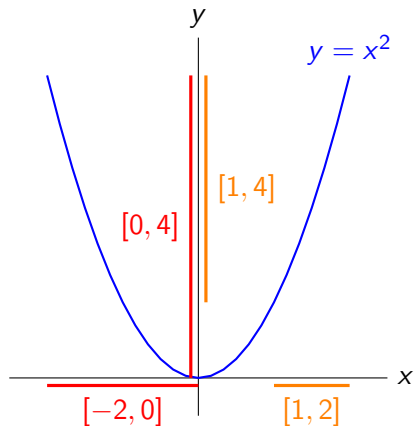
$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

$$A_2 = [1, 2] \quad f(A_2) = [1, 4]$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f(A_1) \cap f(A_2)$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

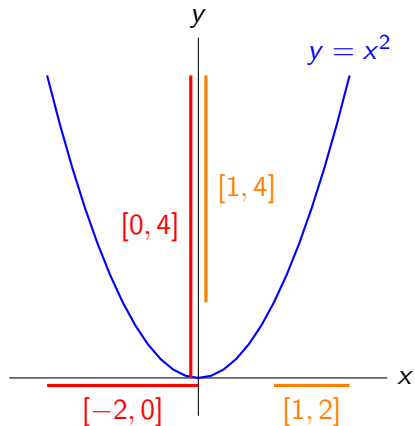
$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

$$A_2 = [1, 2] \quad f(A_2) = [1, 4]$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f(A_1) \cap f(A_2) = [1, 4]$$

Ejercicio 2.1.2.



$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \cap A_2 \subseteq A_1 \\ \end{array} \right.$$

La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

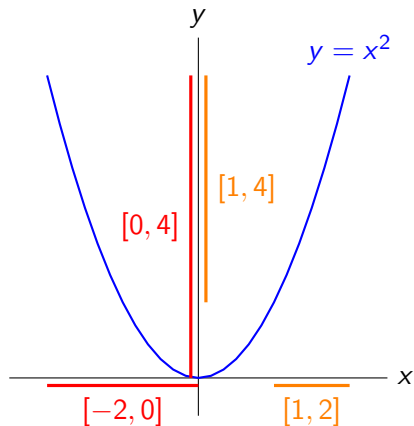
$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

$$A_2 = [1, 2] \quad f(A_2) = [1, 4]$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f(A_1) \cap f(A_2) = [1, 4]$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

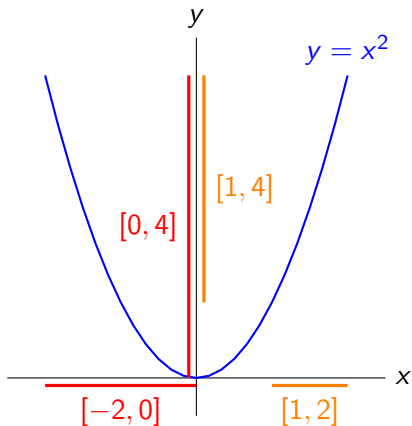
$$A_2 = [1, 2] \quad f(A_2) = [1, 4]$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f(A_1) \cap f(A_2) = [1, 4]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \\ \end{array} \right.$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

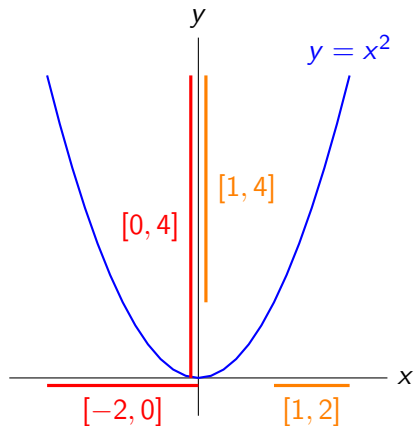
$$A_2 = [1, 2] \quad f(A_2) = [1, 4]$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f(A_1) \cap f(A_2) = [1, 4]$$

$$\begin{cases} f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \\ A_1 \cap A_2 \subseteq A_2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

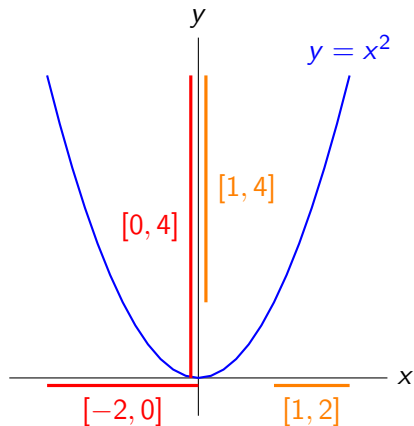
$$A_2 = [1, 2] \quad f(A_2) = [1, 4]$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f(A_1) \cap f(A_2) = [1, 4]$$

$$\begin{cases} f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2) \end{cases}$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

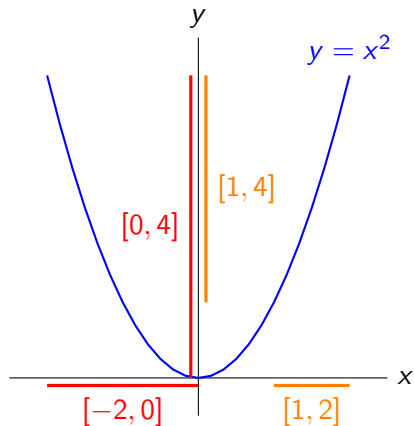
$$A_2 = [1, 2] \quad f(A_2) = [1, 4]$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f(A_1) \cap f(A_2) = [1, 4]$$

$$\begin{cases} f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2) \end{cases} \implies$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

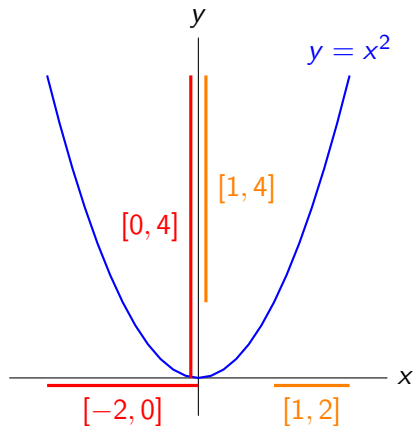
$$A_2 = [1, 2] \quad f(A_2) = [1, 4]$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f(A_1) \cap f(A_2) = [1, 4]$$

$$\begin{cases} f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cap A_2) \subseteq$$

Ejercicio 2.1.2.



La igualdad no es cierta en general.
Vamos a construir un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$A_1 = [-2, 0] \quad f(A_1) = [0, 4]$$

$$A_2 = [1, 2] \quad f(A_2) = [1, 4]$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f(A_1) \cap f(A_2) = [1, 4]$$

$$\begin{cases} f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \\ f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2) \end{cases} \implies f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

Ejercicio 2.3.3.

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal.

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal. Vamos a demostrarlo.

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal. Vamos a demostrarlo.

Fijamos dos vectores **cualesquiera** del espacio inicial:

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal. Vamos a demostrarlo.

Fijamos dos vectores **cualesquiera** del espacio inicial:

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal. Vamos a demostrarlo.

Fijamos dos vectores **cualesquiera** del espacio inicial:

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$$

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal. Vamos a demostrarlo.

Fijamos dos vectores **cualesquiera** del espacio inicial:

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$$

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(3) - p(1) \\ p'(2) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal. Vamos a demostrarlo.

Fijamos dos vectores **cualesquiera** del espacio inicial:

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$$

$$\begin{aligned} f(p) &= \begin{pmatrix} p(3) - p(1) \\ p'(2) \end{pmatrix} \\ &= \left(\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal. Vamos a demostrarlo.

Fijamos dos vectores **cualesquiera** del espacio inicial:

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$$

$$\begin{aligned} f(p) &= \begin{pmatrix} p(3) - p(1) \\ p'(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3) \\ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal. Vamos a demostrarlo.

Fijamos dos vectores **cualesquiera** del espacio inicial:

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$$

$$\begin{aligned} f(p) &= \begin{pmatrix} p(3) - p(1) \\ p'(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3) - (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal. Vamos a demostrarlo.

Fijamos dos vectores **cualesquiera** del espacio inicial:

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$$

Cálculo intermedio: $p'(X) =$

$$\begin{aligned} f(p) &= \begin{pmatrix} p(3) - p(1) \\ p'(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3) - (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal. Vamos a demostrarlo.

Fijamos dos vectores **cualesquiera** del espacio inicial:

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$$

Cálculo intermedio: $p'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$

$$\begin{aligned} f(p) &= \begin{pmatrix} p(3) - p(1) \\ p'(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3) - (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal. Vamos a demostrarlo.

Fijamos dos vectores **cualesquiera** del espacio inicial:

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$$

Cálculo intermedio: $p'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$

$$\begin{aligned} f(p) &= \begin{pmatrix} p(3) - p(1) \\ p'(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3) - (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3.3.

Sí que es lineal. Vamos a demostrarlo.

Fijamos dos vectores **cualesquiera** del espacio inicial:

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$$

Cálculo intermedio: $p'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$

$$\begin{aligned} f(p) &= \begin{pmatrix} p(3) - p(1) \\ p'(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3) - (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a_1 + 8a_2 + 26a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3.3.

$$f(q) = \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.3.

$$f(q) = \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

$$f(p) + f(q) =$$

Ejercicio 2.3.3.

$$f(q) = \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 2a_1 + 8a_2 + 26a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.3.

$$f(q) = \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 2a_1 + 8a_2 + 26a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) =$$

Ejercicio 2.3.3.

Cálculo intermedio:

$$(p + q)(X) =$$

$$f(q) = \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 2a_1 + 8a_2 + 26a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) =$$

Ejercicio 2.3.3.

Cálculo intermedio:

$$(p + q)(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + (a_3 + b_3)X^3$$

$$f(q) = \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 2a_1 + 8a_2 + 26a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) =$$

Ejercicio 2.3.3.

Cálculo intermedio:

$$(p + q)(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + (a_3 + b_3)X^3$$

$$f(q) = \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 2a_1 + 8a_2 + 26a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_1 + 8b_2 + 26b_3 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) = \begin{pmatrix} 2(a_1 + b_1) + 8(a_2 + b_2) + 26(a_3 + b_3) \\ (a_1 + b_1) + 4(a_2 + b_2) + 12(a_3 + b_3) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.3.

Fijamos además un escalar λ cualquiera.

Ejercicio 2.3.3.

Fijamos además un escalar λ cualquiera.

$$\lambda \cdot f(p) =$$

$$f(\lambda \cdot p) =$$

Ejercicio 2.3.3.

Fijamos además un escalar λ cualquiera.

$$\lambda \cdot f(p) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 + 8a_2 + 26a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda \cdot p) =$$

Ejercicio 2.3.3.

Fijamos además un escalar λ cualquiera.

Cálculo intermedio: $(\lambda \cdot p)(X) =$

$$\lambda \cdot f(p) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 + 8a_2 + 26a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda \cdot p) =$$

Ejercicio 2.3.3.

Fijamos además un escalar λ cualquiera.

Cálculo intermedio: $(\lambda \cdot p)(X) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)X + (\lambda a_2)X^2 + (\lambda a_3)X^3$

$$\lambda \cdot f(p) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 + 8a_2 + 26a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda \cdot p) =$$

Ejercicio 2.3.3.

Fijamos además un escalar λ cualquiera.

Cálculo intermedio: $(\lambda \cdot p)(X) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)X + (\lambda a_2)X^2 + (\lambda a_3)X^3$

$$\lambda \cdot f(p) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 + 8a_2 + 26a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda \cdot p) = \begin{pmatrix} 2(\lambda a_1) + 8(\lambda a_2) + 26(\lambda a_3) \\ (\lambda a_1) + 4(\lambda a_2) + 12(\lambda a_3) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.4.

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo:

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$ $q(X) = X^2$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$ $q(X) = X^2$

$$f(p) + f(q) =$$

$$f(p + q) =$$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$ $q(X) = X^2$

(Por el apartado anterior, sabemos que sí que es lineal en la segunda componente, el problema estará en la primera componente).

$$f(p) + f(q) =$$

$$f(p + q) =$$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$ $q(X) = X^2$

(Por el apartado anterior, sabemos que sí que es lineal en la segunda componente, el problema estará en la primera componente).

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$ $q(X) = X^2$

(Por el apartado anterior, sabemos que sí que es lineal en la segunda componente, el problema estará en la primera componente).

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 4 \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$ $q(X) = X^2$

(Por el apartado anterior, sabemos que sí que es lineal en la segunda componente, el problema estará en la primera componente).

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ * \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) = \begin{pmatrix} \\ * \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$ $q(X) = X^2$

(Por el apartado anterior, sabemos que sí que es lineal en la segunda componente, el problema estará en la primera componente).

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ * \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) = \begin{pmatrix} \\ * \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$ $q(X) = X^2$

(Por el apartado anterior, sabemos que sí que es lineal en la segunda componente, el problema estará en la primera componente).

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \cdot 1 \\ * \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) = \begin{pmatrix} \\ * \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$ $q(X) = X^2$

(Por el apartado anterior, sabemos que sí que es lineal en la segunda componente, el problema estará en la primera componente).

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \cdot 1 \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ * \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) = \begin{pmatrix} \\ * \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$ $q(X) = X^2$

(Por el apartado anterior, sabemos que sí que es lineal en la segunda componente, el problema estará en la primera componente).

$$(p + q)(X) = 1 + X + X^2$$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \cdot 1 \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ * \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) = \begin{pmatrix} \\ * \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$ $q(X) = X^2$

(Por el apartado anterior, sabemos que sí que es lineal en la segunda componente, el problema estará en la primera componente).

$$(p + q)(X) = 1 + X + X^2$$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \cdot 1 \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ * \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) = \begin{pmatrix} 13 \\ * \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$ $q(X) = X^2$

(Por el apartado anterior, sabemos que sí que es lineal en la segunda componente, el problema estará en la primera componente).

$$(p + q)(X) = 1 + X + X^2$$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \cdot 1 \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ * \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) = \begin{pmatrix} 13 \cdot 3 \\ * \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.4.

No es lineal.

Contraejemplo: $p(X) = 1 + X$ $q(X) = X^2$

(Por el apartado anterior, sabemos que sí que es lineal en la segunda componente, el problema estará en la primera componente).

$$(p + q)(X) = 1 + X + X^2$$

$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \cdot 1 \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ * \end{pmatrix}$$

$$f(p + q) = \begin{pmatrix} 13 \cdot 3 \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ * \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$\text{im } f =$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\text{im } f = \{f(p) \mid \quad \quad \quad \}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\text{im } f = \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\text{im } f = \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{ \quad \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\text{im } f = \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{p''(X) + p(0) \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\begin{aligned}\text{im } f &= \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{p''(X) + p(0) \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{ \quad \quad \quad \mid a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\}\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\begin{aligned}\text{im } f &= \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{p''(X) + p(0) \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(2a_2 + 6a_3X) \quad \mid \quad a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\}\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\begin{aligned}\text{im } f &= \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{p''(X) + p(0) \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(2a_2 + 6a_3X) + a_0 \mid a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\}\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\begin{aligned}\text{im } f &= \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{p''(X) + p(0) \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(2a_2 + 6a_3X) + a_0 \mid a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{ \qquad \qquad \qquad \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\begin{aligned}\text{im } f &= \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{p''(X) + p(0) \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(2a_2 + 6a_3X) + a_0 \mid a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(a_0 + 2a_2) + 6a_3X \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\begin{aligned}\text{im } f &= \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{p''(X) + p(0) \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(2a_2 + 6a_3X) + a_0 \mid a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(a_0 + 2a_2) + 6a_3X \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}\langle 1, 0, 2, 6X \rangle\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\begin{aligned}\text{im } f &= \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{p''(X) + p(0) \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(2a_2 + 6a_3X) + a_0 \mid a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(a_0 + 2a_2) + 6a_3X \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}\langle 1, 0, 2, 6X \rangle \quad \left(= \text{span}\langle f(1), f(X), f(X^2), f(X^3) \rangle \right)\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\begin{aligned}\text{im } f &= \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{p''(X) + p(0) \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(2a_2 + 6a_3X) + a_0 \mid a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(a_0 + 2a_2) + 6a_3X \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}\langle 1, 0, 2, 6X \rangle \quad \left(= \text{span}\langle f(1), f(X), f(X^2), f(X^3) \rangle \right)\end{aligned}$$

En general, para encontrar una familia generadora del subespacio imagen,

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\begin{aligned}\text{im } f &= \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{p''(X) + p(0) \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(2a_2 + 6a_3X) + a_0 \mid a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(a_0 + 2a_2) + 6a_3X \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}\langle 1, 0, 2, 6X \rangle \quad \left(= \text{span}\langle f(1), f(X), f(X^2), f(X^3) \rangle \right)\end{aligned}$$

En general, para encontrar una familia generadora del subespacio imagen, basta con hallar las imágenes de una familia generadora del espacio inicial.

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\begin{aligned}\text{im } f &= \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{p''(X) + p(0) \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(2a_2 + 6a_3X) + a_0 \mid a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(a_0 + 2a_2) + 6a_3X \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}\langle 1, 0, 2, 6X \rangle \quad \left(= \text{span}\langle f(1), f(X), f(X^2), f(X^3) \rangle \right) \\ &= \text{span}\langle 1, X \rangle\end{aligned}$$

En general, para encontrar una familia generadora del subespacio imagen, basta con hallar las imágenes de una familia generadora del espacio inicial.

Ejercicio 2.4.1.

$\text{im } f$

$$\begin{aligned}\text{im } f &= \{f(p) \mid p \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{p''(X) + p(0) \mid p(X) \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(2a_2 + 6a_3X) + a_0 \mid a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(a_0 + 2a_2) + 6a_3X \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}\langle 1, 0, 2, 6X \rangle \quad \left(= \text{span}\langle f(1), f(X), f(X^2), f(X^3) \rangle \right) \\ &= \text{span}\langle 1, X \rangle \quad \longrightarrow \quad \text{base } 1, X\end{aligned}$$

En general, para encontrar una familia generadora del subespacio imagen, basta con hallar las imágenes de una familia generadora del espacio inicial.

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$q(X) \in \ker f \iff$$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$q(X) \in \ker f \iff f(q) = \text{vector nulo}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$q(X) \in \ker f \iff f(q) = \text{vector nulo}$$

$$\iff$$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned} q(X) \in \ker f &\iff f(q) = \text{vector nulo} \\ &\iff (b_0 + 2b_2) + 6b_3X = \end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$q(X) \in \ker f \iff f(q) = \text{vector nulo}$$

$$\iff (b_0 + 2b_2) + 6b_3X = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3$$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$q(X) \in \ker f \iff f(q) = \text{vector nulo}$$

$$\iff (b_0 + 2b_2) + 6b_3X = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3$$

$$\iff$$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$q(X) \in \ker f \iff f(q) = \text{vector nulo}$$

$$\iff (b_0 + 2b_2) + 6b_3X = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3$$

$$\iff \begin{cases} b_0 + 2b_2 = 0 \\ 6b_3 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$q(X) \in \ker f \iff f(q) = \text{vector nulo}$$

$$\iff (b_0 + 2b_2) + 6b_3X = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3$$

$$\iff \begin{cases} b_0 + 2b_2 = 0 \\ 6b_3 = 0 \end{cases}$$

$$\ker f = \{ \quad + X + X^2 + X^3$$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$q(X) \in \ker f \iff f(q) = \text{vector nulo}$$

$$\iff (b_0 + 2b_2) + 6b_3X = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3$$

$$\iff \begin{cases} b_0 + 2b_2 = 0 \\ 6b_3 = 0 \end{cases}$$

$$\ker f = \{ \quad + \mu X + \lambda X^2 + \quad X^3$$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$q(X) \in \ker f \iff f(q) = \text{vector nulo}$$

$$\iff (b_0 + 2b_2) + 6b_3X = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3$$

$$\iff \begin{cases} b_0 + 2b_2 = 0 \\ 6b_3 = 0 \end{cases}$$

$$\ker f = \{ \quad + \mu X + \lambda X^2 + 0X^3$$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$q(X) \in \ker f \iff f(q) = \text{vector nulo}$$

$$\iff (b_0 + 2b_2) + 6b_3X = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3$$

$$\iff \begin{cases} b_0 + 2b_2 = 0 \\ 6b_3 = 0 \end{cases}$$

$$\ker f = \{ -2\lambda + \mu X + \lambda X^2 + 0X^3 \}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$q(X) \in \ker f \iff f(q) = \text{vector nulo}$$

$$\iff (b_0 + 2b_2) + 6b_3X = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3$$

$$\iff \begin{cases} b_0 + 2b_2 = 0 \\ 6b_3 = 0 \end{cases}$$

$$\ker f = \{ -2\lambda + \mu X + \lambda X^2 + 0X^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned}q(X) \in \ker f &\iff f(q) = \text{vector nulo} \\ &\iff (b_0 + 2b_2) + 6b_3X = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3 \\ &\iff \begin{cases} b_0 + 2b_2 = 0 \\ 6b_3 = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ker f &= \{ -2\lambda + \mu X + \lambda X^2 + 0X^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} \\ &= \text{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.1.

$\ker f$

Sea $q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ un polinomio **cualquiera** de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned}q(X) \in \ker f &\iff f(q) = \text{vector nulo} \\ &\iff (b_0 + 2b_2) + 6b_3X = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3 \\ &\iff \begin{cases} b_0 + 2b_2 = 0 \\ 6b_3 = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ker f &= \{ -2\lambda + \mu X + \lambda X^2 + 0X^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} \\ &= \text{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle \quad \longrightarrow \quad \text{base } X, -2 + X^2\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.1.

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\operatorname{ker} f = \operatorname{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

Ejercicio 2.4.1.

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\operatorname{ker} f = \operatorname{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales,

Ejercicio 2.4.1.

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\operatorname{ker} f = \operatorname{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales, así que no tiene sentido considerar su suma o su intersección.

Ejercicio 2.4.1.

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\operatorname{ker} f = \operatorname{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales, así que no tiene sentido considerar su suma o su intersección.

Aquí, espacio inicial = espacio final,

Ejercicio 2.4.1.

$$\text{im } f = \text{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\text{ker } f = \text{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales, así que no tiene sentido considerar su suma o su intersección.

Aquí, espacio inicial = espacio final, luego sí que podemos calcularlos.

Ejercicio 2.4.1.

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\operatorname{ker} f = \operatorname{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales, así que no tiene sentido considerar su suma o su intersección.

Aquí, espacio inicial = espacio final, luego sí que podemos calcularlos.

$$\operatorname{im} f + \operatorname{ker} f$$

Ejercicio 2.4.1.

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\operatorname{ker} f = \operatorname{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales, así que no tiene sentido considerar su suma o su intersección.

Aquí, espacio inicial = espacio final, luego sí que podemos calcularlos.

$$\operatorname{im} f + \operatorname{ker} f$$

$$\operatorname{im} f + \operatorname{ker} f = \operatorname{span}\langle 1, X, X, -2 + X^2 \rangle$$

Ejercicio 2.4.1.

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\operatorname{ker} f = \operatorname{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales, así que no tiene sentido considerar su suma o su intersección.

Aquí, espacio inicial = espacio final, luego sí que podemos calcularlos.

$$\boxed{\operatorname{im} f + \operatorname{ker} f}$$

$$\operatorname{im} f + \operatorname{ker} f = \operatorname{span}\langle 1, X, X, -2 + X^2 \rangle \quad \longrightarrow \quad \text{base } 1, X, X^2$$

Ejercicio 2.4.1.

$$\text{im } f = \text{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\text{ker } f = \text{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales, así que no tiene sentido considerar su suma o su intersección.

Aquí, espacio inicial = espacio final, luego sí que podemos calcularlos.

$$\boxed{\text{im } f + \text{ker } f}$$

$$\text{im } f + \text{ker } f = \text{span}\langle 1, X, X, -2 + X^2 \rangle \quad \longrightarrow \quad \text{base } 1, X, X^2$$

$$\boxed{\text{im } f \cap \text{ker } f}$$

Ejercicio 2.4.1.

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\ker f = \operatorname{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales, así que no tiene sentido considerar su suma o su intersección.

Aquí, espacio inicial = espacio final, luego sí que podemos calcularlos.

$$\boxed{\operatorname{im} f + \ker f}$$

$$\operatorname{im} f + \ker f = \operatorname{span}\langle 1, X, X, -2 + X^2 \rangle \quad \longrightarrow \quad \text{base } 1, X, X^2$$

$$\boxed{\operatorname{im} f \cap \ker f}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X \in \operatorname{im} f \cap \ker f \\ \end{array} \right.$$

Ejercicio 2.4.1.

$$\text{im } f = \text{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\text{ker } f = \text{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales, así que no tiene sentido considerar su suma o su intersección.

Aquí, espacio inicial = espacio final, luego sí que podemos calcularlos.

$$\boxed{\text{im } f + \text{ker } f}$$

$$\text{im } f + \text{ker } f = \text{span}\langle 1, X, X, -2 + X^2 \rangle \quad \longrightarrow \quad \text{base } 1, X, X^2$$

$$\boxed{\text{im } f \cap \text{ker } f}$$

$$\begin{cases} X \in \text{im } f \cap \text{ker } f \\ \dim(\text{im } f \cap \text{ker } f) = \end{cases}$$

Ejercicio 2.4.1.

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\ker f = \operatorname{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales, así que no tiene sentido considerar su suma o su intersección.

Aquí, espacio inicial = espacio final, luego sí que podemos calcularlos.

$$\boxed{\operatorname{im} f + \ker f}$$

$$\operatorname{im} f + \ker f = \operatorname{span}\langle 1, X, X, -2 + X^2 \rangle \quad \longrightarrow \quad \text{base } 1, X, X^2$$

$$\boxed{\operatorname{im} f \cap \ker f}$$

$$\begin{cases} X \in \operatorname{im} f \cap \ker f \\ \dim(\operatorname{im} f \cap \ker f) = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f - \dim(\operatorname{im} f + \ker f) \end{cases}$$

Ejercicio 2.4.1.

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\ker f = \operatorname{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales, así que no tiene sentido considerar su suma o su intersección.

Aquí, espacio inicial = espacio final, luego sí que podemos calcularlos.

$$\boxed{\operatorname{im} f + \ker f}$$

$$\operatorname{im} f + \ker f = \operatorname{span}\langle 1, X, X, -2 + X^2 \rangle \quad \longrightarrow \quad \text{base } 1, X, X^2$$

$$\boxed{\operatorname{im} f \cap \ker f}$$

$$\begin{cases} X \in \operatorname{im} f \cap \ker f \\ \dim(\operatorname{im} f \cap \ker f) = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f - \dim(\operatorname{im} f + \ker f) = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2.4.1.

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}\langle 1, X \rangle$$

$$\ker f = \operatorname{span}\langle X, -2 + X^2 \rangle$$

En general, imagen y núcleo viven en distintos espacios vectoriales, así que no tiene sentido considerar su suma o su intersección.

Aquí, espacio inicial = espacio final, luego sí que podemos calcularlos.

$$\boxed{\operatorname{im} f + \ker f}$$

$$\operatorname{im} f + \ker f = \operatorname{span}\langle 1, X, X, -2 + X^2 \rangle \longrightarrow \text{base } 1, X, X^2$$

$$\boxed{\operatorname{im} f \cap \ker f}$$

$$\begin{cases} X \in \operatorname{im} f \cap \ker f \\ \dim(\operatorname{im} f \cap \ker f) = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f - \dim(\operatorname{im} f + \ker f) = 1 \end{cases}$$
$$\longrightarrow \text{base } X$$

Ejercicio 2.5.1.

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T)$$

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \quad \Leftarrow$$

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \iff f(\bar{0}) \in T$$

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \iff f(\bar{0})$$

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \iff f(\bar{0})$$

Como f es lineal,

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \iff f(\bar{0})$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \iff f(\bar{0}) = \bar{0}$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \iff f(\bar{0}) = \bar{0}$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio,

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \iff f(\bar{0}) = \bar{0}$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \iff f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \iff f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

$f^{-1}(T)$ es cerrado para la suma

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

$f^{-1}(T)$ es cerrado para la suma

Sean $a, b \in f^{-1}(T)$.

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

$f^{-1}(T)$ es cerrado para la suma

Sean $a, b \in f^{-1}(T)$.

$$a + b \in f^{-1}(T)$$

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \quad \Longleftrightarrow \quad f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

$f^{-1}(T)$ es cerrado para la suma

Sean $a, b \in f^{-1}(T)$.

$$a + b \in f^{-1}(T) \quad \Longleftrightarrow$$

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

$f^{-1}(T)$ es cerrado para la suma

Sean $a, b \in f^{-1}(T)$.

$$a + b \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(a + b) \in T$$

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \iff f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

$f^{-1}(T)$ es cerrado para la suma

Sean $a, b \in f^{-1}(T)$.

$$a + b \in f^{-1}(T) \iff f(a + b)$$

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

$f^{-1}(T)$ es cerrado para la suma

Sean $a, b \in f^{-1}(T)$.

$$a + b \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(a + b)$$

Como f es lineal,

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

$f^{-1}(T)$ es cerrado para la suma

Sean $a, b \in f^{-1}(T)$.

$$a + b \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(a + b)$$

Como f es lineal, la imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes.

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

$f^{-1}(T)$ es cerrado para la suma

Sean $a, b \in f^{-1}(T)$.

$$a + b \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$$

Como f es lineal, la imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes.

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

$f^{-1}(T)$ es cerrado para la suma

Sean $a, b \in f^{-1}(T)$. Esto quiere decir que $f(a), f(b) \in T$.

$$a + b \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$$

Como f es lineal, la imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes.

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

$f^{-1}(T)$ es cerrado para la suma

Sean $a, b \in f^{-1}(T)$. Esto quiere decir que $f(a), f(b) \in T$.

$$a + b \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$$

Como f es lineal, la imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes.
Como T es subespacio,

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

$f^{-1}(T)$ es cerrado para la suma

Sean $a, b \in f^{-1}(T)$. Esto quiere decir que $f(a), f(b) \in T$.

$$a + b \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$$

Como f es lineal, la imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes.
Como T es subespacio, es cerrado para la suma.

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ contiene al vector nulo

$$\bar{0} \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(\bar{0}) = \bar{0} \in T$$

Como f es lineal, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de W .
Como T es subespacio, contiene al vector nulo de W .

$f^{-1}(T)$ es cerrado para la suma

Sean $a, b \in f^{-1}(T)$. Esto quiere decir que $f(a), f(b) \in T$.

$$a + b \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow \quad f(a + b) = f(a) + f(b) \in T$$

Como f es lineal, la imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes.
Como T es subespacio, es cerrado para la suma.

Ejercicio 2.5.1.

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ es cerrado para el producto

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ es cerrado para el producto

Sea $a \in f^{-1}(T)$ y sea λ un escalar.

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ es cerrado para el producto

Sea $a \in f^{-1}(T)$ y sea λ un escalar.

$$\lambda a \in f^{-1}(T)$$

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ es cerrado para el producto

Sea $a \in f^{-1}(T)$ y sea λ un escalar.

$$\lambda a \in f^{-1}(T) \quad \Longleftarrow$$

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ es cerrado para el producto

Sea $a \in f^{-1}(T)$ y sea λ un escalar.

$$\lambda a \in f^{-1}(T) \iff f(\lambda a) \in T$$

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ es cerrado para el producto

Sea $a \in f^{-1}(T)$ y sea λ un escalar.

$$\lambda a \in f^{-1}(T) \iff f(\lambda a)$$

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ es cerrado para el producto

Sea $a \in f^{-1}(T)$ y sea λ un escalar.

$$\lambda a \in f^{-1}(T) \iff f(\lambda a)$$

Como f es lineal,

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ es cerrado para el producto

Sea $a \in f^{-1}(T)$ y sea λ un escalar.

$$\lambda a \in f^{-1}(T) \iff f(\lambda a)$$

Como f es lineal, la imagen del producto es el producto de las imágenes.

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ es cerrado para el producto

Sea $a \in f^{-1}(T)$ y sea λ un escalar.

$$\lambda a \in f^{-1}(T) \quad \Longleftrightarrow \quad f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

Como f es lineal, la imagen del producto es el producto de las imágenes.

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ es cerrado para el producto

Sea $a \in f^{-1}(T)$ y sea λ un escalar. Esto quiere decir que $f(a) \in T$.

$$\lambda a \in f^{-1}(T) \quad \Longleftrightarrow \quad f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

Como f es lineal, la imagen del producto es el producto de las imágenes.

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ es cerrado para el producto

Sea $a \in f^{-1}(T)$ y sea λ un escalar. Esto quiere decir que $f(a) \in T$.

$$\lambda a \in f^{-1}(T) \quad \Longleftrightarrow \quad f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

Como f es lineal, la imagen del producto es el producto de las imágenes.
Como T es subespacio,

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ es cerrado para el producto

Sea $a \in f^{-1}(T)$ y sea λ un escalar. Esto quiere decir que $f(a) \in T$.

$$\lambda a \in f^{-1}(T) \quad \Longleftrightarrow \quad f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

Como f es lineal, la imagen del producto es el producto de las imágenes.
Como T es subespacio, es cerrado para el producto.

Ejercicio 2.5.1.

$f^{-1}(T)$ es cerrado para el producto

Sea $a \in f^{-1}(T)$ y sea λ un escalar. Esto quiere decir que $f(a) \in T$.

$$\lambda a \in f^{-1}(T) \quad \Longleftrightarrow \quad f(\lambda a) = \lambda f(a) \in T$$

Como f es lineal, la imagen del producto es el producto de las imágenes.
Como T es subespacio, es cerrado para el producto.

Ejercicio 2.7.

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula



Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula



para todo $a \in V$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff a \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

$$\iff$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

$$\iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

$$\iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

$\dim V =$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

$$\iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{im } f)$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

$$\iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{im } f)$$

Ahora está claro que 1 implica 2.

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

$$\iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{im } f)$$

Ahora está claro que 1 implica 2.

Vamos a probar que 2 implica 1.

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

$$\iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{im } f)$$

Ahora está claro que 1 implica 2.

Vamos a probar que 2 implica 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \circ f = \text{aplicación nula} \\ \end{array} \right.$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

$$\iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{im } f)$$

Ahora está claro que 1 implica 2.

Vamos a probar que 2 implica 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \circ f = \text{aplicación nula} \\ \end{array} \right. \iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

$$\iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{im } f)$$

Ahora está claro que 1 implica 2.

Vamos a probar que 2 implica 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \circ f = \text{aplicación nula} \\ \dim(\ker f) = \end{array} \right. \iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

$$\iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{im } f)$$

Ahora está claro que 1 implica 2.

Vamos a probar que 2 implica 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \circ f = \text{aplicación nula} \\ \dim(\ker f) = \dim V - \dim(\text{im } f) \end{array} \right. \iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

$$\iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{im } f)$$

Ahora está claro que 1 implica 2.

Vamos a probar que 2 implica 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \text{im } f \subseteq \ker f \\ \dim(\ker f) = \dim V - \dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } f) \end{array} \right.$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

$$\iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{im } f)$$

Ahora está claro que 1 implica 2.

Vamos a probar que 2 implica 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \circ f = \text{aplicación nula} \\ \dim(\ker f) = \dim V - \dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } f) \end{array} \right. \iff \text{im } f \subseteq \ker f \quad \implies$$

Ejercicio 2.7.

$f \circ f =$ aplicación nula

$$\iff f(f(a)) = \bar{0} \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff f(a) \in \ker(f) \quad \text{para todo } a \in V$$

$$\iff w \in \ker(f) \quad \text{para todo } w \in \text{im } f$$

$$\iff \text{im } f \subseteq \ker f$$

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{im } f)$$

Ahora está claro que 1 implica 2.

Vamos a probar que 2 implica 1.

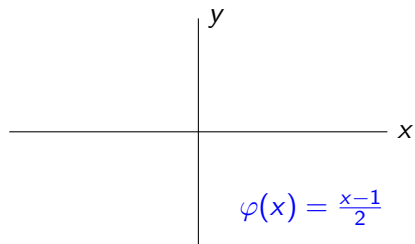
$$\begin{cases} f \circ f = \text{aplicación nula} \\ \dim(\ker f) = \dim V - \dim(\text{im } f) = \dim(\text{im } f) \end{cases} \iff \text{im } f \subseteq \ker f \implies \ker f = \text{im } f$$

Ejercicio 2.9.1.

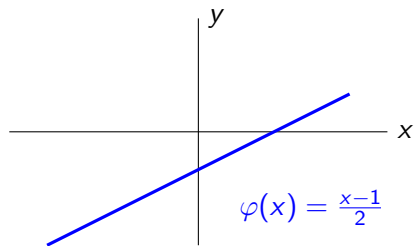
Ejercicio 2.9.1.

$$\varphi(x) = \frac{x-1}{2}$$

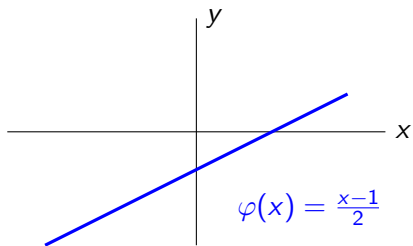
Ejercicio 2.9.1.



Ejercicio 2.9.1.

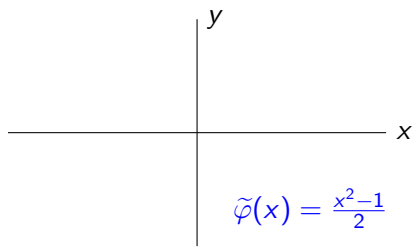
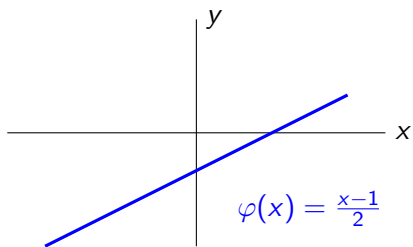


Ejercicio 2.9.1.

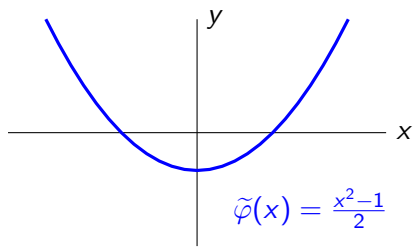
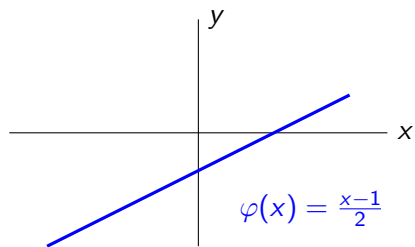


$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{x^2-1}{2}$$

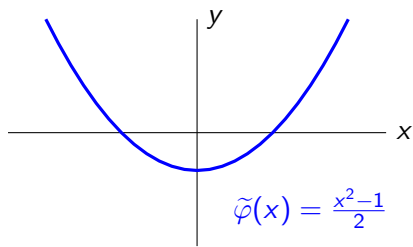
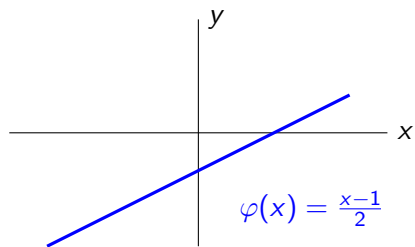
Ejercicio 2.9.1.



Ejercicio 2.9.1.

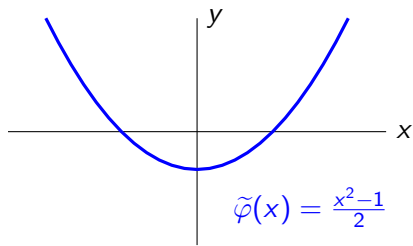
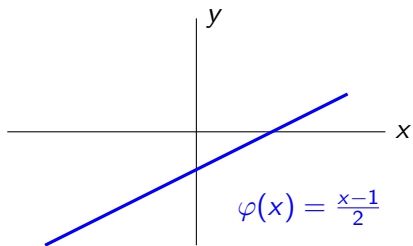


Ejercicio 2.9.1.



$$\varphi(x) = \text{sen}(2\pi x)$$

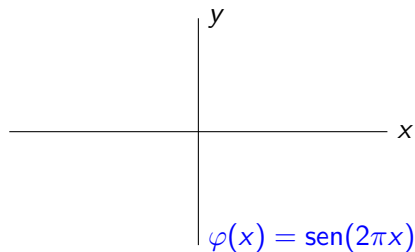
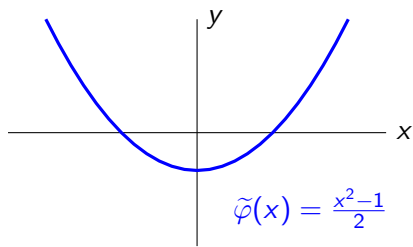
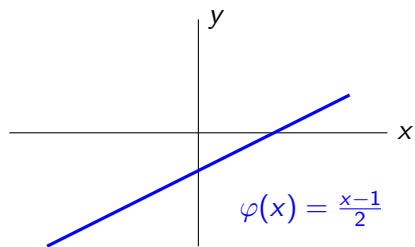
Ejercicio 2.9.1.



$$\varphi(x) = \text{sen}(2\pi x)$$

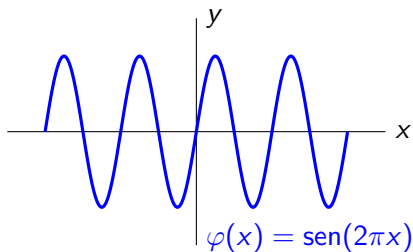
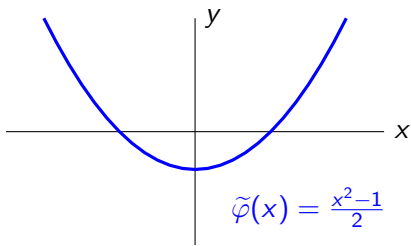
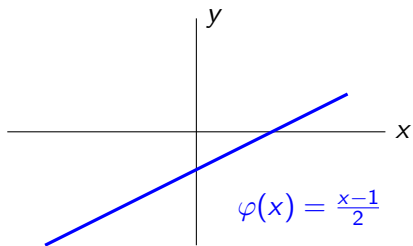
$$\tilde{\varphi}(x) = \text{sen}(2\pi x^2)$$

Ejercicio 2.9.1.



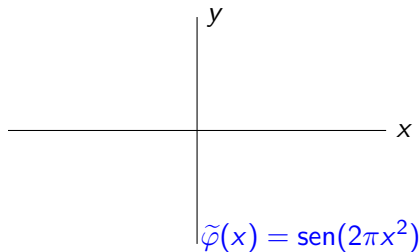
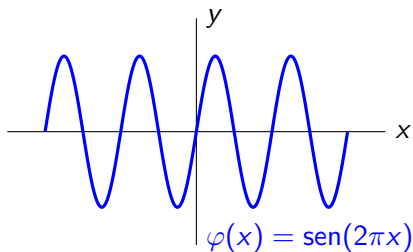
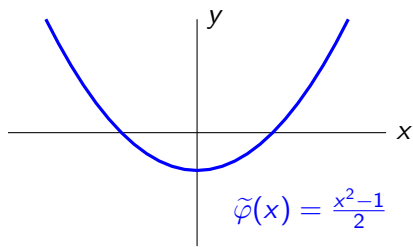
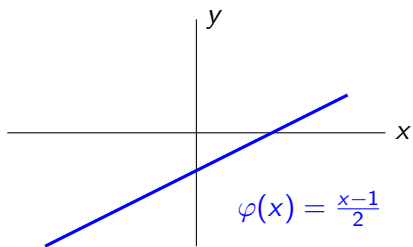
$$\tilde{\varphi}(x) = \text{sen}(2\pi x^2)$$

Ejercicio 2.9.1.

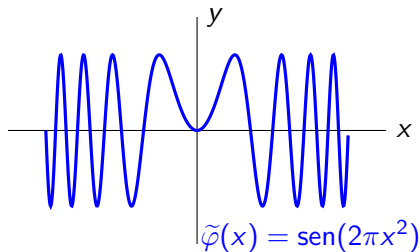
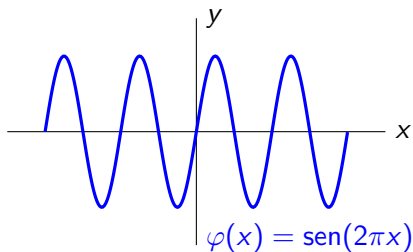
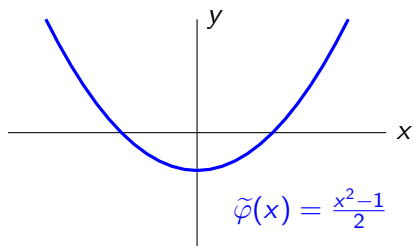
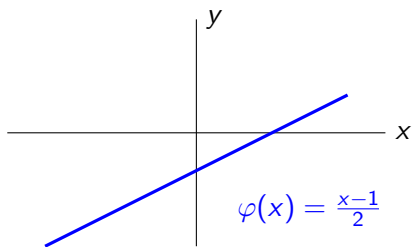


$$\tilde{\varphi}(x) = \text{sen}(2\pi x^2)$$

Ejercicio 2.9.1.



Ejercicio 2.9.1.



Ejercicio 2.9.1.

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\varphi \in \ker f \iff$$

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\varphi \in \ker f \iff f(\varphi) = \text{vector nulo}$$

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\varphi \in \ker f \iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff$$

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\varphi \in \ker f \iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo}$$

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned} \varphi \in \ker f &\iff f(\varphi) = \text{vector nulo} &\iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo} \\ &\iff & \end{aligned}$$

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned} \varphi \in \ker f &\iff f(\varphi) = \text{vector nulo} &\iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo} \\ &\iff & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned} \varphi \in \ker f &\iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo} \\ &\iff \tilde{\varphi}(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned} \varphi \in \ker f &\iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo} \\ &\iff \tilde{\varphi}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned} \varphi \in \ker f &\iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo} \\ &\iff \tilde{\varphi}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &\iff \end{aligned}$$

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\varphi \in \ker f \iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo}$$

$$\iff \tilde{\varphi}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\iff \quad \quad \quad = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned}\varphi \in \ker f &\iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo} \\ &\iff \tilde{\varphi}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &\iff \varphi(x^2) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned}\varphi \in \ker f &\iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo} \\ &\iff \tilde{\varphi}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &\iff \varphi(x^2) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &\iff\end{aligned}$$

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned}\varphi \in \ker f &\iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo} \\ &\iff \tilde{\varphi}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &\iff \varphi(x^2) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &\iff \varphi(\quad) = 0 \quad \text{para todo}\end{aligned}$$

Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned}\varphi \in \ker f &\iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo} \\ &\iff \tilde{\varphi}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &\iff \varphi(x^2) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &\iff \varphi(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in [0, \infty)\end{aligned}$$

Ejercicio 2.9.1.

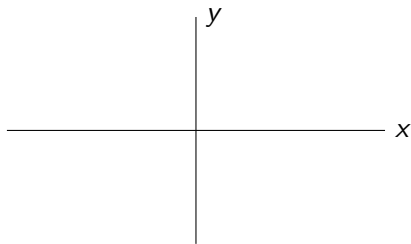
Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\varphi \in \ker f \iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo}$$

$$\iff \tilde{\varphi}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\iff \varphi(x^2) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\iff \varphi(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in [0, \infty)$$



Ejercicio 2.9.1.

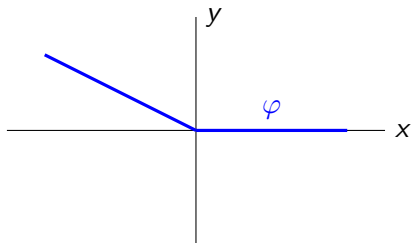
Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\varphi \in \ker f \iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo}$$

$$\iff \tilde{\varphi}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\iff \varphi(x^2) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

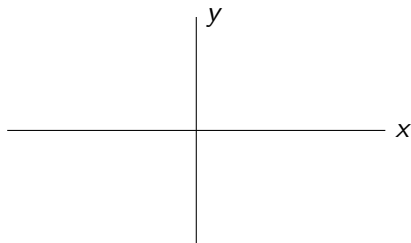
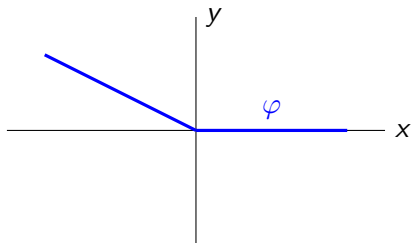
$$\iff \varphi(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in [0, \infty)$$



Ejercicio 2.9.1.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned}\varphi \in \ker f &\iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo} \\ &\iff \tilde{\varphi}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &\iff \varphi(x^2) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ &\iff \varphi(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in [0, \infty)\end{aligned}$$



Ejercicio 2.9.1.

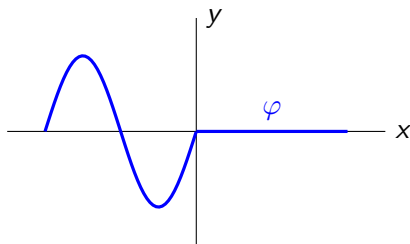
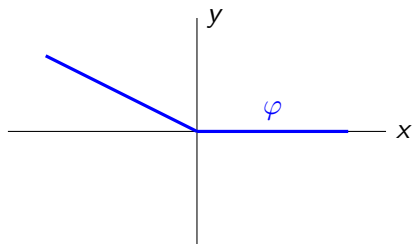
Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$\varphi \in \ker f \iff f(\varphi) = \text{vector nulo} \iff \tilde{\varphi} = \text{vector nulo}$$

$$\iff \tilde{\varphi}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\iff \varphi(x^2) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\iff \varphi(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in [0, \infty)$$



Ejercicio 2.11.1.

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera.

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
tales que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$.

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **no todos nulos**
tales que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$.

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **no todos nulos**
tales que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$.

Para probar que $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es ligada,

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **no todos nulos**
tales que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$.

Para probar que $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es ligada,
cogemos los **mismos** escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **no todos nulos**
tales que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$.

Para probar que $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es ligada,
cogemos los **misimos** escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
(esto nos asegura que no todos son nulos).

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **no todos nulos**
tales que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$.

Para probar que $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es ligada,
cogemos los **misimos** escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
(esto nos asegura que no todos son nulos).

$$\lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) =$$

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **no todos nulos**
tales que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$.

Para probar que $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es ligada,
cogemos los **misimos** escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
(esto nos asegura que no todos son nulos).

$$\lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) =$$

Como f es lineal:

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **no todos nulos**
tales que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$.

Para probar que $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es ligada,
cogemos los **misimos** escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
(esto nos asegura que no todos son nulos).

$$\lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) =$$

Como f es lineal:
la combinación lineal de las imágenes

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **no todos nulos**
tales que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$.

Para probar que $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es ligada,
cogemos los **misimos** escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
(esto nos asegura que no todos son nulos).

$$\lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) =$$

Como f es lineal:

la combinación lineal de las imágenes
es igual a la imagen de la combinación lineal;

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **no todos nulos**
tales que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$.

Para probar que $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es ligada,
cogemos los **misimos** escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
(esto nos asegura que no todos son nulos).

$$\lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) = f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n)$$

Como f es lineal:

la combinación lineal de las imágenes
es igual a la imagen de la combinación lineal;

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **no todos nulos**
tales que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$.

Para probar que $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es ligada,
cogemos los **misimos** escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
(esto nos asegura que no todos son nulos).

$$\lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) = f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = f(\bar{0})$$

Como f es lineal:

la combinación lineal de las imágenes
es igual a la imagen de la combinación lineal;

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **no todos nulos**
tales que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \vec{0}$.

Para probar que $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es ligada,
cogemos los **misimos** escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
(esto nos asegura que no todos son nulos).

$$\lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) = f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = f(\vec{0})$$

Como f es lineal:

la combinación lineal de las imágenes
es igual a la imagen de la combinación lineal;
y la imagen del vector nulo es igual al vector nulo.

Ejercicio 2.11.1.

Es verdadera. Vamos a demostrarlo.

Como (a_1, \dots, a_n) es ligada,
existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ **no todos nulos**
tales que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$.

Para probar que $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es ligada,
cogemos los **mismos** escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
(esto nos asegura que no todos son nulos).

$$\lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) = f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = f(\bar{0}) = \bar{0}$$

Como f es lineal:

la combinación lineal de las imágenes
es igual a la imagen de la combinación lineal;
y la imagen del vector nulo es igual al vector nulo.

Ejercicio 2.11.2.

Ejercicio 2.11.2.

Es falsa.

Ejercicio 2.11.2.

Es falsa. Veamos un contraejemplo.

Ejercicio 2.11.2.

Es falsa. Veamos un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Ejercicio 2.11.2.

Es falsa. Veamos un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.11.2.

Es falsa. Veamos un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto$$

Ejercicio 2.11.2.

Es falsa. Veamos un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.11.2.

Es falsa. Veamos un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.11.2.

Es falsa. Veamos un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.11.2.

Es falsa. Veamos un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto$$

Ejercicio 2.11.2.

Es falsa. Veamos un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.11.2.

Es falsa. Veamos un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.11.2.

Es falsa. Veamos un contraejemplo.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.12.2.

Ejercicio 2.12.2.

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

Ejercicio 2.12.2.

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

$$p(1) =$$

Ejercicio 2.12.2.

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

Ejercicio 2.12.2.

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$p(1)(1 + X^2) =$$

Ejercicio 2.12.2.

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$p(1)(1 + X^2) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2$$

Ejercicio 2.12.2.

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$p(1)(1 + X^2) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2$$

$$p''(X) =$$

Ejercicio 2.12.2.

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$p(1)(1 + X^2) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2$$

$$p''(X) = 2a_2 + 6a_3X$$

Ejercicio 2.12.2.

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$p(1)(1 + X^2) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2$$

$$p''(X) = 2a_2 + 6a_3X$$

$$p''(0)X^3 =$$

Ejercicio 2.12.2.

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$p(1)(1 + X^2) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2$$

$$p''(X) = 2a_2 + 6a_3X$$

$$p''(0)X^3 = 2a_2X^3$$

Ejercicio 2.12.2.

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$p(1)(1 + X^2) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2$$

$$p''(X) = 2a_2 + 6a_3X$$

$$p''(0)X^3 = 2a_2X^3$$

$$p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3 =$$

Ejercicio 2.12.2.

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$p(1)(1 + X^2) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2$$

$$p''(X) = 2a_2 + 6a_3X$$

$$p''(0)X^3 = 2a_2X^3$$

$$p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3 = \left(\sum_{i=0}^3 a_i \right) + \left(\sum_{i=0}^3 a_i \right) X^2 + 2a_2X^3$$

Ejercicio 2.12.2.

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

l)

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

l) $1, X, X^2, X^3$

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

I) $1, X, X^2, X^3$

II)

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

I) $1, X, X^2, X^3$

II) $1 + X^2$

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

I) $1, X, X^2, X^3$

II) $1 + X^2 \quad 1 + X^2 \quad 1 + X^2 \quad 1 + X^2$

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

I) $1, X, X^2, X^3$

II) $1 + X^2$ $1 + X^2$ $1 + X^2 + 2X^3$ $1 + X^2$

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

I) $1, X, X^2, X^3$

II) $1 + X^2$ $1 + X^2$ $1 + X^2 + 2X^3$ $1 + X^2$

III)

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

I) $1, X, X^2, X^3$

II) $1 + X^2$ $1 + X^2$ $1 + X^2 + 2X^3$ $1 + X^2$

III) $1 + X^2$

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

I) $1, X, X^2, X^3$

II) $1 + X^2$ $1 + X^2$ $1 + X^2 + 2X^3$ $1 + X^2$

III) $1 + X^2 = 1 + 0X + 1X^2 + 0X^3$

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

I) $1, X, X^2, X^3$

II) $1 + X^2$ $1 + X^2$ $1 + X^2 + 2X^3$ $1 + X^2$

III) $1 + X^2 = 1 + 0X + 1X^2 + 0X^3$

Coordenadas:

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

I) $1, X, X^2, X^3$

II) $1 + X^2$ $1 + X^2$ $1 + X^2 + 2X^3$ $1 + X^2$

III) $1 + X^2 = 1 + 0X + 1X^2 + 0X^3$

Coordenadas: $1, 0, 1, 0$

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

I) $1, X, X^2, X^3$

II) $1 + X^2$ $1 + X^2$ $1 + X^2 + 2X^3$ $1 + X^2$

III) $1 + X^2 = 1 + 0X + 1X^2 + 0X^3$

Coordenadas: $1, 0, 1, 0$ $1, 0, 1, 0$ $1, 0, 1, 2$ $1, 0, 1, 0$

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

I) $1, X, X^2, X^3$

II) $1 + X^2$ $1 + X^2$ $1 + X^2 + 2X^3$ $1 + X^2$

III) $1 + X^2 = 1 + 0X + 1X^2 + 0X^3$

Coordenadas: $1, 0, 1, 0$ $1, 0, 1, 0$ $1, 0, 1, 2$ $1, 0, 1, 0$

IV)

Ejercicio 2.12.2.

$$f(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$$

base $1, X, X^2, X^3$

I) $1, X, X^2, X^3$

II) $1 + X^2$ $1 + X^2$ $1 + X^2 + 2X^3$ $1 + X^2$

III) $1 + X^2 = 1 + 0X + 1X^2 + 0X^3$

Coordenadas: $1, 0, 1, 0$ $1, 0, 1, 0$ $1, 0, 1, 2$ $1, 0, 1, 0$

IV)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.12.2.

Ejercicio 2.12.2.

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

Ejercicio 2.12.2.

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

Ejercicio 2.12.2.

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \longmapsto$$

Ejercicio 2.12.2.

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \longmapsto (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2 + 2a_2X^3$$

Ejercicio 2.12.2.

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \longmapsto (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2 + 2a_2X^3$$

$$h_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

Ejercicio 2.12.2.

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \longmapsto (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2 + 2a_2X^3$$

$$h_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.12.2.

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \longmapsto (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2 + 2a_2X^3$$

$$h_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto$$

Ejercicio 2.12.2.

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \longmapsto (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2 + 2a_2X^3$$

$$h_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.12.2.

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \longmapsto (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X^2 + 2a_2X^3$$

$$h_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.14.

Ejercicio 2.14.

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{h_B} \mathbb{R}^2$$

Ejercicio 2.14.

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{h_B} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h_A} \mathbb{R}^2$$

Ejercicio 2.14.

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{h_B} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h_A} \mathbb{R}^4$$

Ejercicio 2.14.

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{h_B} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h_A} \mathbb{R}^4$$

e_1

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & & & \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 & & \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & & \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & & & & \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & & \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & Ae_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & Ae_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_1 + e_3 \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & Ae_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & Ae_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$\dim \ker h_A =$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2 = 0$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & AB e_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2 = 0 \quad \implies$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & AB e_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2 = 0 \quad \implies \quad h_A \text{ inyectiva}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & AB e_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2 = 0 \implies h_A \text{ inyectiva}$$
$$\implies$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2 = 0 \implies h_A \text{ inyectiva}$$

\implies cada vector tiene a lo sumo una preimagen

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & -v_1 & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2 = 0 \implies h_A \text{ inyectiva}$$
$$\implies \text{cada vector tiene a lo sumo una preimagen}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & -v_1 & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & -v_2 & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2 = 0 \implies h_A \text{ inyectiva}$$
$$\implies \text{cada vector tiene a lo sumo una preimagen}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & -v_1 & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & -v_2 & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2 = 0 \implies h_A \text{ inyectiva}$$
$$\implies \text{cada vector tiene a lo sumo una preimagen}$$

$(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$ familia libre

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & -v_1 & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & -v_2 & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2 = 0 \implies h_A \text{ inyectiva}$$
$$\implies \text{cada vector tiene a lo sumo una preimagen}$$

$$(e_1 - e_3, e_2 - e_4) \text{ familia libre} \implies$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & -v_1 & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & -v_2 & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2 = 0 \implies h_A \text{ inyectiva}$$

\implies cada vector tiene a lo sumo una preimagen

$$(e_1 - e_3, e_2 - e_4) \text{ familia libre} \implies (v_1, v_2) \text{ familia libre}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & -v_1 & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & -v_2 & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2 = 0 \implies h_A \text{ inyectiva}$$

\implies cada vector tiene a lo sumo una preimagen

$$(e_1 - e_3, e_2 - e_4) \text{ familia libre} \implies (v_1, v_2) \text{ familia libre}$$

\implies

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 \\ e_1 & \longmapsto & Be_1 = v_1 & \longmapsto & ABe_1 = e_1 - e_3 \\ e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 \\ e_3 & \longmapsto & -v_1 & \longmapsto & -e_1 + e_3 \\ e_4 & \longmapsto & -v_2 & \longmapsto & -e_2 + e_4 \end{array}$$

$\dim \ker h_A = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{im} h_A = 2 - 2 = 0 \implies h_A$ inyectiva
 \implies cada vector tiene a lo sumo una preimagen

$(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$ familia libre $\implies (v_1, v_2)$ familia libre
 $\implies (v_1, v_2)$ base de \mathbb{R}^2

Ejercicio 2.14.

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{h_A} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{h_B} \mathbb{R}^2$$

Ejercicio 2.14.

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{h_A} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{h_B} \mathbb{R}^2$$

v_1

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & & & \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & & \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & & & & \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & & \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 \end{array}$$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 \end{array}$$

l)

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 \end{array}$$

l) w_1, w_2

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 \end{array}$$

I) w_1, w_2

II)

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 \end{array}$$

$$\lambda v_1 + \mu v_2$$

- I) w_1, w_2
- II)

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 \\ \lambda v_1 + \mu v_2 & \longmapsto & \dots & \longmapsto & \end{array}$$

I) w_1, w_2

II)

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 \\ \lambda v_1 + \mu v_2 & \longmapsto & \dots & \longmapsto & 2(\lambda v_1 + \mu v_2) \end{array}$$

I) w_1, w_2

II)

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 \\ \lambda v_1 + \mu v_2 & \longmapsto & \dots & \longmapsto & 2(\lambda v_1 + \mu v_2) \end{array}$$

- I) w_1, w_2
II) $2w_1, 2w_2$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & & \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 & & \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 & & \\ \lambda v_1 + \mu v_2 & \longmapsto & \dots & \longmapsto & 2(\lambda v_1 + \mu v_2) & & \end{array}$$

I) w_1, w_2

II) $2w_1, 2w_2$

III)

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 & & \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 & & \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 & & \\ \lambda v_1 + \mu v_2 & \longmapsto & \dots & \longmapsto & 2(\lambda v_1 + \mu v_2) & & \end{array}$$

I) w_1, w_2

II) $2w_1, 2w_2$

III) $2w_1 = 2w_1 + 0w_2$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 \\ \lambda v_1 + \mu v_2 & \longmapsto & \dots & \longmapsto & 2(\lambda v_1 + \mu v_2) \end{array}$$

I) w_1, w_2

II) $2w_1, 2w_2$

III) $2w_1 = 2w_1 + 0w_2 \quad 2w_2 = 0w_1 + 2w_2$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 \\ \lambda v_1 + \mu v_2 & \longmapsto & \dots & \longmapsto & 2(\lambda v_1 + \mu v_2) \end{array}$$

I) w_1, w_2

II) $2w_1, 2w_2$

III) $2w_1 = 2w_1 + 0w_2 \quad 2w_2 = 0w_1 + 2w_2$

IV)

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 \\ \lambda v_1 + \mu v_2 & \longmapsto & \dots & \longmapsto & 2(\lambda v_1 + \mu v_2) \end{array}$$

I) w_1, w_2

II) $2w_1, 2w_2$

III) $2w_1 = 2w_1 + 0w_2 \quad 2w_2 = 0w_1 + 2w_2$

IV) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.14.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{R}^2 \\ v_1 & \longmapsto & e_1 - e_3 & \longmapsto & v_1 - (-v_1) = 2v_1 \\ v_2 & \longmapsto & e_2 - e_4 & \longmapsto & v_2 - (-v_2) = 2v_2 \\ \lambda v_1 + \mu v_2 & \longmapsto & \dots & \longmapsto & 2(\lambda v_1 + \mu v_2) \end{array}$$

I) w_1, w_2

II) $2w_1, 2w_2$

III) $2w_1 = 2w_1 + 0w_2 \quad 2w_2 = 0w_1 + 2w_2$

IV) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = BA$

Ejercicio 2.16.1.

Ejercicio 2.16.1.

$$L_A(B_1 + B_2) =$$

Ejercicio 2.16.1.

$$L_A(B_1 + B_2) = A(B_1 + B_2)$$

Ejercicio 2.16.1.

$$L_A(B_1 + B_2) = A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$$

Ejercicio 2.16.1.

$$L_A(B_1 + B_2) = A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = L_A(B_1) + L_A(B_2)$$

Ejercicio 2.16.1.

$$L_A(B_1 + B_2) = A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = L_A(B_1) + L_A(B_2)$$

$$L_A(\lambda B) =$$

Ejercicio 2.16.1.

$$L_A(B_1 + B_2) = A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = L_A(B_1) + L_A(B_2)$$

$$L_A(\lambda B) = A(\lambda B)$$

Ejercicio 2.16.1.

$$L_A(B_1 + B_2) = A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = L_A(B_1) + L_A(B_2)$$

$$L_A(\lambda B) = A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

Ejercicio 2.16.1.

$$L_A(B_1 + B_2) = A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = L_A(B_1) + L_A(B_2)$$

$$L_A(\lambda B) = A(\lambda B) = \lambda(AB) = \lambda L_A(B)$$

Ejercicio 2.16.2.

Ejercicio 2.16.2.

$$I \iff D$$

Ejercicio 2.16.2.

$$I \iff D$$

Si A es regular,

Ejercicio 2.16.2.

$$I \iff D$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A :

Ejercicio 2.16.2.

$$I \iff D$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \iff D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) =$$

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \Leftarrow D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB$$

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \Leftarrow D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B$$

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \Leftarrow D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) =$$

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \iff D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B$$

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \iff D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B$$

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \iff D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B$$

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \iff D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A :

 $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B$$

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \iff D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A :

 $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies$$

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \iff D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

Ejercicio 2.16.2.

$$I \iff D$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

$$I \implies D$$

Ejercicio 2.16.2.

$$I \iff D$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \iff D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

$$\boxed{I \implies D}$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\boxed{\text{no } I \iff \text{no } D}$$

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \iff D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

$$\boxed{I \implies D}$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\boxed{\text{no } I \iff \text{no } D}$$

A no es regular

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \iff D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

$$\boxed{I \implies D}$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\boxed{\text{no } I \iff \text{no } D}$$

A no es regular \iff

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \iff D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

$$\boxed{I \implies D}$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\boxed{\text{no } I \iff \text{no } D}$$

A no es regular $\iff h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es biyectiva

Ejercicio 2.16.2.

$$I \iff D$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

A no es regular $\iff h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es biyectiva \iff

Ejercicio 2.16.2.

$$I \iff D$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

A no es regular $\iff h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es biyectiva \iff

$h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es inyectiva

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \iff D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

$$\boxed{I \implies D}$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\boxed{\text{no } I \iff \text{no } D}$$

A no es regular $\iff h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es biyectiva \iff

$h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es inyectiva \iff

Ejercicio 2.16.2.

$$I \iff D$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

A no es regular $\iff h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es biyectiva \iff

$h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es inyectiva \iff existe $\bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n$

Ejercicio 2.16.2.

$$I \iff D$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

$$I \implies D$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{no } I \iff \text{no } D$$

A no es regular $\iff h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es biyectiva \iff

$h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es inyectiva \iff existe $\bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n$ tal que $AX = \bar{0}$

Ejercicio 2.16.2.

I \iff D

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

I \implies D

Probaremos el contrarrecíproco:

no I \iff no D

A no es regular $\iff h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es biyectiva \iff

$h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es inyectiva \iff existe $\bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n$ tal que $AX = \bar{0}$

Ahora construimos la matriz por columnas $B = (X|X|\dots|X)$

Ejercicio 2.16.2.

$$\boxed{I \iff D}$$

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

$$\boxed{I \implies D}$$

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\boxed{\text{no } I \iff \text{no } D}$$

A no es regular $\iff h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es biyectiva \iff

$h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es inyectiva \iff existe $\bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n$ tal que $AX = \bar{0}$

Ahora construimos la matriz por columnas $B = (X|X|\dots|X)$

$$L_A(B) =$$

Ejercicio 2.16.2.

I \iff D

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

I \implies D

Probaremos el contrarrecíproco:

no I \iff no D

A no es regular $\iff h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es biyectiva \iff

$h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es inyectiva \iff existe $\bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n$ tal que $AX = \bar{0}$

Ahora construimos la matriz por columnas $B = (X|X|\dots|X)$

$$L_A(B) = A \cdot B$$

Ejercicio 2.16.2.

I \iff D

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

I \implies D

Probaremos el contrarrecíproco:

no I \iff no D

A no es regular $\iff h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es biyectiva \iff

$h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es inyectiva \iff existe $\bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n$ tal que $AX = \bar{0}$

Ahora construimos la matriz por columnas $B = (X|X|\dots|X)$

$$L_A(B) = A \cdot B = A \cdot (X|X|\dots|X)$$

Ejercicio 2.16.2.

I \iff D

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

I \implies D

Probaremos el contrarrecíproco:

no I \iff no D

A no es regular $\iff h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es biyectiva \iff

$h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es inyectiva \iff existe $\bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n$ tal que $AX = \bar{0}$

Ahora construimos la matriz por columnas $B = (X|X|\dots|X)$

$$L_A(B) = A \cdot B = A \cdot (X|X|\dots|X) = (A \cdot X|A \cdot X|\dots|A \cdot X)$$

Ejercicio 2.16.2.

I \iff D

Si A es regular, podemos construir la aplicación inversa de L_A : $L_{A^{-1}}$

$$L_{A^{-1}}(L_A(B)) = A^{-1}AB = B \quad \implies \quad L_A \text{ es inyectiva}$$

$$L_A(L_{A^{-1}}(B)) = AA^{-1}B = B \quad \implies \quad L_A \text{ es suprayectiva}$$

I \implies D

Probaremos el contrarrecíproco:

no I \iff no D

A no es regular $\iff h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es biyectiva \iff

$h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ no es inyectiva \iff existe $\bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n$ tal que $AX = \bar{0}$

Ahora construimos la matriz por columnas $B = (X|X|\dots|X)$

$L_A(B) = A \cdot B = A \cdot (X|X|\dots|X) = (A \cdot X|A \cdot X|\dots|A \cdot X) =$ matriz nula

Ejercicio 2.16.3.

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

l)

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II)

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II)

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

III)

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

III) Coordenadas:

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{III)} \quad \text{Coordenadas:} \quad a, c, 0, 0$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{III)} \quad \text{Coordenadas:} \quad a, c, 0, 0 \quad b, d, 0, 0$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{III)} \quad \text{Coordenadas:} \quad a, c, 0, 0 \quad b, d, 0, 0 \quad 0, 0, a, c$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{III)} \quad \text{Coordenadas:} \quad a, c, 0, 0 \quad b, d, 0, 0 \quad 0, 0, a, c \quad 0, 0, b, d$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{III)} \quad \text{Coordenadas:} \quad a, c, 0, 0 \quad b, d, 0, 0 \quad 0, 0, a, c \quad 0, 0, b, d$$

IV)

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{III)} \quad \text{Coordenadas:} \quad a, c, 0, 0 \quad b, d, 0, 0 \quad 0, 0, a, c \quad 0, 0, b, d$$

$$\text{IV)} \quad \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right)$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{III)} \quad \text{Coordenadas:} \quad a, c, 0, 0 \quad b, d, 0, 0 \quad 0, 0, a, c \quad 0, 0, b, d$$

$$\text{IV)} \quad \begin{pmatrix} a \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{III)} \quad \text{Coordenadas:} \quad a, c, 0, 0 \quad b, d, 0, 0 \quad 0, 0, a, c \quad 0, 0, b, d$$

$$\text{IV)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{III)} \quad \text{Coordenadas:} \quad a, c, 0, 0 \quad b, d, 0, 0 \quad 0, 0, a, c \quad 0, 0, b, d$$

$$\text{IV)} \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{III)} \quad \text{Coordenadas:} \quad a, c, 0, 0 \quad b, d, 0, 0 \quad 0, 0, a, c \quad 0, 0, b, d$$

$$\text{IV)} \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.16.3.

La matriz que buscamos es de tamaño 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{I)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II)} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{III)} \quad \text{Coordenadas:} \quad a, c, 0, 0 \quad b, d, 0, 0 \quad 0, 0, a, c \quad 0, 0, b, d$$

$$\text{IV)} \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} A & 0 \\ 0 & A \end{array} \right)$$

Ejercicio 2.21.1.

Ejercicio 2.21.1.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1$$

Ejercicio 2.21.1.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \quad \Rightarrow$$

Ejercicio 2.21.1.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \quad \Rightarrow \quad \text{las coord. de } v'_1$$

Ejercicio 2.21.1.

$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow$ las coord. de v'_1 respecto de \mathcal{B}

Ejercicio 2.21.1.

$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow$ las coord. de v'_1 respecto de \mathcal{B} son 3, 3, 1

Ejercicio 2.21.1.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_1 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 3, 3, 1$$

$$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow$$

Ejercicio 2.21.1.

$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow$ las coord. de v'_1 respecto de \mathcal{B} son 3, 3, 1

$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow$ las coord. de v'_2 respecto de \mathcal{B}

Ejercicio 2.21.1.

$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow$ las coord. de v'_1 respecto de \mathcal{B} son 3, 3, 1

$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow$ las coord. de v'_2 respecto de \mathcal{B} son -1, 0, 1

Ejercicio 2.21.1.

$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow$ las coord. de v'_1 respecto de \mathcal{B} son 3, 3, 1

$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow$ las coord. de v'_2 respecto de \mathcal{B} son -1, 0, 1

$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow$

Ejercicio 2.21.1.

$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow$ las coord. de v'_1 respecto de \mathcal{B} son 3, 3, 1

$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow$ las coord. de v'_2 respecto de \mathcal{B} son -1, 0, 1

$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow$ las coord. de v'_3 respecto de \mathcal{B}

Ejercicio 2.21.1.

$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow$ las coord. de v'_1 respecto de \mathcal{B} son 3, 3, 1

$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow$ las coord. de v'_2 respecto de \mathcal{B} son -1, 0, 1

$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow$ las coord. de v'_3 respecto de \mathcal{B} son 1, 1, 0

Ejercicio 2.21.1.

$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow$ las coord. de v'_1 respecto de \mathcal{B} son 3, 3, 1

$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow$ las coord. de v'_2 respecto de \mathcal{B} son -1, 0, 1

$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow$ las coord. de v'_3 respecto de \mathcal{B} son 1, 1, 0

La matriz de cambio de bases de a es:

Ejercicio 2.21.1.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_1 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 3, 3, 1$$

$$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_2 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } -1, 0, 1$$

$$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_3 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 1, 1, 0$$

La matriz de cambio de bases de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es:

Ejercicio 2.21.1.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_1 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 3, 3, 1$$

$$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_2 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } -1, 0, 1$$

$$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_3 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 1, 1, 0$$

La matriz de cambio de bases de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es: $P = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.21.1.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_1 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 3, 3, 1$$

$$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_2 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } -1, 0, 1$$

$$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_3 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 1, 1, 0$$

La matriz de cambio de bases de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es: $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.21.1.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_1 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 3, 3, 1$$

$$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_2 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } -1, 0, 1$$

$$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_3 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 1, 1, 0$$

La matriz de cambio de bases de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es:
$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.21.1.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_1 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 3, 3, 1$$

$$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_2 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } -1, 0, 1$$

$$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_3 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 1, 1, 0$$

La matriz de cambio de bases de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es:
$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.21.1.

$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow$ las coord. de v'_1 respecto de \mathcal{B} son 3, 3, 1

$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow$ las coord. de v'_2 respecto de \mathcal{B} son -1, 0, 1

$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow$ las coord. de v'_3 respecto de \mathcal{B} son 1, 1, 0

La matriz de cambio de bases de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es:
$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos dan $X' = (1, 2, 3)^T$,

Ejercicio 2.21.1.

$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow$ las coord. de v'_1 respecto de \mathcal{B} son 3, 3, 1

$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow$ las coord. de v'_2 respecto de \mathcal{B} son -1, 0, 1

$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow$ las coord. de v'_3 respecto de \mathcal{B} son 1, 1, 0

La matriz de cambio de bases de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es:
$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos dan $X' = (1, 2, 3)^T$, y nos piden hallar X .

Ejercicio 2.21.1.

$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow$ las coord. de v'_1 respecto de \mathcal{B} son 3, 3, 1

$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow$ las coord. de v'_2 respecto de \mathcal{B} son -1, 0, 1

$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow$ las coord. de v'_3 respecto de \mathcal{B} son 1, 1, 0

La matriz de cambio de bases de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es: $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Nos dan $X' = (1, 2, 3)^T$, y nos piden hallar X .

$$X = PX'$$

Ejercicio 2.21.1.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_1 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 3, 3, 1$$

$$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_2 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } -1, 0, 1$$

$$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_3 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 1, 1, 0$$

La matriz de cambio de bases de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es:
$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos dan $X' = (1, 2, 3)^T$, y nos piden hallar X .

$$X = PX' \quad \Longrightarrow$$

Ejercicio 2.21.1.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \quad \Rightarrow \quad \text{las coord. de } v'_1 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 3, 3, 1$$

$$-v_1 + v_3 = v'_2 \quad \Rightarrow \quad \text{las coord. de } v'_2 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } -1, 0, 1$$

$$v_1 + v_2 = v'_3 \quad \Rightarrow \quad \text{las coord. de } v'_3 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 1, 1, 0$$

La matriz de cambio de bases de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es:
$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos dan $X' = (1, 2, 3)^T$, y nos piden hallar X .

$$X = PX' \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.21.1.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_1 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 3, 3, 1$$

$$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_2 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } -1, 0, 1$$

$$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_3 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 1, 1, 0$$

La matriz de cambio de bases de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es: $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Nos dan $X' = (1, 2, 3)^T$, y nos piden hallar X .

$$X = PX' \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.21.1.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_1 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 3, 3, 1$$

$$-v_1 + v_3 = v'_2 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_2 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } -1, 0, 1$$

$$v_1 + v_2 = v'_3 \Rightarrow \text{las coord. de } v'_3 \text{ respecto de } \mathcal{B} \text{ son } 1, 1, 0$$

La matriz de cambio de bases de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es: $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Nos dan $X' = (1, 2, 3)^T$, y nos piden hallar X .

$$X = PX' \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.21.1.

\mathcal{B}' es base de V porque

Ejercicio 2.21.1.

\mathcal{B}' es base de V porque la matriz P es

Ejercicio 2.21.1.

\mathcal{B}' es base de V porque la matriz P es **regular**.

Ejercicio 2.21.1.

\mathcal{B}' es base de V porque la matriz P es **regular**.

$$3v_1 + 3v_2 + v_3 = v'_1$$

$$-v_1 + v_3 = v'_2$$

$$-v_1 + v_3 = v'_3$$

Ejercicio 2.21.1.

\mathcal{B}' es base de V porque la matriz P es **regular**.

$$\begin{aligned} 3v_1 + 3v_2 + v_3 &= v'_1 \\ -v_1 + v_3 &= v'_2 \\ -v_1 + v_3 &= v'_3 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad P =$$

Ejercicio 2.21.1.

\mathcal{B}' es base de V porque la matriz P es **regular**.

$$\begin{aligned} 3v_1 + 3v_2 + v_3 &= v'_1 \\ -v_1 + v_3 &= v'_2 \\ -v_1 + v_3 &= v'_3 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.24.1.

Ejercicio 2.24.1.

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

¿Qué condiciones deben cumplir sus entradas a_{ij} para que A esté en Z ?

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

¿Qué condiciones deben cumplir sus entradas a_{ij} para que A esté en Z ?

Sea B la matriz elemental correspondiente a multiplicar la fila 1 por 2.

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

¿Qué condiciones deben cumplir sus entradas a_{ij} para que A esté en Z ?

Sea B la matriz elemental correspondiente a multiplicar la fila 1 por 2.

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

¿Qué condiciones deben cumplir sus entradas a_{ij} para que A esté en Z ?

Sea B la matriz elemental correspondiente a multiplicar la fila 1 por 2.

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

¿Qué condiciones deben cumplir sus entradas a_{ij} para que A esté en Z ?

Sea B la matriz elemental correspondiente a multiplicar la fila 1 por 2.

$$BA =$$

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

¿Qué condiciones deben cumplir sus entradas a_{ij} para que A esté en Z ?

Sea B la matriz elemental correspondiente a multiplicar la fila 1 por 2.

$$BA = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

¿Qué condiciones deben cumplir sus entradas a_{ij} para que A esté en Z ?

Sea B la matriz elemental correspondiente a multiplicar la fila 1 por 2.

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

¿Qué condiciones deben cumplir sus entradas a_{ij} para que A esté en Z ?

Sea B la matriz elemental correspondiente a multiplicar la fila 1 por 2.

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = AB = BA = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

¿Qué condiciones deben cumplir sus entradas a_{ij} para que A esté en Z ?

Sea B la matriz elemental correspondiente a multiplicar la fila 1 por 2.

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = AB = BA = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Luego $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0$.

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

¿Qué condiciones deben cumplir sus entradas a_{ij} para que A esté en Z ?

Sea B la matriz elemental correspondiente a multiplicar la fila 1 por 2.

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = AB = BA = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Luego $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0$.

Repitiendo este argumento

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

¿Qué condiciones deben cumplir sus entradas a_{ij} para que A esté en Z ?

Sea B la matriz elemental correspondiente a multiplicar la fila 1 por 2.

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = AB = BA = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Luego $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0$.

Repitiendo este argumento con las demás matrices elementales que multiplican una fila por 2,

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 cualquiera.

¿Qué condiciones deben cumplir sus entradas a_{ij} para que A esté en Z ?

Sea B la matriz elemental correspondiente a multiplicar la fila 1 por 2.

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = AB = BA = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Luego $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0$.

Repitiendo este argumento con las demás matrices elementales que multiplican una fila por 2, concluimos que la matriz A debe ser diagonal.

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Sea B' la matriz elemental correspondiente a intercambiar las filas 1 y 2.

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Sea B' la matriz elemental correspondiente a intercambiar las filas 1 y 2.

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea B' la matriz elemental correspondiente a intercambiar las filas 1 y 2.

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea B' la matriz elemental correspondiente a intercambiar las filas 1 y 2.

$$B'A =$$

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea B' la matriz elemental correspondiente a intercambiar las filas 1 y 2.

$$B'A = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea B' la matriz elemental correspondiente a intercambiar las filas 1 y 2.

$$AB' = B'A = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea B' la matriz elemental correspondiente a intercambiar las filas 1 y 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 \\ a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = AB' = B'A = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea B' la matriz elemental correspondiente a intercambiar las filas 1 y 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 \\ a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = AB' = B'A = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Luego $a_{11} = a_{22}$.

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea B' la matriz elemental correspondiente a intercambiar las filas 1 y 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 \\ a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = AB' = B'A = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Luego $a_{11} = a_{22}$.

Repitiendo este argumento con las demás matrices elementales que intercambian filas, concluimos que:

Ejercicio 2.24.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Sea B' la matriz elemental correspondiente a intercambiar las filas 1 y 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 \\ a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = AB' = B'A = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Luego $a_{11} = a_{22}$.

Repitiendo este argumento con las demás matrices elementales que intercambian filas, concluimos que:

$$A = a_{11} \cdot I_3$$

Ejercicio 2.26.1.

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes si y solo si

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

$\text{rango}(A) =$

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

$$\text{rango}(A) = 2$$

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

$$\text{rango}(A) = 2 \quad \text{rango}(B_1) =$$

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

$$\text{rango}(A) = 2 \quad \text{rango}(B_1) = 3$$

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

$$\text{rango}(A) = 2 \quad \text{rango}(B_1) = 3 \quad \text{rango}(B_2) =$$

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

$$\text{rango}(A) = 2 \quad \text{rango}(B_1) = 3 \quad \text{rango}(B_2) = 2$$

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

$$\text{rango}(A) = 2 \quad \text{rango}(B_1) = 3 \quad \text{rango}(B_2) = 2 \quad \text{rango}(B_4) =$$

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

$$\text{rango}(A) = 2 \quad \text{rango}(B_1) = 3 \quad \text{rango}(B_2) = 2 \quad \text{rango}(B_4) = 2$$

Ejercicio 2.26.1.

B_3 **no** puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

$$\text{rango}(A) = 2 \quad \text{rango}(B_1) = 3 \quad \text{rango}(B_2) = 2 \quad \text{rango}(B_4) = 2$$

Respuesta:

Ejercicio 2.26.1.

B_3 no puede ser matriz de h porque no es de tamaño 3×4 .

A, B_i son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases si y solo si son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango.

$$\text{rango}(A) = 2 \quad \text{rango}(B_1) = 3 \quad \text{rango}(B_2) = 2 \quad \text{rango}(B_4) = 2$$

Respuesta: B_2, B_4 .

Ejercicio 2.26.2.

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\ker h$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$$\boxed{\ker h} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h$$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$$\boxed{\ker h} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff$$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\ker h$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\ker h$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\ker h$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\ker h$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\ker h$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\ker h$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\ker h =$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\ker h$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\ker h = \{ (\quad , \quad , \quad)^T \mid \quad \}$$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\ker h$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\ker h = \{ (\quad , \quad , 2\mu, 2\lambda)^T \mid \quad \}$$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\ker h$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\ker h = \{ (\quad , \quad , 2\mu, 2\lambda)^T \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C} \}$$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\ker h$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\ker h = \{ (\quad, \lambda - \mu, 2\mu, 2\lambda)^T \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C} \}$$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\ker h$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\ker h = \{(-3\lambda + 3\mu, \lambda - \mu, 2\mu, 2\lambda)^T \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$$

Ejercicio 2.26.2.

Repetimos el algoritmo de la demostración del lema 2.56.

$\ker h$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker h \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \ker h &= \{(-3\lambda + 3\mu, \lambda - \mu, 2\mu, 2\lambda)^T \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\} \\ &= \text{span}\langle (3, -1, 2, 0)^T, (-3, 1, 0, 2)^T \rangle \end{aligned}$$

Ejercicio 2.26.2.

$$u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.2.

Ampliamos esta base del núcleo hasta formar una base del espacio inicial.

$$u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.2.

Ampliamos esta base del núcleo hasta formar una base del espacio inicial.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.2.

Ampliamos esta base del núcleo hasta formar una base del espacio inicial.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus imágenes:

Ejercicio 2.26.2.

Ampliamos esta base del núcleo hasta formar una base del espacio inicial.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus imágenes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.2.

Ampliamos esta base del núcleo hasta formar una base del espacio inicial.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus imágenes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.2.

Ampliamos esta base del núcleo hasta formar una base del espacio inicial.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus imágenes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.2.

Ampliamos esta base del núcleo hasta formar una base del espacio inicial.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus imágenes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.2.

Ampliamos esta base del núcleo hasta formar una base del espacio inicial.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus imágenes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y de nuevo ampliamos:

Ejercicio 2.26.2.

Ampliamos esta base del núcleo hasta formar una base del espacio inicial.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus imágenes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y de nuevo ampliamos:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.2.

Ampliamos esta base del núcleo hasta formar una base del espacio inicial.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus imágenes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y de nuevo ampliamos:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) =$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3 \qquad h(a_2) =$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) =$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) =$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2)$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4)$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \implies a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \implies a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

$$a_4 =$$

$$b_1 =$$

$$b_2 =$$

$$b_3 =$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \implies a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \implies a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

$$a_4 =$$

$$b_1 =$$

$$b_2 =$$

$$b_3 =$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1$$

$$a_2 =$$

$$a_3 = u_2$$

$$a_4 =$$

$$b_1 =$$

$$b_2 =$$

$$b_3 =$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \implies a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \implies a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \qquad a_2 = \qquad a_3 = u_2 \qquad a_4 =$$

$$b_1 = h(u_1) \qquad b_2 = \qquad b_3 =$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \implies a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \implies a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = \quad a_3 = u_2 \quad a_4 =$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1 \quad b_2 = \quad b_3 =$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \implies a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \implies a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = \quad a_3 = u_2 \quad a_4 =$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1 \quad b_2 = \quad b_3 = h(u_2)$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \implies a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \implies a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \quad a_2 =$$

$$a_3 = u_2 \quad a_4 =$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1$$

$$b_2 =$$

$$b_3 = h(u_2) = w_2$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1$$

$$a_2 = u_1 +$$

$$a_3 = u_2$$

$$a_4 =$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1$$

$$b_2 =$$

$$b_3 = h(u_2) = w_2$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1$$

$$a_2 = u_1 + u_3$$

$$a_3 = u_2$$

$$a_4 =$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1$$

$$b_2 =$$

$$b_3 = h(u_2) = w_2$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = u_1 + u_3 \quad a_3 = u_2 \quad a_4 = u_2 +$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1 \quad b_2 = \quad b_3 = h(u_2) = w_2$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = u_1 + u_3 \quad a_3 = u_2 \quad a_4 = u_2 + u_4$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1 \quad b_2 = \quad b_3 = h(u_2) = w_2$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = u_1 + u_3 \quad a_3 = u_2 \quad a_4 = u_2 + u_4$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1 \quad b_2 = w_3 \quad b_3 = h(u_2) = w_2$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = u_1 + u_3 \quad a_3 = u_2 \quad a_4 = u_2 + u_4$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1 \quad b_2 = w_3 \quad b_3 = h(u_2) = w_2$$

$$\text{span}\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle =$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = u_1 + u_3 \quad a_3 = u_2 \quad a_4 = u_2 + u_4$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1 \quad b_2 = w_3 \quad b_3 = h(u_2) = w_2$$

$$\text{span}\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle = \text{span}\langle u_1, u_1 + u_3, u_2, u_2 + u_4 \rangle$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = u_1 + u_3 \quad a_3 = u_2 \quad a_4 = u_2 + u_4$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1 \quad b_2 = w_3 \quad b_3 = h(u_2) = w_2$$

$$\begin{aligned} \text{span}\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle &= \text{span}\langle u_1, u_1 + u_3, u_2, u_2 + u_4 \rangle \\ &= \text{span}\langle u_1, u_3, u_2, u_4 \rangle \end{aligned}$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = u_1 + u_3 \quad a_3 = u_2 \quad a_4 = u_2 + u_4$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1 \quad b_2 = w_3 \quad b_3 = h(u_2) = w_2$$

$$\begin{aligned} \text{span}\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle &= \text{span}\langle u_1, u_1 + u_3, u_2, u_2 + u_4 \rangle \\ &= \text{span}\langle u_1, u_3, u_2, u_4 \rangle = \mathbb{C}^4 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = u_1 + u_3 \quad a_3 = u_2 \quad a_4 = u_2 + u_4$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1 \quad b_2 = w_3 \quad b_3 = h(u_2) = w_2$$

$$\text{span}\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle = \text{span}\langle u_1, u_1 + u_3, u_2, u_2 + u_4 \rangle$$

$$= \text{span}\langle u_1, u_3, u_2, u_4 \rangle = \mathbb{C}^4 \quad \implies$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = u_1 + u_3 \quad a_3 = u_2 \quad a_4 = u_2 + u_4$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1 \quad b_2 = w_3 \quad b_3 = h(u_2) = w_2$$

$$\text{span}\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle = \text{span}\langle u_1, u_1 + u_3, u_2, u_2 + u_4 \rangle$$

$$= \text{span}\langle u_1, u_3, u_2, u_4 \rangle = \mathbb{C}^4 \quad \implies \quad (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

Ejercicio 2.26.2.

Buscamos bases (a_1, a_2, a_3, a_4) de \mathbb{C}^4 y (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{C}^3 respecto de las cuales la matriz de h sea B_4 .

$$h(a_1) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_2) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$h(a_3) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_4) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$h(a_1) = h(a_2) \quad \implies \quad a_2 = a_1 + \text{vector del núcleo}$$

$$h(a_3) = h(a_4) \quad \implies \quad a_4 = a_3 + \text{vector del núcleo}$$

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = u_1 + u_3 \quad a_3 = u_2 \quad a_4 = u_2 + u_4$$

$$b_1 = h(u_1) = w_1 \quad b_2 = w_3 \quad b_3 = h(u_2) = w_2$$

$$\begin{aligned} \text{span}\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle &= \text{span}\langle u_1, u_1 + u_3, u_2, u_2 + u_4 \rangle \\ &= \text{span}\langle u_1, u_3, u_2, u_4 \rangle = \mathbb{C}^4 \quad \implies \quad (a_1, a_2, a_3, a_4) \text{ es base} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.26.3.

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

Ejercicio 2.26.3.

$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la relación entre A, B_2, P, Q .

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la relación entre A, B_2, P, Q .

Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Sean Y las coordenadas de $h(v)$ en la base canónica.

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Sean Y las coordenadas de $h(v)$ en la base canónica.

Sean Y' las coordenadas de $h(v)$ en la base (w_1, w_2, w_3) .

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Sean Y las coordenadas de $h(v)$ en la base canónica.

Sean Y' las coordenadas de $h(v)$ en la base (w_1, w_2, w_3) .

$$Y = AX$$

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Sean Y las coordenadas de $h(v)$ en la base canónica.

Sean Y' las coordenadas de $h(v)$ en la base (w_1, w_2, w_3) .

$$Y = AX \quad Y' = B_2X'$$

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Sean Y las coordenadas de $h(v)$ en la base canónica.

Sean Y' las coordenadas de $h(v)$ en la base (w_1, w_2, w_3) .

$$Y = AX \quad Y' = B_2X' \quad X = PX'$$

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Sean Y las coordenadas de $h(v)$ en la base canónica.

Sean Y' las coordenadas de $h(v)$ en la base (w_1, w_2, w_3) .

$$Y = AX \quad Y' = B_2X' \quad X = PX' \quad Y = QY'$$

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Sean Y las coordenadas de $h(v)$ en la base canónica.

Sean Y' las coordenadas de $h(v)$ en la base (w_1, w_2, w_3) .

$$Y = AX \quad Y' = B_2 X' \quad X = P X' \quad Y = Q Y'$$

$$Y = AX$$

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Sean Y las coordenadas de $h(v)$ en la base canónica.

Sean Y' las coordenadas de $h(v)$ en la base (w_1, w_2, w_3) .

$$Y = AX \quad Y' = B_2X' \quad X = PX' \quad Y = QY'$$

$$Y = AX = APX'$$

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Sean Y las coordenadas de $h(v)$ en la base canónica.

Sean Y' las coordenadas de $h(v)$ en la base (w_1, w_2, w_3) .

$$Y = AX \quad Y' = B_2X' \quad X = PX' \quad Y = QY'$$

$$QY' = Y = AX = APX'$$

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Sean Y las coordenadas de $h(v)$ en la base canónica.

Sean Y' las coordenadas de $h(v)$ en la base (w_1, w_2, w_3) .

$$Y = AX \quad Y' = B_2X' \quad X = PX' \quad Y = QY'$$

$$QB_2X' = QY' = Y = AX = APX'$$

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Sean Y las coordenadas de $h(v)$ en la base canónica.

Sean Y' las coordenadas de $h(v)$ en la base (w_1, w_2, w_3) .

$$Y = AX \quad Y' = B_2X' \quad X = PX' \quad Y = QY'$$

$$QB_2X' = QY' = Y = AX = APX' \quad \implies$$

Ejercicio 2.26.3.

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \xrightarrow{P} \text{canónica}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) \xrightarrow{Q} \text{canónica}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la relación entre A, B_2, P, Q . Fijamos un vector $v \in \mathbb{C}^4$.

Sean X las coordenadas de v en la base canónica.

Sean X' las coordenadas de v en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Sean Y las coordenadas de $h(v)$ en la base canónica.

Sean Y' las coordenadas de $h(v)$ en la base (w_1, w_2, w_3) .

$$Y = AX \quad Y' = B_2X' \quad X = PX' \quad Y = QY'$$

$$QB_2X' = QY' = Y = AX = APX' \quad \implies \quad \boxed{Q^{-1}AP = B_2}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{Q^{-1}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}^A \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^P = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{B_2}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{Q^{-1}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}^A \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^P = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{B_2}$$

```
P = matrix([ [1,0,3,-3], [0,1,-1,1], [0,0,2,0], [0,0,0,2] ]); show(P)
Q = matrix([ [1,3,0], [0,2,1], [0,-2,0] ]); show(Q)
A = matrix([ [1,3,0,0], [0,2,1,-1], [0,-2,-1,1] ]); show(A)
R = Q.inverse(); show(R)
show( R*A*P )
```

Ejercicio 2.26.3.

Ejercicio 2.26.3.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)}^{3 \times 4}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\overbrace{\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right)}^{2 \times 3} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)}^{3 \times 4}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\overbrace{\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right)}^{2 \times 3} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)}^{3 \times 4} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{c} \\ \hline \end{array} \right)}^{4 \times 2}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)}^{2 \times 3} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)}^{3 \times 4} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{c} \\ \\ \hline \end{array} \right)}^{4 \times 2}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)}^{2 \times 3} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)}^{3 \times 4} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)}^{4 \times 2}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}}^{2 \times 3} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{3 \times 4} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{4 \times 2} =$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{4 \times 2}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{aligned} & \overbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)}^{2 \times 3} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)}^{3 \times 4} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)}^{4 \times 2} = \\ & = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right)}_{2 \times 4} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)}_{4 \times 2} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{aligned} & \overbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)}^{2 \times 3} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)}^{3 \times 4} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)}^{4 \times 2} = \\ & = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} \right)}_{2 \times 4} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)}_{4 \times 2} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{aligned} & \overbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)}^{2 \times 3} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)}^{3 \times 4} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)}^{4 \times 2} = \\ & = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)}_{2 \times 4} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)}_{4 \times 2} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{aligned} & \overbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)}^{2 \times 3} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)}^{3 \times 4} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)}^{4 \times 2} = \\ & = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)}_{2 \times 4} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)}_{4 \times 2} = \underbrace{\left(\quad \quad \right)}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{aligned} & \overbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)}^{2 \times 3} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)}^{3 \times 4} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)}^{4 \times 2} = \\ & = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)}_{2 \times 4} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)}_{4 \times 2} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{cases} Q^{-1}AP = B_2 \\ D_1 B_2 D_2 = I_2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{cases} Q^{-1}AP = B_2 \\ D_1 B_2 D_2 = I_2 \end{cases} \implies$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{cases} Q^{-1}AP = B_2 \\ D_1 B_2 D_2 = I_2 \end{cases} \implies D_1 Q^{-1}AP D_2 = I_2$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{cases} Q^{-1}AP = B_2 \\ D_1 B_2 D_2 = I_2 \end{cases} \implies D_1 Q^{-1} A P D_2 = I_2$$

$$C_1 = D_1 Q^{-1}$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{cases} Q^{-1}AP = B_2 \\ D_1B_2D_2 = I_2 \end{cases} \implies D_1Q^{-1}APD_2 = I_2$$

$$C_1 = D_1Q^{-1}$$

$$C_2 = PD_2$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{cases} Q^{-1}AP = B_2 \\ D_1B_2D_2 = I_2 \end{cases} \implies D_1Q^{-1}APD_2 = I_2$$

$$C_1 = D_1Q^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$C_2 = PD_2$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{cases} Q^{-1}AP = B_2 \\ D_1B_2D_2 = I_2 \end{cases} \implies D_1Q^{-1}APD_2 = I_2$$

$$C_1 = D_1Q^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{array} \right)$$

$$C_2 = PD_2$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{cases} Q^{-1}AP = B_2 \\ D_1B_2D_2 = I_2 \end{cases} \implies D_1Q^{-1}APD_2 = I_2$$

$$C_1 = D_1Q^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{array} \right)$$

$$C_2 = PD_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejercicio 2.26.3.

$$\begin{cases} Q^{-1}AP = B_2 \\ D_1B_2D_2 = I_2 \end{cases} \implies D_1Q^{-1}APD_2 = I_2$$

$$C_1 = D_1Q^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{array} \right)$$

$$C_2 = PD_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejercicio 2.31.1.

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3.

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^r \xrightarrow{h_{B_2}} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^r \xrightarrow{h_{B_2}} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \xrightarrow{h_{B_1}} \mathbb{F}^r$$

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^r \xrightarrow{h_{B_2}} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \xrightarrow{h_{B_1}} \mathbb{F}^r$$

Recordamos que:

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^r \xrightarrow{h_{B_2}} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \xrightarrow{h_{B_1}} \mathbb{F}^r$$

Recordamos que:

$$h_{B_1 A B_2} =$$

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^r \xrightarrow{h_{B_2}} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \xrightarrow{h_{B_1}} \mathbb{F}^r$$

Recordamos que:

$$h_{B_1 A B_2} = h_{B_1} \circ h_A \circ h_{B_2}$$

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^r \xrightarrow{h_{B_2}} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \xrightarrow{h_{B_1}} \mathbb{F}^r$$

Recordamos que:

$$h_{B_1 A B_2} = h_{B_1} \circ h_A \circ h_{B_2} \quad h_{I_r} =$$

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^r \xrightarrow{h_{B_2}} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \xrightarrow{h_{B_1}} \mathbb{F}^r$$

Recordamos que:

$$h_{B_1 A B_2} = h_{B_1} \circ h_A \circ h_{B_2} \qquad h_{I_r} = \text{id}_{\mathbb{F}^r}$$

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^r \xrightarrow{h_{B_2}} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \xrightarrow{h_{B_1}} \mathbb{F}^r$$

Recordamos que:

$$h_{B_1 A B_2} = h_{B_1} \circ h_A \circ h_{B_2} \qquad h_{I_r} = \text{id}_{\mathbb{F}^r}$$

Así que el problema se **reduce** a

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^r \xrightarrow{h_{B_2}} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \xrightarrow{h_{B_1}} \mathbb{F}^r$$

Recordamos que:

$$h_{B_1 A B_2} = h_{B_1} \circ h_A \circ h_{B_2} \qquad h_{I_r} = \text{id}_{\mathbb{F}^r}$$

Así que el problema se **reduce** a construir dos aplicaciones lineales h_{B_1}, h_{B_2} tales que:

Ejercicio 2.31.1.

Ya dimos una solución en el ejercicio 2.26.3. Vamos a dar otra solución.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^r \xrightarrow{h_{B_2}} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \xrightarrow{h_{B_1}} \mathbb{F}^r$$

Recordamos que:

$$h_{B_1 A B_2} = h_{B_1} \circ h_A \circ h_{B_2} \qquad h_{I_r} = \text{id}_{\mathbb{F}^r}$$

Así que el problema se **reduce** a construir dos aplicaciones lineales h_{B_1}, h_{B_2} tales que:

$$h_{B_1} \circ h_A \circ h_{B_2} = \text{id}_{\mathbb{F}^r}$$

Ejercicio 2.31.1.

$$\mathbb{F}^r \quad \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \quad \mathbb{F}^r$$

Ejercicio 2.31.1.

$$\mathbb{F}^r \qquad \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \qquad \mathbb{F}^r$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$,

Ejercicio 2.31.1.

$$\mathbb{F}^r \qquad \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \qquad \mathbb{F}^r$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Ejercicio 2.31.1.

$$\mathbb{F}^r \qquad \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m \qquad \mathbb{F}^r$$
$$w_1$$
$$\vdots$$
$$w_r$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^r & & \mathbb{F}^m \\ & & \downarrow \\ & & w_1 \\ & & \vdots \\ & & w_r \end{array}$$

$\mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^r & & \mathbb{F}^m \\ & & \uparrow \\ & & \mathbb{F}^n \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{F}^r \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{h_A} \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} v_1 & \longmapsto & w_1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_r & \longmapsto & w_r \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^r & & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & & \mathbb{F}^r \\ & & v_1 & \longmapsto & w_1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & v_r & \longmapsto & w_r & & \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica),

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^r & & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & & \mathbb{F}^r \\ & & v_1 & \longmapsto & w_1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & v_r & \longmapsto & w_r & & \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2}

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^r & & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & & \mathbb{F}^r \\ & & v_1 & \longmapsto & w_1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & v_r & \longmapsto & w_r & & \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2} tal que $h_{B_2}(e_i) = v_i$.

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^r & \xrightarrow{h_{B_2}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & & \mathbb{F}^r \\ & & v_1 & \longmapsto & w_1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & v_r & \longmapsto & w_r & & \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2} tal que $h_{B_2}(e_i) = v_i$.

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^r & \xrightarrow{h_{B_2}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & & \mathbb{F}^r \\ e_1 & \longmapsto & v_1 & \longmapsto & w_1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ e_r & \longmapsto & v_r & \longmapsto & w_r & & \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2} tal que $h_{B_2}(e_i) = v_i$.

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^r & \xrightarrow{h_{B_2}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & & \mathbb{F}^r \\ e_1 & \longmapsto & v_1 & \longmapsto & w_1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ e_r & \longmapsto & v_r & \longmapsto & w_r & & \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2} tal que $h_{B_2}(e_i) = v_i$.

Como w_1, \dots, w_r es familia libre,

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^r & \xrightarrow{h_{B_2}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & & \mathbb{F}^r \\ e_1 & \longmapsto & v_1 & \longmapsto & w_1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ e_r & \longmapsto & v_r & \longmapsto & w_r & & \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2} tal que $h_{B_2}(e_i) = v_i$.

Como w_1, \dots, w_r es familia libre, existe una aplicación lineal h_{B_1}

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^r & \xrightarrow{h_{B_2}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & & \mathbb{F}^r \\ e_1 & \longmapsto & v_1 & \longmapsto & w_1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ e_r & \longmapsto & v_r & \longmapsto & w_r & & \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2} tal que $h_{B_2}(e_i) = v_i$.

Como w_1, \dots, w_r es familia libre, existe una aplicación lineal h_{B_1} tal que $h_{B_1}(w_i) = e_i$.

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^r & \xrightarrow{h_{B_2}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & \xrightarrow{h_{B_1}} & \mathbb{F}^r \\ e_1 & \longmapsto & v_1 & \longmapsto & w_1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ e_r & \longmapsto & v_r & \longmapsto & w_r & & \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2} tal que $h_{B_2}(e_i) = v_i$.

Como w_1, \dots, w_r es familia libre, existe una aplicación lineal h_{B_1} tal que $h_{B_1}(w_i) = e_i$.

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^r & \xrightarrow{h_{B_2}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & \xrightarrow{h_{B_1}} & \mathbb{F}^r \\ e_1 & \longmapsto & v_1 & \longmapsto & w_1 & \longmapsto & e_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_r & \longmapsto & v_r & \longmapsto & w_r & \longmapsto & e_r \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2} tal que $h_{B_2}(e_i) = v_i$.

Como w_1, \dots, w_r es familia libre, existe una aplicación lineal h_{B_1} tal que $h_{B_1}(w_i) = e_i$.

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^r & \xrightarrow{h_{B_2}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & \xrightarrow{h_{B_1}} & \mathbb{F}^r \\ e_1 & \longmapsto & v_1 & \longmapsto & w_1 & \longmapsto & e_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_r & \longmapsto & v_r & \longmapsto & w_r & \longmapsto & e_r \end{array}$$

$$\sum \lambda_i e_i$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2} tal que $h_{B_2}(e_i) = v_i$.

Como w_1, \dots, w_r es familia libre, existe una aplicación lineal h_{B_1} tal que $h_{B_1}(w_i) = e_i$.

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^r & \xrightarrow{h_{B_2}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & \xrightarrow{h_{B_1}} & \mathbb{F}^r \\ e_1 & \longmapsto & v_1 & \longmapsto & w_1 & \longmapsto & e_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_r & \longmapsto & v_r & \longmapsto & w_r & \longmapsto & e_r \\ \sum \lambda_i e_i & \longmapsto & \sum \lambda_i v_i & & & & \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2} tal que $h_{B_2}(e_i) = v_i$.

Como w_1, \dots, w_r es familia libre, existe una aplicación lineal h_{B_1} tal que $h_{B_1}(w_i) = e_i$.

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^r & \xrightarrow{h_{B_2}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & \xrightarrow{h_{B_1}} & \mathbb{F}^r \\ e_1 & \longmapsto & v_1 & \longmapsto & w_1 & \longmapsto & e_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_r & \longmapsto & v_r & \longmapsto & w_r & \longmapsto & e_r \\ \sum \lambda_i e_i & \longmapsto & \sum \lambda_i v_i & \longmapsto & \sum \lambda_i w_i & & \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2} tal que $h_{B_2}(e_i) = v_i$.

Como w_1, \dots, w_r es familia libre, existe una aplicación lineal h_{B_1} tal que $h_{B_1}(w_i) = e_i$.

Ejercicio 2.31.1.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^r & \xrightarrow{h_{B_2}} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m & \xrightarrow{h_{B_1}} & \mathbb{F}^r \\ e_1 & \longmapsto & v_1 & \longmapsto & w_1 & \longmapsto & e_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_r & \longmapsto & v_r & \longmapsto & w_r & \longmapsto & e_r \\ \sum \lambda_i e_i & \longmapsto & \sum \lambda_i v_i & \longmapsto & \sum \lambda_i w_i & \longmapsto & \sum \lambda_i e_i \end{array}$$

Sea w_1, \dots, w_r una base de $\text{im } h_A$, donde $r = \text{rango}(A) = \dim(\text{im } h_A)$.

Sean $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{F}^n$ tales que $h_A(v_i) = w_i$.

Como e_1, \dots, e_r es base de \mathbb{F}^r (la base canónica), existe una única aplicación lineal h_{B_2} tal que $h_{B_2}(e_i) = v_i$.

Como w_1, \dots, w_r es familia libre, existe una aplicación lineal h_{B_1} tal que $h_{B_1}(w_i) = e_i$.

Ejercicio 2.31.2.

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1,

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$B_1 \cdot A \cdot B_2 = I_r$$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{\quad}_{r \times m} B_1 \cdot \underbrace{\quad}_{m \times n} A \cdot \underbrace{\quad}_{n \times r} B_2 = \underbrace{\quad}_{r \times r} I_r$$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{\quad}_{B_1}^{r \times m} \cdot \underbrace{\quad}_A^{m \times n} \cdot \underbrace{\quad}_{B_2}^{n \times r} = \underbrace{\quad}_{I_r}^{r \times r}$$

Ahora $r = n$, luego:

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{B_1}_{r \times m} \cdot \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{B_2}_{n \times r} = \underbrace{I_r}_{r \times r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{B_1}_{n \times m} \cdot \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{B_2}_{n \times n} = \underbrace{I_n}_{n \times n}$$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$$\text{rango}(B_1 A B_2) = n$$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$\text{rango}(B_1 A B_2) = n \quad \implies$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$$\text{rango}(B_1 A B_2) = n \quad \implies \quad \text{rango}(B_2) = n$$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$$\text{rango}(B_1 A B_2) = n \quad \implies \quad \text{rango}(B_2) = n \quad \implies$$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$\text{rango}(B_1 A B_2) = n \implies \text{rango}(B_2) = n \implies B_2$ es regular

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$\text{rango}(B_1 A B_2) = n \implies \text{rango}(B_2) = n \implies B_2$ es regular
 \implies

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$\text{rango}(B_1 A B_2) = n \implies \text{rango}(B_2) = n \implies B_2$ es regular
 \implies existe B_2^{-1}

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$\text{rango}(B_1 A B_2) = n \implies \text{rango}(B_2) = n \implies B_2$ es regular
 \implies existe B_2^{-1}

$$B_1 A B_2 = I_n$$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$\text{rango}(B_1 A B_2) = n \implies \text{rango}(B_2) = n \implies B_2$ es regular
 \implies existe B_2^{-1}

$$B_1 A B_2 = I_n \implies$$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$\text{rango}(B_1AB_2) = n \implies \text{rango}(B_2) = n \implies B_2$ es regular
 \implies existe B_2^{-1}

$$B_1AB_2 = I_n \implies B_1A = B_2^{-1}$$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$\text{rango}(B_1AB_2) = n \implies \text{rango}(B_2) = n \implies B_2$ es regular
 \implies existe B_2^{-1}

$$B_1AB_2 = I_n \implies B_1A = B_2^{-1} \implies$$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$\text{rango}(B_1AB_2) = n \implies \text{rango}(B_2) = n \implies B_2$ es regular
 \implies existe B_2^{-1}

$$B_1AB_2 = I_n \implies B_1A = B_2^{-1} \implies B_2B_1A = I_n$$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$\text{rango}(B_1AB_2) = n \implies \text{rango}(B_2) = n \implies B_2$ es regular
 \implies existe B_2^{-1}

$$B_1AB_2 = I_n \implies B_1A = B_2^{-1} \implies B_2B_1A = I_n$$

$B =$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:
$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$\text{rango}(B_1AB_2) = n \implies \text{rango}(B_2) = n \implies B_2$ es regular
 \implies existe B_2^{-1}

$$B_1AB_2 = I_n \implies B_1A = B_2^{-1} \implies B_2B_1A = I_n$$

$$B = B_2B_1$$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$\text{rango}(B_1 A B_2) = n \implies \text{rango}(B_2) = n \implies B_2$ es regular
 \implies existe B_2^{-1}

$$B_1 A B_2 = I_n \implies B_1 A = B_2^{-1} \implies B_2 B_1 A = I_n$$

$$B = B_2 B_1 \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$$

Ejercicio 2.31.2.

Podríamos adaptar los argumentos del ejercicio 2.26.3 o del 2.31.1, pero es más divertido hacer una solución distinta.

Por el apartado anterior sabemos que existen matrices B_1, B_2 tales que:

$$\underbrace{r \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times r}_{B_2} = \underbrace{r \times r}_{I_r}$$

Ahora $r = n$, luego:

$$\underbrace{n \times m}_{B_1} \cdot \underbrace{m \times n}_A \cdot \underbrace{n \times n}_{B_2} = \underbrace{n \times n}_{I_n}$$

$\text{rango}(B_1 A B_2) = n \implies \text{rango}(B_2) = n \implies B_2$ es regular
 \implies existe B_2^{-1}

$$B_1 A B_2 = I_n \implies B_1 A = B_2^{-1} \implies B_2 B_1 A = I_n$$

$B = B_2 B_1 \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ es la matriz que buscamos.

Ejercicio 2.34.1.

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n$$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$\text{rango}(A) =$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{im}(h_A))$$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{im}(h_A)) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{im}(h_A)) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(AB) =$$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{im}(h_A)) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(\text{im}(h_{AB}))$$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{im}(h_A)) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(\text{im}(h_{AB})) = \dim(h_{AB}(\mathbb{F}^p))$$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{im}(h_A)) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(\text{im}(h_{AB})) = \dim(h_{AB}(\mathbb{F}^p)) = \dim((h_A \circ h_B)(\mathbb{F}^p))$$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{im}(h_A)) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\begin{aligned} \text{rango}(AB) &= \dim(\text{im}(h_{AB})) = \dim(h_{AB}(\mathbb{F}^p)) = \dim((h_A \circ h_B)(\mathbb{F}^p)) \\ &= \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p))) \end{aligned}$$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{im}(h_A)) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\begin{aligned} \text{rango}(AB) &= \dim(\text{im}(h_{AB})) = \dim(h_{AB}(\mathbb{F}^p)) = \dim((h_A \circ h_B)(\mathbb{F}^p)) \\ &= \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p))) \end{aligned}$$

$$h_B(\mathbb{F}^p) \subseteq \mathbb{F}^n$$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{im}(h_A)) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\begin{aligned} \text{rango}(AB) &= \dim(\text{im}(h_{AB})) = \dim(h_{AB}(\mathbb{F}^p)) = \dim((h_A \circ h_B)(\mathbb{F}^p)) \\ &= \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p))) \end{aligned}$$

$$h_B(\mathbb{F}^p) \subseteq \mathbb{F}^n \implies$$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{im}(h_A)) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\begin{aligned} \text{rango}(AB) &= \dim(\text{im}(h_{AB})) = \dim(h_{AB}(\mathbb{F}^p)) = \dim((h_A \circ h_B)(\mathbb{F}^p)) \\ &= \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p))) \end{aligned}$$

$$h_B(\mathbb{F}^p) \subseteq \mathbb{F}^n \implies h_A(h_B(\mathbb{F}^p)) \subseteq h_A(\mathbb{F}^n)$$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{im}(h_A)) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\begin{aligned} \text{rango}(AB) &= \dim(\text{im}(h_{AB})) = \dim(h_{AB}(\mathbb{F}^p)) = \dim((h_A \circ h_B)(\mathbb{F}^p)) \\ &= \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p))) \end{aligned}$$

$$h_B(\mathbb{F}^p) \subseteq \mathbb{F}^n \implies h_A(h_B(\mathbb{F}^p)) \subseteq h_A(\mathbb{F}^n) \implies$$

Ejercicio 2.34.1.

Fijamos las bases canónicas, y trabajaremos con aplicaciones lineales en lugar de con matrices.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{im}(h_A)) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\begin{aligned} \text{rango}(AB) &= \dim(\text{im}(h_{AB})) = \dim(h_{AB}(\mathbb{F}^p)) = \dim((h_A \circ h_B)(\mathbb{F}^p)) \\ &= \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p))) \end{aligned}$$

$$h_B(\mathbb{F}^p) \subseteq \mathbb{F}^n \implies h_A(h_B(\mathbb{F}^p)) \subseteq h_A(\mathbb{F}^n) \implies \text{rango}(AB) \leq \text{rango}(A)$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(B)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

n

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$
$$\xrightarrow{g}$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{h_B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{h_A} \mathbb{F}^m$$
$$\xrightarrow{g}$$

$$h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \end{array}$$

$$h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) =$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n)$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n)) = n$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n)) = n - \text{rango}(A)$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n)) = n - \text{rango}(A)$$

$$\dim(\ker(g)) =$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n)) = n - \text{rango}(A)$$

$$\dim(\ker(g)) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

$$h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n)) = n - \text{rango}(A)$$

$$\dim(\ker(g)) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p)) - \dim(g(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array} \quad h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n)) = n - \text{rango}(A)$$

$$\dim(\ker(g)) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p)) - \dim(g(h_B(\mathbb{F}^p))) = \text{rango}(B)$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array} \quad h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n)) = n - \text{rango}(A)$$

$$\dim(\ker(g)) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p)) - \dim(g(h_B(\mathbb{F}^p))) = \text{rango}(B) - \text{rango}(AB)$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array} \quad h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n)) = n - \text{rango}(A)$$

$$\dim(\ker(g)) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p)) - \dim(g(h_B(\mathbb{F}^p))) = \text{rango}(B) - \text{rango}(AB)$$

$$\ker(g) \subseteq \ker(h_A)$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array} \quad h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n)) = n - \text{rango}(A)$$

$$\dim(\ker(g)) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p)) - \dim(g(h_B(\mathbb{F}^p))) = \text{rango}(B) - \text{rango}(AB)$$

$$\ker(g) \subseteq \ker(h_A) \quad \implies$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array} \quad h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n)) = n - \text{rango}(A)$$

$$\dim(\ker(g)) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p)) - \dim(g(h_B(\mathbb{F}^p))) = \text{rango}(B) - \text{rango}(AB)$$

$$\ker(g) \subseteq \ker(h_A) \quad \implies \quad \text{rango}(B) - \text{rango}(AB)$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array} \quad h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n)) = n - \text{rango}(A)$$

$$\dim(\ker(g)) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p)) - \dim(g(h_B(\mathbb{F}^p))) = \text{rango}(B) - \text{rango}(AB)$$

$$\ker(g) \subseteq \ker(h_A) \quad \implies \quad \text{rango}(B) - \text{rango}(AB) \leq$$

Ejercicio 2.34.3.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^p & \xrightarrow{h_B} & \mathbb{F}^n & \xrightarrow{h_A} & \mathbb{F}^m \\ & & h_B(\mathbb{F}^p) & \xrightarrow{g} & \mathbb{F}^m \end{array} \quad h_A(v) = g(v)$$

$$n = \dim(\mathbb{F}^n)$$

$$\text{rango}(A) = \dim(h_A(\mathbb{F}^n))$$

$$\text{rango}(B) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p))$$

$$\text{rango}(AB) = \dim(h_A(h_B(\mathbb{F}^p)))$$

$$\dim(\ker(h_A)) = \dim(\mathbb{F}^n) - \dim(h_A(\mathbb{F}^n)) = n - \text{rango}(A)$$

$$\dim(\ker(g)) = \dim(h_B(\mathbb{F}^p)) - \dim(g(h_B(\mathbb{F}^p))) = \text{rango}(B) - \text{rango}(AB)$$

$$\ker(g) \subseteq \ker(h_A) \quad \implies \quad \text{rango}(B) - \text{rango}(AB) \leq n - \text{rango}(A)$$

Capítulo 3. Determinantes

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

3.3. Propiedades de los determinantes

3.4. Matriz adjunta

3.5. Signatura

Ejercicios determinantes

Definición 3.1.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definición 3.1.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Definición 3.1.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

El **menor** (i, j) de A ,

Definición 3.1.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

El **menor** (i, j) de A , denotado M_{ij}^A ,

Definición 3.1.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

El **menor** (i, j) de A , denotado M_{ij}^A , es la matriz $(n - 1) \times (n - 1)$

Definición 3.1.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

El **menor** (i, j) de A , denotado M_{ij}^A , es la matriz $(n - 1) \times (n - 1)$ formada al suprimir la fila i y la columna j de A .

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\det : M_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$$

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A\end{aligned}$$

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A|\end{aligned}$$

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A|\end{aligned}$$

inductivamente mediante:

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A|\end{aligned}$$

inductivamente mediante:

1. Si $n = 1$,

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A|\end{aligned}$$

inductivamente mediante:

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$.

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A|\end{aligned}$$

inductivamente mediante:

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$.
2. Supuesto definido el determinante para matrices $(n - 1) \times (n - 1)$,

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A|\end{aligned}$$

inductivamente mediante:

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$.
2. Supuesto definido el determinante para matrices $(n - 1) \times (n - 1)$, llamamos **adjunto** (i, j) de $A \in M_n(\mathbb{F})$ al número:

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A|\end{aligned}$$

inductivamente mediante:

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$.
2. Supuesto definido el determinante para matrices $(n - 1) \times (n - 1)$, llamamos **adjunto** (i, j) de $A \in M_n(\mathbb{F})$ al número:

$$A_{ij} =$$

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A|\end{aligned}$$

inductivamente mediante:

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$.
2. Supuesto definido el determinante para matrices $(n - 1) \times (n - 1)$, llamamos **adjunto** (i, j) de $A \in M_n(\mathbb{F})$ al número:

$$A_{ij} = M_{ij}^A$$

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A|\end{aligned}$$

inductivamente mediante:

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$.
2. Supuesto definido el determinante para matrices $(n - 1) \times (n - 1)$, llamamos **adjunto** (i, j) de $A \in M_n(\mathbb{F})$ al número:

$$A_{ij} = \det M_{ij}^A$$

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A|\end{aligned}$$

inductivamente mediante:

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$.
2. Supuesto definido el determinante para matrices $(n - 1) \times (n - 1)$, llamamos **adjunto** (i, j) de $A \in M_n(\mathbb{F})$ al número:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}^A$$

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A|\end{aligned}$$

inductivamente mediante:

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$.
2. Supuesto definido el determinante para matrices $(n - 1) \times (n - 1)$, llamamos **adjunto** (i, j) de $A \in M_n(\mathbb{F})$ al número:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}^A$$

Definimos:

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A|\end{aligned}$$

inductivamente mediante:

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$.
2. Supuesto definido el determinante para matrices $(n - 1) \times (n - 1)$, llamamos **adjunto** (i, j) de $A \in M_n(\mathbb{F})$ al número:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}^A$$

Definimos:

$$\det A = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

Definiciones 3.2.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definimos la aplicación **determinante**

$$\begin{aligned}\det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A|\end{aligned}$$

inductivamente mediante:

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$.
2. Supuesto definido el determinante para matrices $(n - 1) \times (n - 1)$, llamamos **adjunto** (i, j) de $A \in M_n(\mathbb{F})$ al número:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}^A$$

Definimos:

$$\det A = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

(Suma de los elementos de la primera columna por sus adjuntos).

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}|a_{22}|$$

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}|a_{22}| - a_{21}|a_{12}|$$

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

2. Calculemos el determinante de una matriz 3×3 :

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

2. Calculemos el determinante de una matriz 3×3 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

2. Calculemos el determinante de una matriz 3×3 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

2. Calculemos el determinante de una matriz 3×3 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

2. Calculemos el determinante de una matriz 3×3 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

2. Calculemos el determinante de una matriz 3×3 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ = -2(3 - 0)$$

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

2. Calculemos el determinante de una matriz 3×3 :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= +0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -2(3 - 0) + 4(18 - 40) \end{aligned}$$

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

2. Calculemos el determinante de una matriz 3×3 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ = -2(3 - 0) + 4(18 - 40) = -94$$

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

2. Calculemos el determinante de una matriz 3×3 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ = -2(3 - 0) + 4(18 - 40) = -94$$

3. El ejercicio 3.3 nos dice que el determinante de la matriz identidad es

Ejemplos 3.3.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

2. Calculemos el determinante de una matriz 3×3 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ = -2(3 - 0) + 4(18 - 40) = -94$$

3. El ejercicio 3.3 nos dice que el determinante de la matriz identidad es igual a 1:

$$\det I_n = 1$$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. Sea $F_i(\alpha)$ la matriz elemental que multiplica la fila i por α .

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. Sea $F_i(\alpha)$ la matriz elemental que multiplica la fila i por α .
Entonces:

$$\det(F_i(\alpha)A) = \alpha \det A$$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$.

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro:

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11}$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11}$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n - 1$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n - 1$ (con $n \geq 2$),

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n - 1$ (con $n \geq 2$),
y probemos que es cierta para n :

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n - 1$ (con $n \geq 2$),
y probemos que es cierta para n :

$\det B$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n - 1$ (con $n \geq 2$),
y probemos que es cierta para n :

$$\det B = \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1}$$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n - 1$ (con $n \geq 2$),
y probemos que es cierta para n :

$$\det B = \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1} = b_{i1} B_{i1} + \sum_{k \neq i} b_{k1} B_{k1}$$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n - 1$ (con $n \geq 2$),
y probemos que es cierta para n :

$$\det B = \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1} = b_{i1} B_{i1} + \sum_{k \neq i} b_{k1} B_{k1}$$
$$(\alpha a_{i1}) A_{i1}$$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n - 1$ (con $n \geq 2$), y probemos que es cierta para n :

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1} = b_{i1} B_{i1} + \sum_{k \neq i} b_{k1} B_{k1} \\ &= (\alpha a_{i1}) A_{i1} + \sum_{k \neq i} a_{k1} B_{k1}\end{aligned}$$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n - 1$ (con $n \geq 2$),
y probemos que es cierta para n :

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1} = b_{i1} B_{i1} + \sum_{k \neq i} b_{k1} B_{k1} \\ &\stackrel{\text{inducción}}{=} (\alpha a_{i1}) A_{i1} + \sum_{k \neq i} a_{k1}\end{aligned}$$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n - 1$ (con $n \geq 2$),
y probemos que es cierta para n :

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1} = b_{i1} B_{i1} + \sum_{k \neq i} b_{k1} B_{k1} \\ &\stackrel{\text{inducción}}{=} (\alpha a_{i1}) A_{i1} + \sum_{k \neq i} a_{k1} (\alpha A_{k1})\end{aligned}$$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n - 1$ (con $n \geq 2$),
y probemos que es cierta para n :

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1} = b_{i1} B_{i1} + \sum_{k \neq i} b_{k1} B_{k1} \\ &\stackrel{\text{inducción}}{=} (\alpha a_{i1}) A_{i1} + \sum_{k \neq i} a_{k1} (\alpha A_{k1}) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n a_{k1} A_{k1}\end{aligned}$$

Propiedades 3.4.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Demostración.

Sea $B = F_i(\alpha)A$. Inducción sobre n .

Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$.

Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n - 1$ (con $n \geq 2$),
y probemos que es cierta para n :

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1} = b_{i1} B_{i1} + \sum_{k \neq i} b_{k1} B_{k1} \\ &\stackrel{\text{inducción}}{=} (\alpha a_{i1}) A_{i1} + \sum_{k \neq i} a_{k1} (\alpha A_{k1}) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n a_{k1} A_{k1} = \alpha \det A\end{aligned}$$



Consecuencias 3.5.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Consecuencias 3.5.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. $\det F_i(\alpha) = \alpha,$

Consecuencias 3.5.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. $\det F_i(\alpha) = \alpha$, ya que $F_i(\alpha) = F_i(\alpha)I_n$.

Consecuencias 3.5.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. $\det F_i(\alpha) = \alpha$, ya que $F_i(\alpha) = F_i(\alpha)I_n$.

Por lo tanto podemos reescribir la propiedad 1 como

Consecuencias 3.5.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. $\det F_i(\alpha) = \alpha$, ya que $F_i(\alpha) = F_i(\alpha)I_n$.

Por lo tanto podemos reescribir la propiedad 1 como $\det(F_i(\alpha) \cdot A) = (\det F_i(\alpha)) \cdot (\det A)$.

Consecuencias 3.5.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. $\det F_i(\alpha) = \alpha$, ya que $F_i(\alpha) = F_i(\alpha)I_n$.

Por lo tanto podemos reescribir la propiedad 1 como $\det(F_i(\alpha) \cdot A) = (\det F_i(\alpha)) \cdot (\det A)$.

2. Si A tiene una fila nula,

Consecuencias 3.5.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. $\det F_i(\alpha) = \alpha$, ya que $F_i(\alpha) = F_i(\alpha)I_n$.

Por lo tanto podemos reescribir la propiedad 1 como $\det(F_i(\alpha) \cdot A) = (\det F_i(\alpha)) \cdot (\det A)$.

2. Si A tiene una fila nula, entonces $\det A = 0$.

Consecuencias 3.5.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. $\det F_i(\alpha) = \alpha$, ya que $F_i(\alpha) = F_i(\alpha)I_n$.

Por lo tanto podemos reescribir la propiedad 1 como $\det(F_i(\alpha) \cdot A) = (\det F_i(\alpha)) \cdot (\det A)$.

2. Si A tiene una fila nula, entonces $\det A = 0$.

(Observa que la propiedad 1 es válida incluso si $\alpha = 0$,

Consecuencias 3.5.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

1. $\det F_i(\alpha) = \alpha$, ya que $F_i(\alpha) = F_i(\alpha)I_n$.

Por lo tanto podemos reescribir la propiedad 1 como $\det(F_i(\alpha) \cdot A) = (\det F_i(\alpha)) \cdot (\det A)$.

2. Si A tiene una fila nula, entonces $\det A = 0$.

(Observa que la propiedad 1 es válida incluso si $\alpha = 0$, aunque entonces $F_i(\alpha)$ no es una matriz elemental).

Propiedades 3.6.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Propiedades 3.6.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

2. El determinante es aditivo en cada fila, es decir:

Propiedades 3.6.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

2. El determinante es aditivo en cada fila, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1} + a''_{i1} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Propiedades 3.6.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

2. El determinante es aditivo en cada fila, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1} + a''_{i1} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Propiedades 3.6.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

2. El determinante es aditivo en cada fila, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1} + a''_{i1} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demostración.

Propiedades 3.6.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

2. El determinante es aditivo en cada fila, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1} + a''_{i1} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demostración.

Análoga a la demostración de la propiedad 1. □

Ejercicios 3.7.

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

- 3.1
- 3.2
- 3.3

Capítulo 3. Determinantes

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

3.3. Propiedades de los determinantes

3.4. Matriz adjunta

3.5. Signatura

Ejercicios determinantes

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

3. Sea F_{ij} la matriz elemental que intercambia las filas i, j .

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

3. Sea F_{ij} la matriz elemental que intercambia las filas i, j .

Entonces:

$$\det(F_{ij}A) = -\det A$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

1. Primero veamos que basta con que probemos el resultado para $i = 1$.

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

1. Primero veamos que basta con que probemos el resultado para $i = 1$.

Observamos que $F_{ij} = F_{1i}F_{1j}F_{1i}$ gracias al siguiente diagrama:

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

1. Primero veamos que basta con que probemos el resultado para $i = 1$.

Observamos que $F_{ij} = F_{1i}F_{1j}F_{1i}$ gracias al siguiente diagrama:

$$1 \quad i \quad j$$

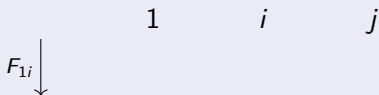
Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

1. Primero veamos que basta con que probemos el resultado para $i = 1$.

Observamos que $F_{ij} = F_{1i}F_{1j}F_{1i}$ gracias al siguiente diagrama:



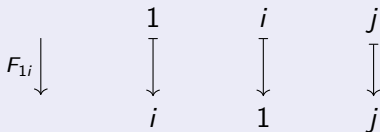
Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

1. Primero veamos que basta con que probemos el resultado para $i = 1$.

Observamos que $F_{ij} = F_{1i}F_{1j}F_{1i}$ gracias al siguiente diagrama:



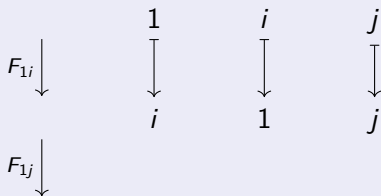
Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

1. Primero veamos que basta con que probemos el resultado para $i = 1$.

Observamos que $F_{ij} = F_{1i}F_{1j}F_{1i}$ gracias al siguiente diagrama:



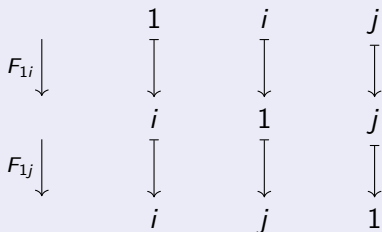
Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

1. Primero veamos que basta con que probemos el resultado para $i = 1$.

Observamos que $F_{ij} = F_{1i}F_{1j}F_{1i}$ gracias al siguiente diagrama:



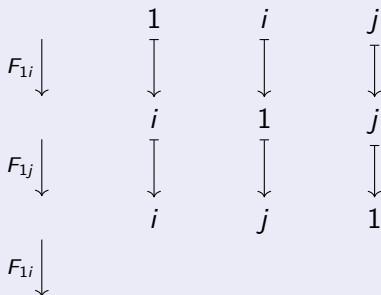
Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

1. Primero veamos que basta con que probemos el resultado para $i = 1$.

Observamos que $F_{ij} = F_{1i}F_{1j}F_{1i}$ gracias al siguiente diagrama:



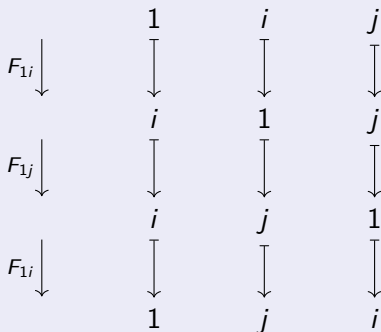
Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

1. Primero veamos que basta con que probemos el resultado para $i = 1$.

Observamos que $F_{ij} = F_{1i}F_{1j}F_{1i}$ gracias al siguiente diagrama:



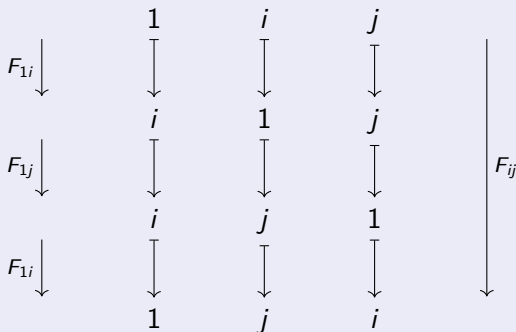
Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

1. Primero veamos que basta con que probemos el resultado para $i = 1$.

Observamos que $F_{ij} = F_{1i}F_{1j}F_{1i}$ gracias al siguiente diagrama:



Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

Por lo tanto, una vez que probemos el resultado para $i = 1$, tendremos:

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

Por lo tanto, una vez que probemos el resultado para $i = 1$, tendremos:

$$\det(F_{ij}A)$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

Por lo tanto, una vez que probemos el resultado para $i = 1$, tendremos:

$$\det(F_{ij}A) = \det(F_{1i}F_{1j}F_{1i}A)$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

Por lo tanto, una vez que probemos el resultado para $i = 1$, tendremos:

$$\det(F_{ij}A) = \det(F_{1i}F_{1j}F_{1i}A) = -\det(F_{1j}F_{1i}A)$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

Por lo tanto, una vez que probemos el resultado para $i = 1$, tendremos:

$$\begin{aligned}\det(F_{ij}A) &= \det(F_{1i}F_{1j}F_{1i}A) = -\det(F_{1j}F_{1i}A) \\ &= \det(F_{1i}A)\end{aligned}$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

Por lo tanto, una vez que probemos el resultado para $i = 1$, tendremos:

$$\begin{aligned}\det(F_{ij}A) &= \det(F_{1i}F_{1j}F_{1i}A) = -\det(F_{1j}F_{1i}A) \\ &= \det(F_{1i}A) = -\det A\end{aligned}$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n .

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n . El caso $n = 2$ es claro.

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n . El caso $n = 2$ es claro. Veamos $n - 1 \rightarrow n$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n . El caso $n = 2$ es claro. Veamos $n - 1 \rightarrow n$ ($n \geq 3$).

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n . El caso $n = 2$ es claro. Veamos $n - 1 \rightarrow n$ ($n \geq 3$).

Sea $B = F_{1j}A$,

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n . El caso $n = 2$ es claro. Veamos $n - 1 \rightarrow n$ ($n \geq 3$).

Sea $B = F_{1j}A$,

$\det A$

$\det B$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n . El caso $n = 2$ es claro. Veamos $n - 1 \rightarrow n$ ($n \geq 3$).

Sea $B = F_{1j}A$, debemos ver que estos dos números son opuestos:

$\det A$

$\det B$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n . El caso $n = 2$ es claro. Veamos $n - 1 \rightarrow n$ ($n \geq 3$).

Sea $B = F_{1j}A$, debemos ver que estos dos números son opuestos:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{k1} A_{k1} \qquad \det B$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n . El caso $n = 2$ es claro. Veamos $n - 1 \rightarrow n$ ($n \geq 3$).

Sea $B = F_{1j}A$, debemos ver que estos dos números son opuestos:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{k1} A_{k1}$$

$$\det B = \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1}$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n . El caso $n = 2$ es claro. Veamos $n - 1 \rightarrow n$ ($n \geq 3$).

Sea $B = F_{1j}A$, debemos ver que estos dos números son opuestos:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{k1} A_{k1}$$

$$\det B = \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1}$$

a) Si $k \neq 1, j$,

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n . El caso $n = 2$ es claro. Veamos $n - 1 \rightarrow n$ ($n \geq 3$).

Sea $B = F_{1j}A$, debemos ver que estos dos números son opuestos:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{k1} A_{k1} \qquad \det B = \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1}$$

a) Si $k \neq 1, j$,

entonces M_{k1}^A , M_{k1}^B son iguales salvo por dos filas intercamb.

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n . El caso $n = 2$ es claro. Veamos $n - 1 \rightarrow n$ ($n \geq 3$).

Sea $B = F_{1j}A$, debemos ver que estos dos números son opuestos:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{k1} A_{k1} \qquad \det B = \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1}$$

a) Si $k \neq 1, j$,

entonces M_{k1}^A , M_{k1}^B son iguales salvo por dos filas intercamb.

Debido a la hipótesis de inducción, $B_{k1} = -A_{k1}$.

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n . El caso $n = 2$ es claro. Veamos $n - 1 \rightarrow n$ ($n \geq 3$).

Sea $B = F_{1j}A$, debemos ver que estos dos números son opuestos:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{k1} A_{k1} \qquad \det B = \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1}$$

a) Si $k \neq 1, j$,

entonces M_{k1}^A , M_{k1}^B son iguales salvo por dos filas intercamb.

Debido a la hipótesis de inducción, $B_{k1} = -A_{k1}$.

Además $b_{k1} = a_{k1}$.

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2. Inducción sobre n . El caso $n = 2$ es claro. Veamos $n - 1 \rightarrow n$ ($n \geq 3$).

Sea $B = F_{1j}A$, debemos ver que estos dos números son opuestos:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{k1} A_{k1} \qquad \det B = \sum_{k=1}^n b_{k1} B_{k1}$$

a) Si $k \neq 1, j$,

entonces M_{k1}^A , M_{k1}^B son iguales salvo por dos filas intercamb.

Debido a la hipótesis de inducción, $B_{k1} = -A_{k1}$.

Además $b_{k1} = a_{k1}$. Luego $b_{k1} B_{k1} = -a_{k1} A_{k1}$.

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b)

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$

Simetría $A \leftrightarrow B$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$

Simetría $A \leftrightarrow B \implies$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$

Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

$$\begin{array}{l} 2.b) \text{ Vamos a probar que} \\ \text{Simetría } A \leftrightarrow B \implies \end{array} \left. \begin{array}{l} b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1} \\ a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1} \end{array} \right\}$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

$$\left. \begin{array}{l} 2.b) \text{ Vamos a probar que} \\ \text{Simetría } A \leftrightarrow B \implies \end{array} \right\} \begin{array}{l} b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1} \\ a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1} \end{array} \quad \text{habremos acabado}$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$ }
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ } habremos acabado

$$M_{j1}^A =$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$ }
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ } habremos acabado

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \dots \\ \text{fila } j-2 \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix}$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$ }
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ } habremos acabado

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \dots \\ \text{fila } j-2 \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix} \quad M_{11}^B =$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$ }
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ } habremos acabado

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \dots \\ \text{fila } j-2 \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix}$$

$$M_{11}^B = \begin{pmatrix} \text{fila 2} \\ \dots \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila 1} \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix}$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$ }
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ } habremos acabado

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \dots \\ \text{fila } j-2 \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix} \qquad M_{11}^B = \begin{pmatrix} \text{fila 2} \\ \dots \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila 1} \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix}$$

M_{11}^B se obtiene al hacer $j - 2$ intercambios de filas a M_{j1}^A .

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$ }
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ } habremos acabado

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \dots \\ \text{fila } j-2 \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix} \qquad M_{11}^B = \begin{pmatrix} \text{fila 2} \\ \dots \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila 1} \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix}$$

M_{11}^B se obtiene al hacer $j - 2$ intercambios de filas a M_{j1}^A . $b_{11} = a_{j1}$.

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$ } habremos acabado
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ }

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \dots \\ \text{fila } j-2 \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix} \qquad M_{11}^B = \begin{pmatrix} \text{fila 2} \\ \dots \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila 1} \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix}$$

M_{11}^B se obtiene al hacer $j - 2$ intercambios de filas a M_{j1}^A . $b_{11} = a_{j1}$.

$$b_{11}B_{11}$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$ } habremos acabado
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ }

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \dots \\ \text{fila } j-2 \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix} \qquad M_{11}^B = \begin{pmatrix} \text{fila 2} \\ \dots \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila 1} \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix}$$

M_{11}^B se obtiene al hacer $j-2$ intercambios de filas a M_{j1}^A . $b_{11} = a_{j1}$.

$$b_{11}B_{11} = a_{j1} \det M_{11}^B$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$ } habremos acabado
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ }

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \dots \\ \text{fila } j-2 \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix} \qquad M_{11}^B = \begin{pmatrix} \text{fila 2} \\ \dots \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila 1} \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix}$$

M_{11}^B se obtiene al hacer $j-2$ intercambios de filas a M_{j1}^A . $b_{11} = a_{j1}$.

$$b_{11}B_{11} = a_{j1} \det M_{11}^B \xrightarrow{\text{inducción}}$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$ } habremos acabado
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ }

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \dots \\ \text{fila } j-2 \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix} \qquad M_{11}^B = \begin{pmatrix} \text{fila 2} \\ \dots \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila 1} \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix}$$

M_{11}^B se obtiene al hacer $j-2$ intercambios de filas a M_{j1}^A . $b_{11} = a_{j1}$.

$$b_{11}B_{11} = a_{j1} \det M_{11}^B \stackrel{\text{inducción}}{=} a_{j1}(-1)^{j-2} \det M_{j1}^A$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$ } habremos acabado
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ }

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \dots \\ \text{fila } j-2 \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix} \qquad M_{11}^B = \begin{pmatrix} \text{fila 2} \\ \dots \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila 1} \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix}$$

M_{11}^B se obtiene al hacer $j-2$ intercambios de filas a M_{j1}^A . $b_{11} = a_{j1}$.

$$\begin{aligned} b_{11}B_{11} &= a_{j1} \det M_{11}^B \stackrel{\text{inducción}}{=} a_{j1}(-1)^{j-2} \det M_{j1}^A \\ &= -a_{j1}(-1)^{j+1} \det M_{j1}^A \end{aligned}$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$ } habremos acabado
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ }

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \dots \\ \text{fila } j-2 \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix} \quad M_{11}^B = \begin{pmatrix} \text{fila 2} \\ \dots \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila 1} \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix}$$

M_{11}^B se obtiene al hacer $j-2$ intercambios de filas a M_{j1}^A . $b_{11} = a_{j1}$.

$$\begin{aligned} b_{11}B_{11} &= a_{j1} \det M_{11}^B \stackrel{\text{inducción}}{=} a_{j1}(-1)^{j-2} \det M_{j1}^A \\ &= -a_{j1}(-1)^{j+1} \det M_{j1}^A = -a_{j1}A_{j1} \end{aligned}$$

Propiedades 3.8.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Demostración.

2.b) Vamos a probar que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$ } habremos acabado
Simetría $A \leftrightarrow B \implies a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$ }

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \dots \\ \text{fila } j-2 \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix} \quad M_{11}^B = \begin{pmatrix} \text{fila 2} \\ \dots \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila 1} \\ \text{fila } j+1 \\ \dots \\ \text{fila } n \end{pmatrix}$$

M_{11}^B se obtiene al hacer $j-2$ intercambios de filas a M_{j1}^A . $b_{11} = a_{j1}$.

$$\begin{aligned} b_{11}B_{11} &= a_{j1} \det M_{11}^B \stackrel{\text{inducción}}{=} a_{j1}(-1)^{j-2} \det M_{j1}^A \\ &= -a_{j1}(-1)^{j+1} \det M_{j1}^A = -a_{j1}A_{j1} \end{aligned}$$



Consecuencias 3.9.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Consecuencias 3.9.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

1. Si dos filas de A son iguales,

Consecuencias 3.9.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

1. Si dos filas de A son iguales, entonces $\det A = 0$.

Consecuencias 3.9.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

1. Si dos filas de A son iguales, entonces $\det A = 0$.
2. $\det F_{ij} = -1$,

Consecuencias 3.9.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

1. Si dos filas de A son iguales, entonces $\det A = 0$.
2. $\det F_{ij} = -1$, por lo tanto $\det(F_{ij}A) = (\det F_{ij}) \cdot (\det A)$.

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Demostración.

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Demostración.

Sea B_α la matriz obtenida al **sustituir** la fila i de A por α veces la fila j .

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Demostración.

Sea B_α la matriz obtenida al **sustituir** la fila i de A por α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A)$$

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Demostración.

Sea B_α la matriz obtenida al **sustituir** la fila i de A por α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) \stackrel{(2)}{=} \det A + \det B_\alpha$$

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Demostración.

Sea B_α la matriz obtenida al **sustituir** la fila i de A por α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) \stackrel{(2)}{=} \det A + \det B_\alpha \stackrel{(1)}{=} \det A + \alpha \det B_1$$

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Demostración.

Sea B_α la matriz obtenida al **sustituir** la fila i de A por α veces la fila j .

$$\begin{aligned}\det(F_{ij}(\alpha)A) &\stackrel{(2)}{=} \det A + \det B_\alpha \stackrel{(1)}{=} \det A + \alpha \det B_1 \\ &\stackrel{(3)}{=} \det A + \alpha \cdot 0\end{aligned}$$

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Demostración.

Sea B_α la matriz obtenida al **sustituir** la fila i de A por α veces la fila j .

$$\begin{aligned}\det(F_{ij}(\alpha)A) &\stackrel{(2)}{=} \det A + \det B_\alpha \stackrel{(1)}{=} \det A + \alpha \det B_1 \\ &\stackrel{(3)}{=} \det A + \alpha \cdot 0 = \det A\end{aligned}$$

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Demostración.

Sea B_α la matriz obtenida al **sustituir** la fila i de A por α veces la fila j .

$$\begin{aligned}\det(F_{ij}(\alpha)A) &\stackrel{(2)}{=} \det A + \det B_\alpha \stackrel{(1)}{=} \det A + \alpha \det B_1 \\ &\stackrel{(3)}{=} \det A + \alpha \cdot 0 = \det A\end{aligned}$$



Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Demostración.

Sea B_α la matriz obtenida al **sustituir** la fila i de A por α veces la fila j .

$$\begin{aligned}\det(F_{ij}(\alpha)A) &\stackrel{(2)}{=} \det A + \det B_\alpha \stackrel{(1)}{=} \det A + \alpha \det B_1 \\ &\stackrel{(3)}{=} \det A + \alpha \cdot 0 = \det A\end{aligned}$$



Consecuencias 3.11.

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Demostración.

Sea B_α la matriz obtenida al **sustituir** la fila i de A por α veces la fila j .

$$\begin{aligned}\det(F_{ij}(\alpha)A) &\stackrel{(2)}{=} \det A + \det B_\alpha \stackrel{(1)}{=} \det A + \alpha \det B_1 \\ &\stackrel{(3)}{=} \det A + \alpha \cdot 0 = \det A\end{aligned}$$



Consecuencias 3.11.

- $\det F_{ij}(\alpha) = 1$,

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Demostración.

Sea B_α la matriz obtenida al **sustituir** la fila i de A por α veces la fila j .

$$\begin{aligned}\det(F_{ij}(\alpha)A) &\stackrel{(2)}{=} \det A + \det B_\alpha \stackrel{(1)}{=} \det A + \alpha \det B_1 \\ &\stackrel{(3)}{=} \det A + \alpha \cdot 0 = \det A\end{aligned}$$



Consecuencias 3.11.

- $\det F_{ij}(\alpha) = 1$, por lo tanto

Propiedades 3.10 y consecuencias 3.11.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.10.

4. Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental que suma, a la fila i , α veces la fila j .

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A$$

Demostración.

Sea B_α la matriz obtenida al **sustituir** la fila i de A por α veces la fila j .

$$\begin{aligned}\det(F_{ij}(\alpha)A) &\stackrel{(2)}{=} \det A + \det B_\alpha \stackrel{(1)}{=} \det A + \alpha \det B_1 \\ &\stackrel{(3)}{=} \det A + \alpha \cdot 0 = \det A\end{aligned}$$



Consecuencias 3.11.

- $\det F_{ij}(\alpha) = 1$, por lo tanto $\det(F_{ij}(\alpha)A) = (\det F_{ij}(\alpha)) \cdot (\det A)$.

Ejercicios 3.12.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

- 3.4
- 3.5
- 3.6

Capítulo 3. Determinantes

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

3.3. Propiedades de los determinantes

3.4. Matriz adjunta

3.5. Signatura

Ejercicios determinantes

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$,

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que: $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que: $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

$\det A$

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que: $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

$$\det A = \det(F_r \cdots F_1 \cdot I_n)$$

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que: $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

$$\det A = \det(F_r \cdots F_1 \cdot I_n) = \det F_r \cdot \det(F_{r-1} \cdots F_1 \cdot I_n)$$

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que: $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

$$\begin{aligned}\det A &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot I_n) = \det F_r \cdot \det(F_{r-1} \cdots F_1 \cdot I_n) \\ &= \dots\end{aligned}$$

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que: $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

$$\begin{aligned}\det A &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot I_n) = \det F_r \cdot \det(F_{r-1} \cdots F_1 \cdot I_n) \\ &= \dots = \det F_r \cdots \det F_1\end{aligned}$$

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que: $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

$$\begin{aligned}\det A &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot I_n) = \det F_r \cdot \det(F_{r-1} \cdots F_1 \cdot I_n) \\ &= \dots = \det F_r \cdots \det F_1\end{aligned}$$

2. Si A no es regular,

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que: $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

$$\begin{aligned}\det A &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot I_n) = \det F_r \cdot \det(F_{r-1} \cdots F_1 \cdot I_n) \\ &= \dots = \det F_r \cdots \det F_1\end{aligned}$$

2. Si A no es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que $A = F_r \cdots F_1 \cdot B$

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que: $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

$$\begin{aligned}\det A &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot I_n) = \det F_r \cdot \det(F_{r-1} \cdots F_1 \cdot I_n) \\ &= \dots = \det F_r \cdots \det F_1\end{aligned}$$

2. Si A no es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que $A = F_r \cdots F_1 \cdot B$
donde todas las entradas de la última fila de la matriz B son ceros.

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que: $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

$$\begin{aligned}\det A &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot I_n) = \det F_r \cdot \det(F_{r-1} \cdots F_1 \cdot I_n) \\ &= \dots = \det F_r \cdots \det F_1\end{aligned}$$

2. Si A no es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que $A = F_r \cdots F_1 \cdot B$
donde todas las entradas de la última fila de la matriz B son ceros.

$$\det A = \dots$$

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que: $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

$$\begin{aligned}\det A &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot I_n) = \det F_r \cdot \det(F_{r-1} \cdots F_1 \cdot I_n) \\ &= \dots = \det F_r \cdots \det F_1\end{aligned}$$

2. Si A no es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que $A = F_r \cdots F_1 \cdot B$
donde todas las entradas de la última fila de la matriz B son ceros.

$$\det A = \dots = \det F_r \cdots \det F_1 \cdot \det B$$

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que: $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

$$\begin{aligned}\det A &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot I_n) = \det F_r \cdot \det(F_{r-1} \cdots F_1 \cdot I_n) \\ &= \dots = \det F_r \cdots \det F_1\end{aligned}$$

2. Si A no es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que $A = F_r \cdots F_1 \cdot B$
donde todas las entradas de la última fila de la matriz B son ceros.

$$\det A = \dots = \det F_r \cdots \det F_1 \cdot \underbrace{\det B}_{=0}$$

Nota 3.13.

3.3. Propiedades de los determinantes

Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A .

1. Si A es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que: $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$

$$\begin{aligned}\det A &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot I_n) = \det F_r \cdot \det(F_{r-1} \cdots F_1 \cdot I_n) \\ &= \dots = \det F_r \cdots \det F_1\end{aligned}$$

2. Si A no es regular,

\exists matrices elementales F_1, \dots, F_r tales que $A = F_r \cdots F_1 \cdot B$ donde todas las entradas de la última fila de la matriz B son ceros.

$$\det A = \dots = \det F_r \cdots \det F_1 \cdot \underbrace{\det B}_{=0} = 0$$

Ejemplo 3.14.

3.3. Propiedades de los determinantes

Ejemplo 3.14.

3.3. Propiedades de los determinantes

Calculemos un determinante con este método:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 3.14.

3.3. Propiedades de los determinantes

Calculemos un determinante con este método:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 3.14.

3.3. Propiedades de los determinantes

Calculemos un determinante con este método:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 3.14.

3.3. Propiedades de los determinantes

Calculemos un determinante con este método:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 3.14.

3.3. Propiedades de los determinantes

Calculemos un determinante con este método:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

Propiedades 3.15.

3.3. Propiedades de los determinantes

Propiedades 3.15.

3.3. Propiedades de los determinantes

5. A es regular

Propiedades 3.15.

3.3. Propiedades de los determinantes

5. A es regular \iff

Propiedades 3.15.

3.3. Propiedades de los determinantes

5. A es regular $\iff \det A \neq 0$

Propiedades 3.15.

3.3. Propiedades de los determinantes

5. A es regular $\iff \det A \neq 0$

Demostración.

Propiedades 3.15.

3.3. Propiedades de los determinantes

5. A es regular $\iff \det A \neq 0$

Demostración.

Es el argumento de la nota 3.13. □

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

6. $\det(A \cdot B)$

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

$$6. \quad \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

6. $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$

Demostración.

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

6. $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$

Demostración.

Primero observamos que si uno de los términos es distinto de cero,

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

6. $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$

Demostración.

Primero observamos que si uno de los términos es distinto de cero, entonces el otro también es distinto de cero.

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

$$6. \quad \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Demostración.

Primero observamos que si uno de los términos es distinto de cero, entonces el otro también es distinto de cero.

$$\det(AB) \neq 0$$

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

$$6. \quad \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Demostración.

Primero observamos que si uno de los términos es distinto de cero, entonces el otro también es distinto de cero.

$$\det(AB) \neq 0 \iff AB \text{ regular}$$

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

$$6. \quad \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Demostración.

Primero observamos que si uno de los términos es distinto de cero, entonces el otro también es distinto de cero.

$$\det(AB) \neq 0 \iff AB \text{ regular} \iff A \text{ y } B \text{ regulares}$$

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

$$6. \quad \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Demostración.

Primero observamos que si uno de los términos es distinto de cero, entonces el otro también es distinto de cero.

$$\begin{aligned} \det(AB) \neq 0 &\iff AB \text{ regular} \iff A \text{ y } B \text{ regulares} \\ &\iff \det A \neq 0 \text{ y } \det B \neq 0 \end{aligned}$$

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

$$6. \quad \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Demostración.

Primero observamos que si uno de los términos es distinto de cero, entonces el otro también es distinto de cero.

$$\begin{aligned} \det(AB) \neq 0 &\iff AB \text{ regular} \iff A \text{ y } B \text{ regulares} \\ &\iff \det A \neq 0 \text{ y } \det B \neq 0 \\ &\iff (\det A) \cdot (\det B) \neq 0 \end{aligned}$$

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Supongamos pues que A y B son regulares.

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Supongamos pues que A y B son regulares.

\exists matrices elementales F_i, Q_j tales que:

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Supongamos pues que A y B son regulares.

\exists matrices elementales F_i, Q_j tales que: $A = F_r \cdots F_1$ $B = Q_s \cdots Q_1$

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Supongamos pues que A y B son regulares.

\exists matrices elementales F_i, Q_j tales que: $A = F_r \cdots F_1$ $B = Q_s \cdots Q_1$

$$\det(AB)$$

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Supongamos pues que A y B son regulares.

\exists matrices elementales F_i, Q_j tales que: $A = F_r \cdots F_1$ $B = Q_s \cdots Q_1$

$$\det(AB) = \det(F_r \cdots F_1 \cdot Q_s \cdots Q_1)$$

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Supongamos pues que A y B son regulares.

\exists matrices elementales F_i, Q_j tales que: $A = F_r \cdots F_1$ $B = Q_s \cdots Q_1$

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot Q_s \cdots Q_1) \\ &= (\det F_r) \cdots (\det F_1) \cdot (\det Q_s) \cdots (\det Q_1)\end{aligned}$$

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Supongamos pues que A y B son regulares.

\exists matrices elementales F_i, Q_j tales que: $A = F_r \cdots F_1$ $B = Q_s \cdots Q_1$

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot Q_s \cdots Q_1) \\ &= (\det F_r) \cdots (\det F_1) \cdot (\det Q_s) \cdots (\det Q_1) \\ &= \det(F_r \cdots F_1) \cdot \det(Q_s \cdots Q_1)\end{aligned}$$

Propiedades 3.16.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Supongamos pues que A y B son regulares.

\exists matrices elementales F_i, Q_j tales que: $A = F_r \cdots F_1$ $B = Q_s \cdots Q_1$

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot Q_s \cdots Q_1) \\ &= (\det F_r) \cdots (\det F_1) \cdot (\det Q_s) \cdots (\det Q_1) \\ &= \det(F_r \cdots F_1) \cdot \det(Q_s \cdots Q_1) = (\det A) \cdot (\det B)\end{aligned}$$



Consecuencia 3.17.

3.3. Propiedades de los determinantes

Consecuencia 3.17.

3.3. Propiedades de los determinantes

Si A es regular, entonces: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Consecuencia 3.17.

3.3. Propiedades de los determinantes

Si A es regular, entonces: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Demostración.

Consecuencia 3.17.

3.3. Propiedades de los determinantes

Si A es regular, entonces: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Demostración.

$$(\det A) \cdot (\det(A^{-1}))$$

Consecuencia 3.17.

3.3. Propiedades de los determinantes

Si A es regular, entonces: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Demostración.

$$(\det A) \cdot (\det(A^{-1})) = \det(A \cdot (A^{-1}))$$

Consecuencia 3.17.

3.3. Propiedades de los determinantes

Si A es regular, entonces: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Demostración.

$$(\det A) \cdot (\det(A^{-1})) = \det(A \cdot (A^{-1})) = \det(I_n)$$

Consecuencia 3.17.

3.3. Propiedades de los determinantes

Si A es regular, entonces: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Demostración.

$$(\det A) \cdot (\det(A^{-1})) = \det(A \cdot (A^{-1})) = \det(I_n) = 1$$



Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

7. $\det(A^T)$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

7. $\det(A^T) = \det A$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

7. $\det(A^T) = \det A$

Demostración.

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

7. $\det(A^T) = \det A$

Demostración.

El corolario 2.30 nos dice que,

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

7. $\det(A^T) = \det A$

Demostración.

El corolario 2.30 nos dice que, si A no es regular,

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

7. $\det(A^T) = \det A$

Demostración.

El corolario 2.30 nos dice que, si A no es regular, tampoco lo es A^T .

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

7. $\det(A^T) = \det A$

Demostración.

El corolario 2.30 nos dice que, si A no es regular, tampoco lo es A^T .
En tal caso:

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

7. $\det(A^T) = \det A$

Demostración.

El corolario 2.30 nos dice que, si A no es regular, tampoco lo es A^T .
En tal caso: $\det A = 0 = \det A^T$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

7. $\det(A^T) = \det A$

Demostración.

El corolario 2.30 nos dice que, si A no es regular, tampoco lo es A^T .

En tal caso: $\det A = 0 = \det A^T$

Supongamos pues que A es regular.

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

7. $\det(A^T) = \det A$

Demostración.

El corolario 2.30 nos dice que, si A no es regular, tampoco lo es A^T .

En tal caso: $\det A = 0 = \det A^T$

Supongamos pues que A es regular.

Existen matrices elementales F_i tales que:

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

7. $\det(A^T) = \det A$

Demostración.

El corolario 2.30 nos dice que, si A no es regular, tampoco lo es A^T .

En tal caso: $\det A = 0 = \det A^T$

Supongamos pues que A es regular.

Existen matrices elementales F_i tales que: $A = F_r \cdots F_1$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_2(\alpha)$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_2(\alpha) \quad F_{12}^T$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_2(\alpha) \qquad F_{12}^T = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}^T$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_2(\alpha)$$

$$F_{12}^T = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}^T = F_{12}$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_2(\alpha)$$

$$F_{12}^T = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}^T = F_{12}$$

$$F_{31}(\alpha)^T$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_2(\alpha)$$

$$F_{12}^T = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}^T = F_{12}$$

$$F_{31}(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ \alpha & & 1 \end{pmatrix}^T$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_2(\alpha) \qquad F_{12}^T = \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_{12}$$

$$F_{31}(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \\ \alpha & & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_2(\alpha) \qquad F_{12}^T = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}^T = F_{12}$$

$$F_{31}(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ \alpha & & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = F_{13}(\alpha)$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_2(\alpha) \qquad F_{12}^T = \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_{12}$$

$$F_{31}(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \\ \alpha & & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \alpha \\ & & 1 \end{pmatrix} = F_{13}(\alpha)$$

En los tres casos,

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_2(\alpha) \qquad F_{12}^T = \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_{12}$$

$$F_{31}(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \\ \alpha & & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = F_{13}(\alpha)$$

En los tres casos, si F es una matriz elemental,

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_2(\alpha) \qquad F_{12}^T = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}^T = F_{12}$$

$$F_{31}(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ \alpha & & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \alpha \\ & & 1 \end{pmatrix} = F_{13}(\alpha)$$

En los tres casos, si F es una matriz elemental, entonces F^T también es elemental y:

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_2(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_2(\alpha) \qquad F_{12}^T = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T = F_{12}$$

$$F_{31}(\alpha)^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ \alpha & & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = F_{13}(\alpha)$$

En los tres casos, si F es una matriz elemental, entonces F^T también es elemental y: $\det F^T = \det F$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Por tanto:

$$\det A^T$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Por tanto:

$$\det A^T = \det(F_r \cdots F_1)^T$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Por tanto:

$$\det A^T = \det(F_r \cdots F_1)^T = \det(F_1^T \cdots F_r^T)$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Por tanto:

$$\begin{aligned}\det A^T &= \det(F_r \cdots F_1)^T = \det(F_1^T \cdots F_r^T) \\ &= (\det F_1^T) \cdots (\det F_r^T)\end{aligned}$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Por tanto:

$$\begin{aligned}\det A^T &= \det(F_r \cdots F_1)^T = \det(F_1^T \cdots F_r^T) \\ &= (\det F_1^T) \cdots (\det F_r^T) = (\det F_1) \cdots (\det F_r)\end{aligned}$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Por tanto:

$$\begin{aligned}\det A^T &= \det(F_r \cdots F_1)^T = \det(F_1^T \cdots F_r^T) \\ &= (\det F_1^T) \cdots (\det F_r^T) = (\det F_1) \cdots (\det F_r) \\ &= (\det F_r) \cdots (\det F_1)\end{aligned}$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Por tanto:

$$\begin{aligned}\det A^T &= \det(F_r \cdots F_1)^T = \det(F_1^T \cdots F_r^T) \\ &= (\det F_1^T) \cdots (\det F_r^T) = (\det F_1) \cdots (\det F_r) \\ &= (\det F_r) \cdots (\det F_1) = \det(F_r \cdots F_1)\end{aligned}$$

Propiedades 3.18.

3.3. Propiedades de los determinantes

Demostración.

Por tanto:

$$\begin{aligned}\det A^T &= \det(F_r \cdots F_1)^T = \det(F_1^T \cdots F_r^T) \\ &= (\det F_1^T) \cdots (\det F_r^T) = (\det F_1) \cdots (\det F_r) \\ &= (\det F_r) \cdots (\det F_1) = \det(F_r \cdots F_1) = \det A\end{aligned}$$



Ejercicios 3.19.

3.3. Propiedades de los determinantes

- 3.7
- 3.8

Capítulo 3. Determinantes

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

3.3. Propiedades de los determinantes

3.4. Matriz adjunta

3.5. Signatura

Ejercicios determinantes

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

8. El determinante es suma de los elementos de una fila por sus adjuntos,

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

8. El determinante es suma de los elementos de una fila por sus adjuntos,

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj}$$

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

8. El determinante es suma de los elementos de una fila por sus adjuntos, o también suma de los elementos de una columna por sus adjuntos:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj}$$

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

8. El determinante es suma de los elementos de una fila por sus adjuntos, o también suma de los elementos de una columna por sus adjuntos:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj} = \sum_{i=1}^n a_{is} A_{is}$$

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

8. El determinante es suma de los elementos de una fila por sus adjuntos, o también suma de los elementos de una columna por sus adjuntos:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj} = \sum_{i=1}^n a_{is} A_{is}$$

Demostración.

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

8. El determinante es suma de los elementos de una fila por sus adjuntos, o también suma de los elementos de una columna por sus adjuntos:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj} = \sum_{i=1}^n a_{is} A_{is}$$

Demostración.

Si $s = 1$, es la definición de determinante.

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

8. El determinante es suma de los elementos de una fila por sus adjuntos, o también suma de los elementos de una columna por sus adjuntos:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj} = \sum_{i=1}^n a_{is} A_{is}$$

Demostración.

Si $s = 1$, es la definición de determinante.

Si $r = 1$, es consecuencia de que $\det A^T = \det A$.

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

8. El determinante es suma de los elementos de una fila por sus adjuntos, o también suma de los elementos de una columna por sus adjuntos:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj} = \sum_{i=1}^n a_{is} A_{is}$$

Demostración.

Si $s = 1$, es la definición de determinante.

Si $r = 1$, es consecuencia de que $\det A^T = \det A$.

En la siguiente diapositiva probaremos el caso $r = 2$ a partir de $r = 1$.

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

8. El determinante es suma de los elementos de una fila por sus adjuntos, o también suma de los elementos de una columna por sus adjuntos:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj} = \sum_{i=1}^n a_{is} A_{is}$$

Demostración.

Si $s = 1$, es la definición de determinante.

Si $r = 1$, es consecuencia de que $\det A^T = \det A$.

En la siguiente diapositiva probaremos el caso $r = 2$ a partir de $r = 1$. Repitiendo los mismos argumentos se harían los casos $r = 3, \dots, n$.

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

8. El determinante es suma de los elementos de una fila por sus adjuntos, o también suma de los elementos de una columna por sus adjuntos:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj} = \sum_{i=1}^n a_{is} A_{is}$$

Demostración.

Si $s = 1$, es la definición de determinante.

Si $r = 1$, es consecuencia de que $\det A^T = \det A$.

En la siguiente diapositiva probaremos el caso $r = 2$ a partir de $r = 1$.

Repitiendo los mismos argumentos se harían los casos $r = 3, \dots, n$.

Finalmente, como $\det A^T = \det A$, tenemos también los casos $s = 2, \dots, n$.

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj}$$

Demostración.

Probemos el caso $r = 2$ a partir del caso $r = 1$.

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj}$$

Demostración.

Probemos el caso $r = 2$ a partir del caso $r = 1$.

Sea $B = F_{12}A$ la matriz formada al intercambiar las filas 1 y 2 de A :

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj}$$

Demostración.

Probemos el caso $r = 2$ a partir del caso $r = 1$.

Sea $B = F_{12}A$ la matriz formada al intercambiar las filas 1 y 2 de A :

$\det A$

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj}$$

Demostración.

Probemos el caso $r = 2$ a partir del caso $r = 1$.

Sea $B = F_{12}A$ la matriz formada al intercambiar las filas 1 y 2 de A :

$$\det A = -\det B$$

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj}$$

Demostración.

Probemos el caso $r = 2$ a partir del caso $r = 1$.

Sea $B = F_{12}A$ la matriz formada al intercambiar las filas 1 y 2 de A :

$$\det A = -\det B = -\sum_{j=1}^n b_{1j} B_{1j}$$

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj}$$

Demostración.

Probemos el caso $r = 2$ a partir del caso $r = 1$.

Sea $B = F_{12}A$ la matriz formada al intercambiar las filas 1 y 2 de A :

$$\det A = -\det B = -\sum_{j=1}^n b_{1j} B_{1j} = -\sum_{j=1}^n b_{1j} (-1)^{1+j} \det M_{1j}^B$$

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj}$$

Demostración.

Probemos el caso $r = 2$ a partir del caso $r = 1$.

Sea $B = F_{12}A$ la matriz formada al intercambiar las filas 1 y 2 de A :

$$\begin{aligned}\det A &= -\det B = -\sum_{j=1}^n b_{1j} B_{1j} = -\sum_{j=1}^n b_{1j} (-1)^{1+j} \det M_{1j}^B \\ &= \sum_{j=1}^n a_{2j} (-1)^{2+j} \det M_{2j}^A\end{aligned}$$

Propiedades 3.20.

3.4. Matriz adjunta

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} A_{rj}$$

Demostración.

Probemos el caso $r = 2$ a partir del caso $r = 1$.

Sea $B = F_{12}A$ la matriz formada al intercambiar las filas 1 y 2 de A :

$$\begin{aligned} \det A &= -\det B = -\sum_{j=1}^n b_{1j} B_{1j} = -\sum_{j=1}^n b_{1j} (-1)^{1+j} \det M_{1j}^B \\ &= \sum_{j=1}^n a_{2j} (-1)^{2+j} \det M_{2j}^A = \sum_{j=1}^n a_{2j} A_{2j} \end{aligned}$$



Definición 3.21.

3.4. Matriz adjunta

Definición 3.21.

3.4. Matriz adjunta

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Definición 3.21.

3.4. Matriz adjunta

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

La **adjunta** de A es la matriz traspuesta de la matriz de adjuntos.

Definición 3.21.

3.4. Matriz adjunta

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

La **adjunta** de A es la matriz traspuesta de la matriz de adjuntos.

Es decir, $\text{adj } A \in M_n(\mathbb{F})$

Definición 3.21.

3.4. Matriz adjunta

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

La **adjunta** de A es la matriz traspuesta de la matriz de adjuntos.

Es decir, $\text{adj } A \in M_n(\mathbb{F})$ y la entrada (i, j) de $\text{adj } A$ es el adjunto (j, i) de A :

Definición 3.21.

3.4. Matriz adjunta

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.

La **adjunta** de A es la matriz traspuesta de la matriz de adjuntos.

Es decir, $\text{adj } A \in M_n(\mathbb{F})$ y la entrada (i, j) de $\text{adj } A$ es el adjunto (j, i) de A :

$$(\text{adj } A)_{ij} = A_{ji}$$

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

9. $A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

$$9. \quad A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$$

Demostración.

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

$$9. \quad A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$$

Demostración.

La entrada (i, i) de la matriz $A \cdot (\text{adj } A)$ es

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

$$9. \quad A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$$

Demostración.

La entrada (i, i) de la matriz $A \cdot (\text{adj } A)$ es la suma de los elementos de la fila i por sus adjuntos,

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

$$9. \quad A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$$

Demostración.

La entrada (i, i) de la matriz $A \cdot (\text{adj } A)$ es la suma de los elementos de la fila i por sus adjuntos, es decir, $\det A$.

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

$$9. \quad A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$$

Demostración.

La entrada (i, i) de la matriz $A \cdot (\text{adj } A)$ es la suma de los elementos de la fila i por sus adjuntos, es decir, $\det A$.

Veamos que, si $i \neq j$, entonces la entrada (i, j) de dicha matriz es cero.

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

$$9. \quad A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$$

Demostración.

La entrada (i, i) de la matriz $A \cdot (\text{adj } A)$ es la suma de los elementos de la fila i por sus adjuntos, es decir, $\det A$.

Veamos que, si $i \neq j$, entonces la entrada (i, j) de dicha matriz es cero.

Sea B la matriz formada al sustituir la fila j de A por la fila i de A

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

$$9. \quad A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$$

Demostración.

La entrada (i, i) de la matriz $A \cdot (\text{adj } A)$ es la suma de los elementos de la fila i por sus adjuntos, es decir, $\det A$.

Veamos que, si $i \neq j$, entonces la entrada (i, j) de dicha matriz es cero.

Sea B la matriz formada al sustituir la fila j de A por la fila i de A (luego las filas i y j de B coinciden).

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

$$9. \quad A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$$

Demostración.

La entrada (i, i) de la matriz $A \cdot (\text{adj } A)$ es la suma de los elementos de la fila i por sus adjuntos, es decir, $\det A$.

Veamos que, si $i \neq j$, entonces la entrada (i, j) de dicha matriz es cero.

Sea B la matriz formada al sustituir la fila j de A por la fila i de A (luego las filas i y j de B coinciden).

$$(A \cdot (\text{adj } A))_{ij}$$

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

$$9. \quad A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$$

Demostración.

La entrada (i, i) de la matriz $A \cdot (\text{adj } A)$ es la suma de los elementos de la fila i por sus adjuntos, es decir, $\det A$.

Veamos que, si $i \neq j$, entonces la entrada (i, j) de dicha matriz es cero.

Sea B la matriz formada al sustituir la fila j de A por la fila i de A (luego las filas i y j de B coinciden).

$$(A \cdot (\text{adj } A))_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot (\text{adj } A)_{kj}$$

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

$$9. \quad A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$$

Demostración.

La entrada (i, i) de la matriz $A \cdot (\text{adj } A)$ es la suma de los elementos de la fila i por sus adjuntos, es decir, $\det A$.

Veamos que, si $i \neq j$, entonces la entrada (i, j) de dicha matriz es cero.

Sea B la matriz formada al sustituir la fila j de A por la fila i de A (luego las filas i y j de B coinciden).

$$(A \cdot (\text{adj } A))_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot (\text{adj } A)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}$$

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

$$9. \quad A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$$

Demostración.

La entrada (i, i) de la matriz $A \cdot (\text{adj } A)$ es la suma de los elementos de la fila i por sus adjuntos, es decir, $\det A$.

Veamos que, si $i \neq j$, entonces la entrada (i, j) de dicha matriz es cero.

Sea B la matriz formada al sustituir la fila j de A por la fila i de A (luego las filas i y j de B coinciden).

$$\begin{aligned}(A \cdot (\text{adj } A))_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot (\text{adj } A)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{jk} B_{jk}\end{aligned}$$

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

$$9. \quad A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$$

Demostración.

La entrada (i, i) de la matriz $A \cdot (\text{adj } A)$ es la suma de los elementos de la fila i por sus adjuntos, es decir, $\det A$.

Veamos que, si $i \neq j$, entonces la entrada (i, j) de dicha matriz es cero.

Sea B la matriz formada al sustituir la fila j de A por la fila i de A (luego las filas i y j de B coinciden).

$$\begin{aligned}(A \cdot (\text{adj } A))_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot (\text{adj } A)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{jk} B_{jk} = \det B\end{aligned}$$

Propiedades 3.22.

3.4. Matriz adjunta

$$9. \quad A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot I_n$$

Demostración.

La entrada (i, i) de la matriz $A \cdot (\text{adj } A)$ es la suma de los elementos de la fila i por sus adjuntos, es decir, $\det A$.

Veamos que, si $i \neq j$, entonces la entrada (i, j) de dicha matriz es cero.

Sea B la matriz formada al sustituir la fila j de A por la fila i de A (luego las filas i y j de B coinciden).

$$\begin{aligned}(A \cdot (\text{adj } A))_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot (\text{adj } A)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{jk} B_{jk} = \det B = 0\end{aligned}$$



Corolario 3.23.

3.4. Matriz adjunta

Si A es regular, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz regular,

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz regular,
y sea $b \in \mathbb{F}^n$ un vector columna.

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz regular,
y sea $b \in \mathbb{F}^n$ un vector columna.

Entonces la solución del sistema $AX = b$ es

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz regular, y sea $b \in \mathbb{F}^n$ un vector columna.

Entonces la solución del sistema $AX = b$ es

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A} \quad j = 1, \dots, n$$

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz regular, y sea $b \in \mathbb{F}^n$ un vector columna.

Entonces la solución del sistema $AX = b$ es

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A} \quad j = 1, \dots, n$$

donde B_j es la matriz que resulta de sustituir la columna j de A por b .

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Demostración.

Calculamos el determinante de B_j

sumando los elementos de la columna j por sus adjuntos:

$$\det B_j = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij}$$

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Demostración.

Calculamos el determinante de B_j

sumando los elementos de la columna j por sus adjuntos:

$$\det B_j = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij} = \sum_{i=1}^n (\text{adj } A)_{ji} \cdot b_i$$

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Demostración.

Calculamos el determinante de B_j

sumando los elementos de la columna j por sus adjuntos:

$$\det B_j = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij} = \sum_{i=1}^n (\text{adj } A)_{ji} \cdot b_i = (\text{fila } j \text{ de } \text{adj } A) \cdot b$$

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Demostración.

Calculamos el determinante de B_j

sumando los elementos de la columna j por sus adjuntos:

$$\det B_j = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij} = \sum_{i=1}^n (\text{adj } A)_{ji} \cdot b_i = (\text{fila } j \text{ de } \text{adj } A) \cdot b$$

La solución del sistema es

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Demostración.

Calculamos el determinante de B_j

sumando los elementos de la columna j por sus adjuntos:

$$\det B_j = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij} = \sum_{i=1}^n (\text{adj } A)_{ji} \cdot b_i = (\text{fila } j \text{ de } \text{adj } A) \cdot b$$

La solución del sistema es $X = A^{-1}b$

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Demostración.

Calculamos el determinante de B_j

sumando los elementos de la columna j por sus adjuntos:

$$\det B_j = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij} = \sum_{i=1}^n (\operatorname{adj} A)_{ji} \cdot b_i = (\text{fila } j \text{ de } \operatorname{adj} A) \cdot b$$

La solución del sistema es $X = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} \cdot (\operatorname{adj} A) \cdot b$.

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Demostración.

Calculamos el determinante de B_j

sumando los elementos de la columna j por sus adjuntos:

$$\det B_j = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij} = \sum_{i=1}^n (\text{adj } A)_{ji} \cdot b_i = (\text{fila } j \text{ de } \text{adj } A) \cdot b$$

La solución del sistema es $X = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{adj } A) \cdot b$.

$$x_j = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{fila } j \text{ de } \text{adj } A) \cdot b$$

Nota 3.24 (Regla de Cramer).

3.4. Matriz adjunta

Demostración.

Calculamos el determinante de B_j

sumando los elementos de la columna j por sus adjuntos:

$$\det B_j = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij} = \sum_{i=1}^n (\text{adj } A)_{ji} \cdot b_i = (\text{fila } j \text{ de } \text{adj } A) \cdot b$$

La solución del sistema es $X = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{adj } A) \cdot b$.

$$x_j = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{fila } j \text{ de } \text{adj } A) \cdot b = \frac{1}{\det A} \cdot \det B_j$$



Ejercicios 3.25.

3.4. Matriz adjunta

- 3.9
- 3.10
- 3.11
- 3.12

Capítulo 3. Determinantes

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

3.3. Propiedades de los determinantes

3.4. Matriz adjunta

3.5. Signatura

Ejercicios determinantes

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\hspace{15em}}^{24 \text{ sumandos}}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{2}^{24 \text{ sumandos}}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{2 \cdot 8}^{24 \text{ sumandos}}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{2 \cdot 8 \cdot 9}^{24 \text{ sumandos}}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15}^{24 \text{ sumandos}}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15}^{24 \text{ sumandos}}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15}^{24 \text{ sumandos}} \pm 1$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8}^{24 \text{ sumandos}}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10}^{24 \text{ sumandos}}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15}^{24 \text{ sumandos}}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{24 \text{ sumandos}}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{\pm 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{-2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{-2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{-2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{-2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{-2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 \pm 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \overbrace{-2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15 + 1 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \pm \dots}^{4! = 24 \text{ sumandos}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos el polinomio p_n en las variables X_{ij} como $p_n = \det((X_{ij})_{i,j=1}^n)$.

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos el polinomio p_n en las variables X_{ij} como $p_n = \det((X_{ij})_{i,j=1}^n)$.

$$p_1 = \left| X_{11} \right| = X_{11}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos el polinomio p_n en las variables X_{ij} como $p_n = \det((X_{ij})_{i,j=1}^n)$.

$$p_1 = \begin{vmatrix} X_{11} \end{vmatrix} = X_{11}$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos el polinomio p_n en las variables X_{ij} como $p_n = \det((X_{ij})_{i,j=1}^n)$.

$$p_1 = \begin{vmatrix} X_{11} \end{vmatrix} = X_{11}$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} = +X_{11}X_{22} - X_{21}X_{12}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos el polinomio p_n en las variables X_{ij} como $p_n = \det((X_{ij})_{i,j=1}^n)$.

$$p_1 = \begin{vmatrix} X_{11} \end{vmatrix} = X_{11}$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} = +X_{11}X_{22} - X_{21}X_{12}$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos el polinomio p_n en las variables X_{ij} como $p_n = \det((X_{ij})_{i,j=1}^n)$.

$$p_1 = \begin{vmatrix} X_{11} \end{vmatrix} = X_{11}$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} = +X_{11}X_{22} - X_{21}X_{12}$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix} = +X_{11}X_{22}X_{33} + X_{21}X_{32}X_{13} + X_{31}X_{12}X_{23} \\ - X_{31}X_{22}X_{13} - X_{11}X_{32}X_{23} - X_{21}X_{12}X_{33}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos el polinomio p_n en las variables X_{ij} como $p_n = \det((X_{ij})_{i,j=1}^n)$.

$$p_1 = \begin{vmatrix} X_{11} \end{vmatrix} = X_{11}$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} = +X_{11}X_{22} - X_{21}X_{12}$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix} = +X_{11}X_{22}X_{33} + X_{21}X_{32}X_{13} + X_{31}X_{12}X_{23} \\ - X_{31}X_{22}X_{13} - X_{11}X_{32}X_{23} - X_{21}X_{12}X_{33}$$

Por inducción, vemos que p_n es un polinomio homogéneo de grado n ,

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos el polinomio p_n en las variables X_{ij} como $p_n = \det((X_{ij})_{i,j=1}^n)$.

$$p_1 = \begin{vmatrix} X_{11} \end{vmatrix} = X_{11}$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} = +X_{11}X_{22} - X_{21}X_{12}$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix} = +X_{11}X_{22}X_{33} + X_{21}X_{32}X_{13} + X_{31}X_{12}X_{23} \\ - X_{31}X_{22}X_{13} - X_{11}X_{32}X_{23} - X_{21}X_{12}X_{33}$$

Por inducción, vemos que p_n es un polinomio homogéneo de grado n , es decir, es suma de monomios de grado n .

Observación 3.26.

3.5. Signatura

¿Cuál es el coeficiente que multiplica a cada monomio?

Observación 3.26.

3.5. Signatura

¿Cuál es el coeficiente que multiplica a cada monomio? Para calcularlo, evaluamos el polinomio haciendo las variables del monomio igual a 1 y el resto 0.

Observación 3.26.

3.5. Signatura

¿Cuál es el coeficiente que multiplica a cada monomio? Para calcularlo, evaluamos el polinomio haciendo las variables del monomio igual a 1 y el resto 0. Por ejemplo, si $n = 3$:

Observación 3.26.

3.5. Signatura

¿Cuál es el coeficiente que multiplica a cada monomio? Para calcularlo, evaluamos el polinomio haciendo las variables del monomio igual a 1 y el resto 0. Por ejemplo, si $n = 3$:

- El coeficiente de $X_{11}X_{32}X_{23}$ es:

Observación 3.26.

3.5. Signatura

¿Cuál es el coeficiente que multiplica a cada monomio? Para calcularlo, evaluamos el polinomio haciendo las variables del monomio igual a 1 y el resto 0. Por ejemplo, si $n = 3$:

- El coeficiente de $X_{11}X_{32}X_{23}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

¿Cuál es el coeficiente que multiplica a cada monomio? Para calcularlo, evaluamos el polinomio haciendo las variables del monomio igual a 1 y el resto 0. Por ejemplo, si $n = 3$:

- El coeficiente de $X_{11}X_{32}X_{23}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

¿Cuál es el coeficiente que multiplica a cada monomio? Para calcularlo, evaluamos el polinomio haciendo las variables del monomio igual a 1 y el resto 0. Por ejemplo, si $n = 3$:

- El coeficiente de $X_{11}X_{32}X_{23}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

¿Cuál es el coeficiente que multiplica a cada monomio? Para calcularlo, evaluamos el polinomio haciendo las variables del monomio igual a 1 y el resto 0. Por ejemplo, si $n = 3$:

- El coeficiente de $X_{11}X_{32}X_{23}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

- El coeficiente de $X_{11}X_{22}X_{23}$ es:

Observación 3.26.

3.5. Signatura

¿Cuál es el coeficiente que multiplica a cada monomio? Para calcularlo, evaluamos el polinomio haciendo las variables del monomio igual a 1 y el resto 0. Por ejemplo, si $n = 3$:

- El coeficiente de $X_{11}X_{32}X_{23}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

- El coeficiente de $X_{11}X_{22}X_{23}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

¿Cuál es el coeficiente que multiplica a cada monomio? Para calcularlo, evaluamos el polinomio haciendo las variables del monomio igual a 1 y el resto 0. Por ejemplo, si $n = 3$:

- El coeficiente de $X_{11}X_{32}X_{23}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

- El coeficiente de $X_{11}X_{22}X_{23}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Como el determinante de una matriz que tiene o bien una fila nula o bien una columna nula es cero,

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Como el determinante de una matriz que tiene o bien una fila nula o bien una columna nula es cero, los únicos monomios con coeficiente distinto de cero son

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Como el determinante de una matriz que tiene o bien una fila nula o bien una columna nula es cero, los únicos monomios con coeficiente distinto de cero son los de la forma

$$X_{\sigma(1),1} X_{\sigma(2),2} \cdots X_{\sigma(n),n}$$

donde σ es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$,

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Como el determinante de una matriz que tiene o bien una fila nula o bien una columna nula es cero, los únicos monomios con coeficiente distinto de cero son los de la forma

$$X_{\sigma(1),1} X_{\sigma(2),2} \cdots X_{\sigma(n),n} = \prod_{i=1}^n X_{\sigma(i),i}$$

donde σ es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$,

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Como el determinante de una matriz que tiene o bien una fila nula o bien una columna nula es cero, los únicos monomios con coeficiente distinto de cero son los de la forma

$$X_{\sigma(1),1} X_{\sigma(2),2} \cdots X_{\sigma(n),n} = \prod_{i=1}^n X_{\sigma(i),i}$$

donde σ es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$, es decir, $\sigma \in S_n$.

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Como el determinante de una matriz que tiene o bien una fila nula o bien una columna nula es cero, los únicos monomios con coeficiente distinto de cero son los de la forma

$$X_{\sigma(1),1} X_{\sigma(2),2} \cdots X_{\sigma(n),n} = \prod_{i=1}^n X_{\sigma(i),i}$$

donde σ es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$, es decir, $\sigma \in S_n$.

Por ejemplo, si $n = 3$, la permutación $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$

Observación 3.26.

3.5. Signatura

Como el determinante de una matriz que tiene o bien una fila nula o bien una columna nula es cero, los únicos monomios con coeficiente distinto de cero son los de la forma

$$X_{\sigma(1),1} X_{\sigma(2),2} \cdots X_{\sigma(n),n} = \prod_{i=1}^n X_{\sigma(i),i}$$

donde σ es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$, es decir, $\sigma \in S_n$.

Por ejemplo, si $n = 3$, la permutación $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$ se corresponde con el monomio $X_{21} X_{32} X_{13}$.

Definición 3.27.

3.5. Signatura

Definición 3.27.

3.5. Signatura

A cada permutación $\sigma \in S_n$ le asociamos

Definición 3.27.

3.5. Signatura

A cada permutación $\sigma \in S_n$ le asociamos la matriz por columnas $A_\sigma = (e_{\sigma(1)} | \dots | e_{\sigma(n)})$,

Definición 3.27.

3.5. Signatura

A cada permutación $\sigma \in S_n$ le asociamos la matriz por columnas $A_\sigma = (e_{\sigma(1)} | \dots | e_{\sigma(n)})$, donde e_1, \dots, e_n son los vectores de la base canónica.

Definición 3.27.

3.5. Signatura

A cada permutación $\sigma \in S_n$ le asociamos la matriz por columnas $A_\sigma = (e_{\sigma(1)} | \dots | e_{\sigma(n)})$, donde e_1, \dots, e_n son los vectores de la base canónica.

Definimos la **signatura** de σ como el determinante de A_σ :

Definición 3.27.

3.5. Signatura

A cada permutación $\sigma \in S_n$ le asociamos la matriz por columnas $A_\sigma = (e_{\sigma(1)} | \dots | e_{\sigma(n)})$, donde e_1, \dots, e_n son los vectores de la base canónica.

Definimos la **signatura** de σ como el determinante de A_σ :

$$\operatorname{sgn} \sigma = \det A_\sigma$$

Definición 3.27.

3.5. Signatura

A cada permutación $\sigma \in S_n$ le asociamos la matriz por columnas $A_\sigma = (e_{\sigma(1)} | \dots | e_{\sigma(n)})$, donde e_1, \dots, e_n son los vectores de la base canónica.

Definimos la **signatura** de σ como el determinante de A_σ :

$$\operatorname{sgn} \sigma = \det A_\sigma \in \{\pm 1\}$$

Propiedades 3.28.

3.5. Signatura

Propiedades 3.28.

3.5. Signatura

10. El determinante es:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$$

Demostración.

Observación 3.26. □

Propiedad 3.29.

3.5. Signatura

Propiedad 3.29.

3.5. Signatura

Para todas permutaciones $\sigma, \tau \in S_n$ se cumple que:

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot (\operatorname{sgn} \tau)$$

Demostración.

Ejercicio 3.13.



Ejercicios 3.30.

3.5. Signatura

- 3.13
- 3.14
- 3.15
- 3.16

Capítulo 3. Determinantes

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

3.3. Propiedades de los determinantes

3.4. Matriz adjunta

3.5. Signatura

Ejercicios determinantes

Ejercicios determinantes

▶ Ejercicio 3.1.1.

▶ Ejercicio 3.1.2.

▶ Ejercicio 3.1.3.

▶ Ejercicio 3.5.1.

▶ Ejercicio 3.5.2.

▶ Ejercicio 3.12.

▶ Ejercicio 3.13.

Ejercicio 3.1.1.

Ejercicio 3.1.1.

$$\text{tr}(A + B) =$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) =$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) =$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) =$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) =$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + b_{11} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) =$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + b_{11} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) = (a_{11} + \cdots + a_{nn})$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + b_{11} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) = (a_{11} + \cdots + a_{nn}) \quad (b_{11} + \cdots + b_{nn})$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + b_{11} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) = (a_{11} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + \cdots + b_{nn})$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + b_{11} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) = (a_{11} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + \cdots + b_{nn})$$

$$\operatorname{tr}(\lambda A) =$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + b_{11} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) = (a_{11} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + \cdots + b_{nn})$$

$$\operatorname{tr}(\lambda A) =$$

$$\lambda(\operatorname{tr} A) =$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + b_{11} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) = (a_{11} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + \cdots + b_{nn})$$

$$\operatorname{tr}(\lambda A) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda(\operatorname{tr} A) =$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + b_{11} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) = (a_{11} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + \cdots + b_{nn})$$

$$\operatorname{tr}(\lambda A) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda(\operatorname{tr} A) =$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + b_{11} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) = (a_{11} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + \cdots + b_{nn})$$

$$\operatorname{tr}(\lambda A) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda a_{11} + \cdots + \lambda a_{nn}$$

$$\lambda(\operatorname{tr} A) =$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + b_{11} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) = (a_{11} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + \cdots + b_{nn})$$

$$\operatorname{tr}(\lambda A) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda a_{11} + \cdots + \lambda a_{nn}$$

$$\lambda(\operatorname{tr} A) = (\lambda a_{11} + \cdots + \lambda a_{nn})$$

Ejercicio 3.1.1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + b_{11} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$(\operatorname{tr} A) + (\operatorname{tr} B) = (a_{11} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + \cdots + b_{nn})$$

$$\operatorname{tr}(\lambda A) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda a_{11} + \cdots + \lambda a_{nn}$$

$$\lambda(\operatorname{tr} A) = \lambda(a_{11} + \cdots + a_{nn})$$

Ejercicio 3.1.2.

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} =$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \left(\overbrace{\hspace{10em}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \right)$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\left(\right)}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\left(\right)}^{\text{columna } j \text{ de } B}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} \phantom{a_{i1}} \\ \\ \phantom{a_{in}} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que:

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} =$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) =$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

$$\text{tr}(BA)$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

$$\text{tr}(BA) \underline{\underline{\text{simetría } A \leftrightarrow B}}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

$$\text{tr}(BA) \xrightarrow{\text{simetría } A \leftrightarrow B} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

$$\text{tr}(BA) \xrightarrow{\text{simetría } A \leftrightarrow B} \sum_{i,k=1}^n b_{ik}a_{ki}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

$$\text{tr}(BA) \xrightarrow{\text{simetría } A \leftrightarrow B} \sum_{i,k=1}^n b_{ik}a_{ki} = \sum_{r,s=1}^n$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

$$\text{tr}(BA) \xrightarrow{\text{simetría } A \leftrightarrow B} \sum_{i,k=1}^n b_{ik}a_{ki} = \sum_{r,s=1}^n b_{rs}a_{sr}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

$$\text{tr}(BA) \xrightarrow{\text{simetría } A \leftrightarrow B} \sum_{i,k=1}^n b_{ik}a_{ki} = \sum_{r,s=1}^n b_{rs}a_{sr} = \sum_{k,i=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

$$\text{tr}(BA) \xrightarrow{\text{simetría } A \leftrightarrow B} \sum_{i,k=1}^n b_{ik}a_{ki} = \sum_{r,s=1}^n b_{rs}a_{sr} = \sum_{k,i=1}^n a_{ik}$$

Ejercicio 3.1.2.

$$(AB)_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}^{\text{fila } i \text{ de } A} \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}^{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Por simetría $A \leftrightarrow B$ también deducimos que: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

$$\text{tr}(BA) \xrightarrow{\text{simetría } A \leftrightarrow B} \sum_{i,k=1}^n b_{ik}a_{ki} = \sum_{r,s=1}^n b_{rs}a_{sr} = \sum_{k,i=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

Ejercicio 3.1.3.

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es base del espacio inicial,

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es base del espacio inicial,
y f es lineal,

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es base del espacio inicial,
y f es lineal, f está determinada por:

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es base del espacio inicial,
y f es lineal, f está determinada por:

$$\lambda_{11} = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{12} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{21} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{22} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Como $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ es base del espacio inicial,
y f es lineal, f está determinada por:

$$\lambda_{11} = f\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad \lambda_{12} = f\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad \lambda_{21} = f\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad \lambda_{22} = f\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

En efecto:

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es base del espacio inicial,
y f es lineal, f está determinada por:

$$\lambda_{11} = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{12} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{21} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{22} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

En efecto:

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) =$$

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es base del espacio inicial,
y f es lineal, f está determinada por:

$$\lambda_{11} = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{12} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{21} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{22} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

En efecto:

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}\right)$$

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es base del espacio inicial,
y f es lineal, f está determinada por:

$$\lambda_{11} = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{12} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{21} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{22} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

En efecto:

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = f\left(a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es base del espacio inicial,
y f es lineal, f está determinada por:

$$\lambda_{11} = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{12} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{21} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{22} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) &= f\left(a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= a_{11}\lambda_{11} + a_{12}\lambda_{12} + a_{21}\lambda_{21} + a_{22}\lambda_{22} \end{aligned}$$

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es base del espacio inicial,
y f es lineal, f está determinada por:

$$\lambda_{11} = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{12} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{21} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{22} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) &= f\left(a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= a_{11}\lambda_{11} + a_{12}\lambda_{12} + a_{21}\lambda_{21} + a_{22}\lambda_{22} \end{aligned}$$

Recordamos que: $\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = a_{11} + a_{22}$

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es base del espacio inicial,
y f es lineal, f está determinada por:

$$\lambda_{11} = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{12} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{21} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{22} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) &= f\left(a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= a_{11}\lambda_{11} + a_{12}\lambda_{12} + a_{21}\lambda_{21} + a_{22}\lambda_{22} \end{aligned}$$

Recordamos que: $\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = a_{11} + a_{22}$ Luego debemos probar que:

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es base del espacio inicial,
y f es lineal, f está determinada por:

$$\lambda_{11} = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{12} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{21} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{22} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) &= f\left(a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= a_{11}\lambda_{11} + a_{12}\lambda_{12} + a_{21}\lambda_{21} + a_{22}\lambda_{22} \end{aligned}$$

Recordamos que: $\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = a_{11} + a_{22}$ Luego debemos probar que:

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$$

Ejercicio 3.1.3.

$$n = 2$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es base del espacio inicial,
y f es lineal, f está determinada por:

$$\lambda_{11} = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{12} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{21} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda_{22} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) &= f\left(a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= a_{11}\lambda_{11} + a_{12}\lambda_{12} + a_{21}\lambda_{21} + a_{22}\lambda_{22} \end{aligned}$$

Recordamos que: $\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = a_{11} + a_{22}$ Luego debemos probar que:

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0 \quad \lambda_{11} = \lambda_{22}$$

Ejercicio 3.1.3.

Sea F la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F\right) = f\left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F\right) = f\left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda_{12}$$

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda_{12}$$

Luego $\lambda_{12} = 0$.

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda_{12}$$

Luego $\lambda_{12} = 0$. Análogamente $\lambda_{21} = 0$.

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda_{12}$$

Luego $\lambda_{12} = 0$. Análogamente $\lambda_{21} = 0$.

Sea G la matriz elemental que intercambia las filas 1 y 2.

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda_{12}$$

Luego $\lambda_{12} = 0$. Análogamente $\lambda_{21} = 0$.

Sea $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que intercambia las filas 1 y 2.

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda_{12}$$

Luego $\lambda_{12} = 0$. Análogamente $\lambda_{21} = 0$.

Sea $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que intercambia las filas 1 y 2.

Como $G^2 = I_2$:

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda_{12}$$

Luego $\lambda_{12} = 0$. Análogamente $\lambda_{21} = 0$.

Sea $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que intercambia las filas 1 y 2.

Como $G^2 = I_2$:

$$\lambda_{11} =$$

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda_{12}$$

Luego $\lambda_{12} = 0$. Análogamente $\lambda_{21} = 0$.

Sea $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que intercambia las filas 1 y 2.

Como $G^2 = I_2$:

$$\lambda_{11} = f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda_{12}$$

Luego $\lambda_{12} = 0$. Análogamente $\lambda_{21} = 0$.

Sea $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que intercambia las filas 1 y 2.

Como $G^2 = I_2$:

$$\lambda_{11} = f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot G \cdot G \right)$$

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda_{12}$$

Luego $\lambda_{12} = 0$. Análogamente $\lambda_{21} = 0$.

Sea $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que intercambia las filas 1 y 2.

Como $G^2 = I_2$:

$$\lambda_{11} = f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot G \cdot G \right) = f \left(G \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot G \right)$$

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda_{12}$$

Luego $\lambda_{12} = 0$. Análogamente $\lambda_{21} = 0$.

Sea $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que intercambia las filas 1 y 2.

Como $G^2 = I_2$:

$$\lambda_{11} = f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot G \cdot G \right) = f \left(G \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot G \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ejercicio 3.1.3.

Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que multiplica la primera fila por 2.

$$\lambda_{12} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F \right) = f \left(F \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda_{12}$$

Luego $\lambda_{12} = 0$. Análogamente $\lambda_{21} = 0$.

Sea $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz elemental que intercambia las filas 1 y 2.

Como $G^2 = I_2$:

$$\lambda_{11} = f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot G \cdot G \right) = f \left(G \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot G \right) = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda_{22}$$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .
Nuestras hipótesis son:

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .
Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .
Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar:

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula}$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula}$ \iff

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula}$ \iff $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula}$ \iff $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula}$ \iff $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1$ \implies

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula}$ \iff $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1$ \implies Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula}$ \iff $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1$ \implies Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$f(v_1) = 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n$$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{array}{rcccccc} f(v_1) & = & 0v_1 & + & \dots & + & 0v_{n-1} & + & 0v_n \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ f(v_{n-1}) & = & 0v_1 & + & \dots & + & 0v_{n-1} & + & 0v_n \end{array}$$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f(v_{n-1}) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ f(v_n) &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f(v_{n-1}) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ f(v_n) &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

La traza de f no depende de la base escogida

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ &\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f(v_{n-1}) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ f(v_n) &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

La traza de f no depende de la base escogida (base inicial = base final)

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f(v_{n-1}) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ f(v_n) &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

La traza de f no depende de la base escogida (base inicial = base final)

\implies

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f(v_{n-1}) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ f(v_n) &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

La traza de f no depende de la base escogida (base inicial = base final)

$$\implies 0 = \operatorname{tr}(f)$$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f(v_{n-1}) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ f(v_n) &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

La traza de f no depende de la base escogida (base inicial = base final)

$$\implies 0 = \operatorname{tr}(f)$$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f(v_{n-1}) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ f(v_n) &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

La traza de f no depende de la base escogida (base inicial = base final)

$$\implies 0 = \operatorname{tr}(f) = 0 + \dots + 0 + \lambda_n$$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f(v_{n-1}) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ f(v_n) &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

La traza de f no depende de la base escogida (base inicial = base final)

$$\implies 0 = \operatorname{tr}(f) = 0 + \dots + 0 + \lambda_n \implies$$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f(v_{n-1}) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ f(v_n) &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

La traza de f no depende de la base escogida (base inicial = base final)

$$\implies 0 = \operatorname{tr}(f) = 0 + \dots + 0 + \lambda_n \implies \lambda_n = 0$$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ f(v_{n-1}) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ f(v_n) &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

La traza de f no depende de la base escogida (base inicial = base final)

$$\implies 0 = \operatorname{tr}(f) = 0 + \dots + 0 + \lambda_n \implies \lambda_n = 0$$

\implies

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f(v_{n-1}) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ f(v_n) &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

La traza de f no depende de la base escogida (base inicial = base final)

$$\implies 0 = \operatorname{tr}(f) = 0 + \dots + 0 + \lambda_n \implies \lambda_n = 0$$

$$\implies f(v_n) \in \ker f$$

Ejercicio 3.5.

Solución 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es A .

Nuestras hipótesis son: $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ $\operatorname{tr}(f) = 0$

Debemos demostrar: $f \circ f = \text{aplicación nula} \iff \operatorname{im} f \subseteq \ker f$

$\dim(\ker f) = n - 1 \implies$ Tomamos una base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n
de forma que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \ker f$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f(v_{n-1}) &= 0v_1 + \dots + 0v_{n-1} + 0v_n \\ f(v_n) &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

La traza de f no depende de la base escogida (base inicial = base final)

$$\implies 0 = \operatorname{tr}(f) = 0 + \dots + 0 + \lambda_n \implies \lambda_n = 0$$

$$\implies f(v_n) \in \ker f \implies \operatorname{im} f \subseteq \ker f$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

\implies

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle =$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

\implies

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \cdots & v_n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 u_n & \cdots & v_n u_n \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \cdots & v_n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 u_n & \cdots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n)$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \cdots & v_n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 u_n & \cdots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n) = UV$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \cdots & v_n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 u_n & \cdots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n) = UV$$

$$0 = \text{tr } A$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \cdots & v_n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 u_n & \cdots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n) = UV$$

$$0 = \text{tr } A = v_1 u_1 + \cdots + v_n u_n$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \cdots & v_n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 u_n & \cdots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n) = UV$$

$$0 = \text{tr } A = v_1 u_1 + \cdots + v_n u_n = (v_1 \quad \cdots \quad v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \cdots & v_n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 u_n & \cdots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n) = UV$$

$$0 = \text{tr } A = v_1 u_1 + \cdots + v_n u_n = (v_1 \quad \cdots \quad v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = VU$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \cdots & v_n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 u_n & \cdots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n) = UV$$

$$0 = \text{tr } A = v_1 u_1 + \cdots + v_n u_n = (v_1 \quad \cdots \quad v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = VU$$

$$A^2 =$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \cdots & v_n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 u_n & \cdots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n) = UV$$

$$0 = \text{tr } A = v_1 u_1 + \cdots + v_n u_n = (v_1 \quad \cdots \quad v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = VU$$

$$A^2 = UVUV =$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \cdots & v_n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 u_n & \cdots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n) = UV$$

$$0 = \text{tr } A = v_1 u_1 + \cdots + v_n u_n = (v_1 \quad \cdots \quad v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = VU$$

$$A^2 = UVUV = U(VU)V =$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \cdots & v_n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 u_n & \cdots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n) = UV$$

$$0 = \text{tr } A = v_1 u_1 + \cdots + v_n u_n = (v_1 \quad \cdots \quad v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = VU$$

$$A^2 = UVUV = U(VU)V = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \quad \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n)$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\implies \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \implies X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \cdots & v_n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 u_n & \cdots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n) = UV$$

$$0 = \text{tr } A = v_1 u_1 + \cdots + v_n u_n = (v_1 \quad \cdots \quad v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = VU$$

$$A^2 = UVUV = U(VU)V = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (0) \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n)$$

Ejercicio 3.5.

Solución 2

$$\text{rango}(A) = 1$$

$$A = (X_1 | \dots | X_n)$$

$$\Rightarrow \text{span}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow X_i = v_i \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \forall i$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \cdots & v_n u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1 u_n & \cdots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n) = UV$$

$$0 = \text{tr } A = v_1 u_1 + \cdots + v_n u_n = (v_1 \quad \cdots \quad v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = VU$$

$$A^2 = UVUV = U(VU)V = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (0) \cdot (v_1 \quad \cdots \quad v_n) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.12.

Ejercicio 3.12.



Ejercicio 3.12.



$$AB = I_n$$

Ejercicio 3.12.



$$AB = I_n \quad \text{en } M_n(\mathbb{Z})$$

Ejercicio 3.12.



$$AB = I_n \text{ en } M_n(\mathbb{Z}) \quad \implies$$

Ejercicio 3.12.



$$AB = I_n \text{ en } M_n(\mathbb{Z}) \quad \implies \quad (\det A)(\det B) = 1$$

Ejercicio 3.12.



$$AB = I_n \text{ en } M_n(\mathbb{Z}) \quad \implies \quad (\det A)(\det B) = 1 \text{ en } \mathbb{Z}$$

Ejercicio 3.12.



$$AB = I_n \text{ en } M_n(\mathbb{Z}) \quad \Longrightarrow \quad (\det A)(\det B) = 1 \text{ en } \mathbb{Z}$$
$$\Longrightarrow$$

Ejercicio 3.12.



$$\begin{aligned} AB = I_n \text{ en } M_n(\mathbb{Z}) &\implies (\det A)(\det B) = 1 \text{ en } \mathbb{Z} \\ &\implies \det A \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$

Ejercicio 3.12.



$$\begin{aligned} AB = I_n \text{ en } M_n(\mathbb{Z}) &\implies (\det A)(\det B) = 1 \text{ en } \mathbb{Z} \\ &\implies \det A \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$



Ejercicio 3.12.



$$\begin{aligned} AB = I_n \text{ en } M_n(\mathbb{Z}) &\implies (\det A)(\det B) = 1 \text{ en } \mathbb{Z} \\ &\implies \det A \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$



Si $\det A \in \{\pm 1\}$,

Ejercicio 3.12.



$$\begin{aligned} AB = I_n \text{ en } M_n(\mathbb{Z}) &\implies (\det A)(\det B) = 1 \text{ en } \mathbb{Z} \\ &\implies \det A \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$



Si $\det A \in \{\pm 1\}$, podemos construir su inversa sin salirnos de $M_n(\mathbb{Z})$

Ejercicio 3.12.



$$\begin{aligned} AB = I_n \text{ en } M_n(\mathbb{Z}) &\implies (\det A)(\det B) = 1 \text{ en } \mathbb{Z} \\ &\implies \det A \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$



Si $\det A \in \{\pm 1\}$, podemos construir su inversa sin salirnos de $M_n(\mathbb{Z})$ mediante la fórmula de la adjunta:

Ejercicio 3.12.



$$\begin{aligned} AB = I_n \text{ en } M_n(\mathbb{Z}) &\implies (\det A)(\det B) = 1 \text{ en } \mathbb{Z} \\ &\implies \det A \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$



Si $\det A \in \{\pm 1\}$, podemos construir su inversa sin salirnos de $M_n(\mathbb{Z})$ mediante la fórmula de la adjunta:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

Ejercicio 3.13.

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n ,

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

σ

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\sigma \quad \longleftrightarrow$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\sigma \quad \longleftrightarrow \quad A_\sigma$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\sigma \quad \longleftrightarrow \quad A_\sigma \quad \longleftrightarrow$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\sigma \quad \longleftrightarrow \quad A_\sigma \quad \longleftrightarrow \quad f_\sigma$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{ccccc} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau \end{array}$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} \end{array}$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & & & & \end{array}$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & & & \end{array}$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{lclclcl} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau \end{array}$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{lclclcl} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{lclclcl} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que las columnas de la matriz son las imágenes de los vect. de la base canónica:

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{lclclcl} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que las columnas de la matriz son las imágenes de los vect. de la base canónica:

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{lclclcl} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que las columnas de la matriz son las imágenes de los vect. de la base canónica:

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \quad f_\tau(e_j) = e_{\tau(j)}$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{lclclcl} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que las columnas de la matriz son las imágenes de los vect. de la base canónica:

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

$$f_\tau(e_j) = e_{\tau(j)}$$

$$f_{\sigma \circ \tau}(e_j) = e_{(\sigma \circ \tau)(j)}$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que las columnas de la matriz son las imágenes de los vect. de la base canónica:

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \qquad f_\tau(e_j) = e_{\tau(j)} \qquad f_{\sigma \circ \tau}(e_j) = e_{(\sigma \circ \tau)(j)}$$

Si dos aplicaciones coinciden en una base,

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que las columnas de la matriz son las imágenes de los vect. de la base canónica:

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \qquad f_\tau(e_j) = e_{\tau(j)} \qquad f_{\sigma \circ \tau}(e_j) = e_{(\sigma \circ \tau)(j)}$$

Si dos aplicaciones coinciden en una base, es que son iguales.

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que las columnas de la matriz son las imágenes de los vect. de la base canónica:

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \qquad f_\tau(e_j) = e_{\tau(j)} \qquad f_{\sigma \circ \tau}(e_j) = e_{(\sigma \circ \tau)(j)}$$

Si dos aplicaciones coinciden en una base, es que son iguales.

$$(f_\sigma \circ f_\tau)(e_j) =$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que las columnas de la matriz son las imágenes de los vect. de la base canónica:

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \qquad f_\tau(e_j) = e_{\tau(j)} \qquad f_{\sigma \circ \tau}(e_j) = e_{(\sigma \circ \tau)(j)}$$

Si dos aplicaciones coinciden en una base, es que son iguales.

$$(f_\sigma \circ f_\tau)(e_j) = f_\sigma(f_\tau(e_j))$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que las columnas de la matriz son las imágenes de los vect. de la base canónica:

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \qquad f_\tau(e_j) = e_{\tau(j)} \qquad f_{\sigma \circ \tau}(e_j) = e_{(\sigma \circ \tau)(j)}$$

Si dos aplicaciones coinciden en una base, es que son iguales.

$$(f_\sigma \circ f_\tau)(e_j) = f_\sigma(f_\tau(e_j)) = f_\sigma(e_{\tau(j)})$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que las columnas de la matriz son las imágenes de los vect. de la base canónica:

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \qquad f_\tau(e_j) = e_{\tau(j)} \qquad f_{\sigma \circ \tau}(e_j) = e_{(\sigma \circ \tau)(j)}$$

Si dos aplicaciones coinciden en una base, es que son iguales.

$$(f_\sigma \circ f_\tau)(e_j) = f_\sigma(f_\tau(e_j)) = f_\sigma(e_{\tau(j)}) = e_{\sigma(\tau(j))}$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que las columnas de la matriz son las imágenes de los vect. de la base canónica:

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \qquad f_\tau(e_j) = e_{\tau(j)} \qquad f_{\sigma \circ \tau}(e_j) = e_{(\sigma \circ \tau)(j)}$$

Si dos aplicaciones coinciden en una base, es que son iguales.

$$(f_\sigma \circ f_\tau)(e_j) = f_\sigma(f_\tau(e_j)) = f_\sigma(e_{\tau(j)}) = e_{\sigma(\tau(j))} = e_{(\sigma \circ \tau)(j)}$$

Ejercicio 3.13.

Fijamos la base canónica de \mathbb{F}^n , y trabajamos con endomorfismos.

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma & \longleftrightarrow & A_\sigma & \longleftrightarrow & f_\sigma & & \\ \tau & \longleftrightarrow & A_\tau & \longleftrightarrow & f_\tau & & \\ \sigma \circ \tau & \longleftrightarrow & A_{\sigma \circ \tau} & \longleftrightarrow & f_{\sigma \circ \tau} & & \\ & & A_\sigma \cdot A_\tau & \longleftrightarrow & f_\sigma \circ f_\tau & & \end{array} \quad \text{¿ } f_{\sigma \circ \tau} = f_\sigma \circ f_\tau \text{ ?}$$

La relación entre un endomorfismo y su matriz en la base canónica es que las columnas de la matriz son las imágenes de los vect. de la base canónica:

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \qquad f_\tau(e_j) = e_{\tau(j)} \qquad f_{\sigma \circ \tau}(e_j) = e_{(\sigma \circ \tau)(j)}$$

Si dos aplicaciones coinciden en una base, es que son iguales.

$$(f_\sigma \circ f_\tau)(e_j) = f_\sigma(f_\tau(e_j)) = f_\sigma(e_{\tau(j)}) = e_{\sigma(\tau(j))} = e_{(\sigma \circ \tau)(j)} = f_{\sigma \circ \tau}(e_j)$$

Capítulo 4. Valores y vectores propios

4.1. Valores propios

4.2. Vectores propios

4.3. Polinomio característico

4.4. Subespacios fundamentales

4.5. Criterio de diagonalización

Situación 4.1.

4.1. Valores propios

Situación 4.1.

4.1. Valores propios

En este capítulo,

Situación 4.1.

4.1. Valores propios

En este capítulo,

V es un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita,

Situación 4.1.

4.1. Valores propios

En este capítulo,

V es un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita,

$n = \dim V$,

Situación 4.1.

4.1. Valores propios

En este capítulo,

V es un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita,

$n = \dim V$,

$A \in M_n(\mathbb{F})$ es una matriz cuadrada,

Situación 4.1.

4.1. Valores propios

En este capítulo,

V es un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita,

$n = \dim V$,

$A \in M_n(\mathbb{F})$ es una matriz cuadrada,

f es un endomorfismo de V .

Situación 4.1.

4.1. Valores propios

En este capítulo,

V es un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita,

$n = \dim V$,

$A \in M_n(\mathbb{F})$ es una matriz cuadrada,

f es un endomorfismo de V .

(Es decir, $f : V \rightarrow V$ es una aplicación lineal

Situación 4.1.

4.1. Valores propios

En este capítulo,

V es un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita,

$n = \dim V$,

$A \in M_n(\mathbb{F})$ es una matriz cuadrada,

f es un endomorfismo de V .

(Es decir, $f : V \rightarrow V$ es una aplicación lineal en la que tanto el espacio inicial como el final son V).

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio**

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

$$f(v) = \lambda v$$

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

$$f(v) = \lambda v$$

2. Fijemos un valor propio λ .

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

$$f(v) = \lambda v$$

2. Fijemos un valor propio λ .

Un vector $v \in V$

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

$$f(v) = \lambda v$$

2. Fijemos un valor propio λ .

Un vector $v \in V$ es un **vector propio** de f

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

$$f(v) = \lambda v$$

2. Fijemos un valor propio λ .

Un vector $v \in V$ es un **vector propio** de f de valor propio λ

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

$$f(v) = \lambda v$$

2. Fijemos un valor propio λ .

Un vector $v \in V$ es un **vector propio** de f de valor propio λ si $f(v) = \lambda v$.

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

$$f(v) = \lambda v$$

2. Fijemos un valor propio λ .

Un vector $v \in V$ es un **vector propio** de f de valor propio λ si $f(v) = \lambda v$.

El conjunto de dichos vectores propios es

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

$$f(v) = \lambda v$$

2. Fijemos un valor propio λ .

Un vector $v \in V$ es un **vector propio** de f de valor propio λ si $f(v) = \lambda v$.

El conjunto de dichos vectores propios es el **subespacio fundamental** de valor propio λ ,

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

$$f(v) = \lambda v$$

2. Fijemos un valor propio λ .

Un vector $v \in V$ es un **vector propio** de f de valor propio λ si $f(v) = \lambda v$.

El conjunto de dichos vectores propios es el **subespacio fundamental** de valor propio λ , denotado $S_f(\lambda)$:

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

$$f(v) = \lambda v$$

2. Fijemos un valor propio λ .

Un vector $v \in V$ es un **vector propio** de f de valor propio λ si $f(v) = \lambda v$.

El conjunto de dichos vectores propios es el **subespacio fundamental** de valor propio λ , denotado $S_f(\lambda)$:

$$S_f(\lambda)$$

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

$$f(v) = \lambda v$$

2. Fijemos un valor propio λ .

Un vector $v \in V$ es un **vector propio** de f de valor propio λ si $f(v) = \lambda v$.

El conjunto de dichos vectores propios es el **subespacio fundamental** de valor propio λ , denotado $S_f(\lambda)$:

$$S_f(\lambda) = \{v \in V \mid$$

Definiciones 4.2.

4.1. Valores propios

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un **valor propio** del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:

$$f(v) = \lambda v$$

2. Fijemos un valor propio λ .

Un vector $v \in V$ es un **vector propio** de f de valor propio λ si $f(v) = \lambda v$.

El conjunto de dichos vectores propios es el **subespacio fundamental** de valor propio λ , denotado $S_f(\lambda)$:

$$S_f(\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

Definición 4.3.

4.1. Valores propios

Definición 4.3.

4.1. Valores propios

Los valores y vectores propios de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ son, por definición,

Definición 4.3.

4.1. Valores propios

Los valores y vectores propios de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ son, por definición, los del endomorfismo $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ dado por $h_A(X) = AX$.

Definición 4.3.

4.1. Valores propios

Los valores y vectores propios de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ son, por definición, los del endomorfismo $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ dado por $h_A(X) = AX$.

$$f(v) = \lambda v$$

Definición 4.3.

4.1. Valores propios

Los valores y vectores propios de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ son, por definición, los del endomorfismo $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ dado por $h_A(X) = AX$.

$$f(v) = \lambda v \quad \longleftrightarrow$$

Definición 4.3.

4.1. Valores propios

Los valores y vectores propios de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ son, por definición, los del endomorfismo $h_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ dado por $h_A(X) = AX$.

$$f(v) = \lambda v \quad \longleftrightarrow \quad AX = \lambda X$$

Notas 4.4.

4.1. Valores propios

Notas 4.4.

4.1. Valores propios

1. El vector nulo es vector propio

Notas 4.4.

4.1. Valores propios

1. El vector nulo es vector propio de cualquier valor propio,

Notas 4.4.

4.1. Valores propios

1. El vector nulo es vector propio de cualquier valor propio, pero hace falta que haya al menos otro vector v

Notas 4.4.

4.1. Valores propios

1. El vector nulo es vector propio de cualquier valor propio, pero hace falta que haya al menos otro vector v tal que $f(v) = \lambda v$

Notas 4.4.

4.1. Valores propios

1. El vector nulo es vector propio de cualquier valor propio, pero hace falta que haya al menos otro vector v tal que $f(v) = \lambda v$ para que hayamos dicho que el escalar λ es valor propio.

Notas 4.4.

4.1. Valores propios

1. El vector nulo es vector propio de cualquier valor propio, pero hace falta que haya al menos otro vector v tal que $f(v) = \lambda v$ para que hayamos dicho que el escalar λ es valor propio.
2. $S_f(\lambda)$ es en efecto un subespacio de V ,

Notas 4.4.

4.1. Valores propios

1. El vector nulo es vector propio de cualquier valor propio, pero hace falta que haya al menos otro vector v tal que $f(v) = \lambda v$ para que hayamos dicho que el escalar λ es valor propio.
2. $S_f(\lambda)$ es en efecto un subespacio de V , ya que es el núcleo de la aplicación lineal:

Notas 4.4.

4.1. Valores propios

1. El vector nulo es vector propio de cualquier valor propio, pero hace falta que haya al menos otro vector v tal que $f(v) = \lambda v$ para que hayamos dicho que el escalar λ es valor propio.
2. $S_f(\lambda)$ es en efecto un subespacio de V , ya que es el núcleo de la aplicación lineal:

$$V \longrightarrow V$$

Notas 4.4.

4.1. Valores propios

1. El vector nulo es vector propio de cualquier valor propio, pero hace falta que haya al menos otro vector v tal que $f(v) = \lambda v$ para que hayamos dicho que el escalar λ es valor propio.
2. $S_f(\lambda)$ es en efecto un subespacio de V , ya que es el núcleo de la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \lambda v - f(v) \end{aligned}$$

Notas 4.4.

4.1. Valores propios

1. El vector nulo es vector propio de cualquier valor propio, pero hace falta que haya al menos otro vector v tal que $f(v) = \lambda v$ para que hayamos dicho que el escalar λ es valor propio.
2. $S_f(\lambda)$ es en efecto un subespacio de V , ya que es el núcleo de la aplicación lineal:

$$\begin{aligned}(\lambda \operatorname{id}_V - f) : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \lambda v - f(v)\end{aligned}$$

Notas 4.4.

4.1. Valores propios

1. El vector nulo es vector propio de cualquier valor propio, pero hace falta que haya al menos otro vector v tal que $f(v) = \lambda v$ para que hayamos dicho que el escalar λ es valor propio.
2. $S_f(\lambda)$ es en efecto un subespacio de V , ya que es el núcleo de la aplicación lineal:

$$\begin{aligned}(\lambda \operatorname{id}_V - f) : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \lambda v - f(v)\end{aligned}$$

Análogamente, $S_A(\lambda)$ es un subespacio de \mathbb{F}^n .

Ejemplo 4.5.

4.1. Valores propios

Ejemplo 4.5.

4.1. Valores propios

Sea $A \in M_2(\mathbb{Q})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.5.

4.1. Valores propios

Sea $A \in M_2(\mathbb{Q})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Ejemplo 4.5.

4.1. Valores propios

Sea $A \in M_2(\mathbb{Q})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.5.

4.1. Valores propios

Sea $A \in M_2(\mathbb{Q})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Luego $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A

Ejemplo 4.5.

4.1. Valores propios

Sea $A \in M_2(\mathbb{Q})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Luego $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A de valor propio 4,

Ejemplo 4.5.

4.1. Valores propios

Sea $A \in M_2(\mathbb{Q})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Luego $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A de valor propio 4,

Ejemplo 4.5.

4.1. Valores propios

Sea $A \in M_2(\mathbb{Q})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A de valor propio 4,

Ejemplo 4.5.

4.1. Valores propios

Sea $A \in M_2(\mathbb{Q})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A de valor propio 4,

y $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio

Ejemplo 4.5.

4.1. Valores propios

Sea $A \in M_2(\mathbb{Q})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A de valor propio 4,

y $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de valor propio 0.

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar.

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada).

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

λ es valor propio de f

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

$$\lambda \text{ es valor propio de } f \iff \lambda \text{ es valor propio de } A$$

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

$$\begin{array}{ccc} \lambda \text{ es valor propio de } f & \iff & \lambda \text{ es valor propio de } A \\ \updownarrow & & \\ \text{rango}(\lambda I_n - A) < n & & \end{array}$$

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

$$\begin{array}{ccc} \lambda \text{ es valor propio de } f & \iff & \lambda \text{ es valor propio de } A \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{rango}(\lambda I_n - A) < n & \iff & \det(\lambda I_n - A) = 0 \end{array}$$

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

λ es valor propio de f

λ es valor propio de A

$$\text{rango}(\lambda I_n - A) < n$$

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

Demostración.

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

λ es valor propio de f

λ es valor propio de A

$$\text{rango}(\lambda I_n - A) < n$$

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

Demostración.

λ es valor propio de f

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

λ es valor propio de f

λ es valor propio de A

$$\text{rango}(\lambda I_n - A) < n$$

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

Demostración.

λ es valor propio de f

$$\iff \exists \bar{0} \neq v \in V \text{ tal que } f(v) = \lambda v$$

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

λ es valor propio de f

λ es valor propio de A

$$\text{rango}(\lambda I_n - A) < n$$

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

Demostración.

λ es valor propio de f

$$\iff \exists \vec{0} \neq v \in V \text{ tal que } f(v) = \lambda v$$

$$\iff \exists \vec{0} \neq X \in \mathbb{F}^n \text{ tal que } AX = \lambda X$$

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

λ es valor propio de $f \iff \lambda$ es valor propio de A

$$\text{rango}(\lambda I_n - A) < n$$

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

Demostración.

λ es valor propio de f

$$\iff \exists \bar{0} \neq v \in V \text{ tal que } f(v) = \lambda v$$

$$\iff \exists \bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n \text{ tal que } AX = \lambda X$$

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

λ es valor propio de $f \iff \lambda$ es valor propio de A

$$\text{rango}(\lambda I_n - A) < n$$

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

Demostración.

λ es valor propio de f

$$\iff \exists \bar{0} \neq v \in V \text{ tal que } f(v) = \lambda v$$

$$\iff \exists \bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n \text{ tal que } AX = \lambda X$$

$$\iff \text{el sistema } (\lambda I_n - A)X = \bar{0} \text{ es indeterminado}$$

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

λ es valor propio de $f \iff \lambda$ es valor propio de A

$$\text{rango}(\lambda I_n - A) < n$$

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

Demostración.

λ es valor propio de f

$$\iff \exists \bar{0} \neq v \in V \text{ tal que } f(v) = \lambda v$$

$$\iff \exists \bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n \text{ tal que } AX = \lambda X$$

$$\iff \text{el sistema } (\lambda I_n - A)X = \bar{0} \text{ es indeterminado}$$

$$\iff \text{la matriz } \lambda I_n - A \text{ no es regular}$$

Propiedad 4.6.

4.1. Valores propios

Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces:

$$\begin{array}{ccc} \lambda \text{ es valor propio de } f & \iff & \lambda \text{ es valor propio de } A \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{rango}(\lambda I_n - A) < n & \iff & \det(\lambda I_n - A) = 0 \end{array}$$

Demostración.

λ es valor propio de f

$$\iff \exists \bar{0} \neq v \in V \text{ tal que } f(v) = \lambda v$$

$$\iff \exists \bar{0} \neq X \in \mathbb{F}^n \text{ tal que } AX = \lambda X$$

$$\iff \text{el sistema } (\lambda I_n - A)X = \bar{0} \text{ es indeterminado}$$

$$\iff \text{la matriz } \lambda I_n - A \text{ no es regular}$$



Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Sea $A \in M_3(\mathbb{C})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -16 & -4 \\ 6 & 9 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculemos, de manera sistemática, todos los valores propios de A y sus subespacios fundamentales.

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

Para hallar los valores propios debemos calcular los valores de λ que hacen que el siguiente determinante sea cero:

$$\det(\lambda I_3 - A)$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

Para hallar los valores propios debemos calcular los valores de λ que hacen que el siguiente determinante sea cero:

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 11 & 16 & 4 \\ -6 & \lambda - 9 & -2 \\ -6 & -8 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

Para hallar los valores propios debemos calcular los valores de λ que hacen que el siguiente determinante sea cero:

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 11 & 16 & 4 \\ -6 & \lambda - 9 & -2 \\ -6 & -8 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \dots =$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

Para hallar los valores propios debemos calcular los valores de λ que hacen que el siguiente determinante sea cero:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + 11 & 16 & 4 \\ -6 & \lambda - 9 & -2 \\ -6 & -8 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \dots = \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1\end{aligned}$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

Para hallar los valores propios debemos calcular los valores de λ que hacen que el siguiente determinante sea cero:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + 11 & 16 & 4 \\ -6 & \lambda - 9 & -2 \\ -6 & -8 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \dots = \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 \quad \underline{\underline{\text{Ruffini}}}\end{aligned}$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

Para hallar los valores propios debemos calcular los valores de λ que hacen que el siguiente determinante sea cero:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + 11 & 16 & 4 \\ -6 & \lambda - 9 & -2 \\ -6 & -8 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \dots = \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 \stackrel{\text{Ruffini}}{=} (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2\end{aligned}$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

Para hallar los valores propios debemos calcular los valores de λ que hacen que el siguiente determinante sea cero:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + 11 & 16 & 4 \\ -6 & \lambda - 9 & -2 \\ -6 & -8 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \dots = \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 \stackrel{\text{Ruffini}}{=} (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2\end{aligned}$$

Así que los valores propios de A son -1 y 1 .

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$$S(-1)$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$$S(-1)$$

$$AX = -1X$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$$S(-1)$$

$$AX = -1X \iff$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$$S(-1)$$

$$AX = -1X \quad \Longleftrightarrow \quad (-I_3 - A)X = \bar{0}$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$$S(-1)$$

$$AX = -1X \iff (-I_3 - A)X = \bar{0}$$

\iff

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$$\boxed{S(-1)} \quad AX = -1X \quad \Leftrightarrow \quad (-I_3 - A)X = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$$\boxed{S(-1)} \quad AX = -1X \quad \Leftrightarrow \quad (-I_3 - A)X = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$$S(-1) \quad AX = -1X \quad \Leftrightarrow \quad (-I_3 - A)X = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(-1) =$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$$\boxed{S(-1)} \quad AX = -1X \quad \Leftrightarrow \quad (-I_3 - A)X = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(-1) = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$$S(-1) \quad AX = -1X \quad \Leftrightarrow \quad (-I_3 - A)X = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(-1) = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$S(1)$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$S(-1)$

$$AX = -1X \iff (-I_3 - A)X = \bar{0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies S(-1) = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$S(1)$

$$AX = 1X$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$$\boxed{S(-1)} \quad AX = -1X \quad \Leftrightarrow \quad (-I_3 - A)X = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(-1) = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\boxed{S(1)} \quad AX = 1X \quad \Leftrightarrow$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$S(-1)$

$$AX = -1X \iff (-I_3 - A)X = \bar{0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies S(-1) = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$S(1)$

$$AX = 1X \iff (I_3 - A)X = \bar{0}$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$S(-1)$

$$AX = -1X \iff (-I_3 - A)X = \bar{0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies S(-1) = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$S(1)$

$$AX = 1X \iff (I_3 - A)X = \bar{0} \iff$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$S(-1)$

$$AX = -1X \iff (-I_3 - A)X = \vec{0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies S(-1) = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$S(1)$

$$AX = 1X \iff (I_3 - A)X = \vec{0} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 16 & 4 \\ -6 & -8 & -2 \\ -6 & -8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$S(-1)$

$$AX = -1X \iff (-I_3 - A)X = \vec{0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies S(-1) = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$S(1)$

$$AX = 1X \iff (I_3 - A)X = \vec{0} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 16 & 4 \\ -6 & -8 & -2 \\ -6 & -8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$$S(-1) \quad AX = -1X \quad \Leftrightarrow \quad (-I_3 - A)X = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(-1) = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$S(1) \quad AX = 1X \quad \Leftrightarrow \quad (I_3 - A)X = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 16 & 4 \\ -6 & -8 & -2 \\ -6 & -8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(1) =$$

Ejemplo 4.7.

4.1. Valores propios

Solución.

$$S(-1) \quad AX = -1X \quad \iff \quad (-I_3 - A)X = \bar{0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies S(-1) = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$S(1) \quad AX = 1X \quad \iff \quad (I_3 - A)X = \bar{0} \quad \iff$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 16 & 4 \\ -6 & -8 & -2 \\ -6 & -8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies S(1) = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$



Ejercicios 4.8.

4.1. Valores propios

- 4.1
- 4.2
- 4.3

Capítulo 4. Valores y vectores propios

4.1. Valores propios

4.2. Vectores propios

4.3. Polinomio característico

4.4. Subespacios fundamentales

4.5. Criterio de diagonalización

Nota 4.9.

4.2. Vectores propios

Nota 4.9.

4.2. Vectores propios

Si (v_1, \dots, v_n) es una base de V de forma que

Nota 4.9.

4.2. Vectores propios

Si (v_1, \dots, v_n) es una base de V de forma que cada v_i es vector propio de f de valor propio λ_i ,

Nota 4.9.

4.2. Vectores propios

Si (v_1, \dots, v_n) es una base de V de forma que cada v_i es vector propio de f de valor propio λ_i , entonces la matriz del endomorfismo f en la base (v_1, \dots, v_n)

Nota 4.9.

4.2. Vectores propios

Si (v_1, \dots, v_n) es una base de V de forma que cada v_i es vector propio de f de valor propio λ_i , entonces la matriz del endomorfismo f en la base (v_1, \dots, v_n) es la matriz diagonal:

Nota 4.9.

4.2. Vectores propios

Si (v_1, \dots, v_n) es una base de V de forma que cada v_i es vector propio de f de valor propio λ_i , entonces la matriz del endomorfismo f en la base (v_1, \dots, v_n) es la matriz diagonal:

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Nota 4.9.

4.2. Vectores propios

Si (v_1, \dots, v_n) es una base de V de forma que cada v_i es vector propio de f de valor propio λ_i , entonces la matriz del endomorfismo f en la base (v_1, \dots, v_n) es la matriz diagonal:

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Recíprocamente,

Nota 4.9.

4.2. Vectores propios

Si (v_1, \dots, v_n) es una base de V de forma que cada v_i es vector propio de f de valor propio λ_i , entonces la matriz del endomorfismo f en la base (v_1, \dots, v_n) es la matriz diagonal:

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Recíprocamente,
si la matriz de f en la base (v_1, \dots, v_n) es $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

Nota 4.9.

4.2. Vectores propios

Si (v_1, \dots, v_n) es una base de V de forma que cada v_i es vector propio de f de valor propio λ_i , entonces la matriz del endomorfismo f en la base (v_1, \dots, v_n) es la matriz diagonal:

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Recíprocamente, si la matriz de f en la base (v_1, \dots, v_n) es $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, entonces $f(v_i) = \lambda_i v_i$ para todo i .

Definiciones 4.10.

4.2. Vectores propios

Definiciones 4.10.

4.2. Vectores propios

1. Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F})$ es **diagonalizable**

Definiciones 4.10.

4.2. Vectores propios

1. Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F})$ es **diagonalizable** si es semejante a alguna matriz diagonal.

Definiciones 4.10.

4.2. Vectores propios

1. Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F})$ es **diagonalizable** si es semejante a alguna matriz diagonal.
2. Un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ es **diagonalizable**

Definiciones 4.10.

4.2. Vectores propios

1. Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F})$ es **diagonalizable** si es semejante a alguna matriz diagonal.
2. Un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ es **diagonalizable** si existe alguna base de V en la que la matriz de f es diagonal,

Definiciones 4.10.

4.2. Vectores propios

1. Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F})$ es **diagonalizable** si es semejante a alguna matriz diagonal.
2. Un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ es **diagonalizable** si existe alguna base de V en la que la matriz de f es diagonal, es decir, dicha base está formada por vectores propios.

Definiciones 4.10.

4.2. Vectores propios

1. Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F})$ es **diagonalizable** si es semejante a alguna matriz diagonal.
2. Un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ es **diagonalizable** si existe alguna base de V en la que la matriz de f es diagonal, es decir, dicha base está formada por vectores propios.

En otras palabras,

Definiciones 4.10.

4.2. Vectores propios

1. Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F})$ es **diagonalizable** si es semejante a alguna matriz diagonal.
2. Un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ es **diagonalizable** si existe alguna base de V en la que la matriz de f es diagonal, es decir, dicha base está formada por vectores propios.

En otras palabras,

f es diagonalizable si cualquiera de sus matrices es diagonalizable.

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,
- D es la matriz de f en la base \mathcal{B} ,

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,
- D es la matriz de f en la base \mathcal{B} ,
- P es la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} ,

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,
- D es la matriz de f en la base \mathcal{B} ,
- P es la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} ,

entonces:

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,
- D es la matriz de f en la base \mathcal{B} ,
- P es la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} ,

entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,
- D es la matriz de f en la base \mathcal{B} ,
- P es la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} ,

entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

Demostración.

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,
- D es la matriz de f en la base \mathcal{B} ,
- P es la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} ,

entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

Demostración.

$$Y_{\mathcal{C}} = AX_{\mathcal{C}},$$

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,
- D es la matriz de f en la base \mathcal{B} ,
- P es la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} ,

entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

Demostración.

$$Y_{\mathcal{C}} = AX_{\mathcal{C}}, \quad Y_{\mathcal{B}} = DX_{\mathcal{B}},$$

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,
- D es la matriz de f en la base \mathcal{B} ,
- P es la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} ,

entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

Demostración.

$$Y_{\mathcal{C}} = AX_{\mathcal{C}}, \quad Y_{\mathcal{B}} = DX_{\mathcal{B}}, \quad X_{\mathcal{C}} = PX_{\mathcal{B}},$$

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,
- D es la matriz de f en la base \mathcal{B} ,
- P es la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} ,

entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

Demostración.

$$Y_{\mathcal{C}} = AX_{\mathcal{C}}, \quad Y_{\mathcal{B}} = DX_{\mathcal{B}}, \quad X_{\mathcal{C}} = PX_{\mathcal{B}}, \quad Y_{\mathcal{C}} = PY_{\mathcal{B}}.$$

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,
- D es la matriz de f en la base \mathcal{B} ,
- P es la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} ,

entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

Demostración.

$$Y_{\mathcal{C}} = AX_{\mathcal{C}}, \quad Y_{\mathcal{B}} = DX_{\mathcal{B}}, \quad X_{\mathcal{C}} = PX_{\mathcal{B}}, \quad Y_{\mathcal{C}} = PY_{\mathcal{B}}.$$

$$AX_{\mathcal{C}} = Y_{\mathcal{C}}$$

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,
- D es la matriz de f en la base \mathcal{B} ,
- P es la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} ,

entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

Demostración.

$$Y_{\mathcal{C}} = AX_{\mathcal{C}}, \quad Y_{\mathcal{B}} = DX_{\mathcal{B}}, \quad X_{\mathcal{C}} = PX_{\mathcal{B}}, \quad Y_{\mathcal{C}} = PY_{\mathcal{B}}.$$

$$AX_{\mathcal{C}} = Y_{\mathcal{C}} = PY_{\mathcal{B}}$$

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,
- D es la matriz de f en la base \mathcal{B} ,
- P es la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} ,

entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

Demostración.

$$Y_{\mathcal{C}} = AX_{\mathcal{C}}, \quad Y_{\mathcal{B}} = DX_{\mathcal{B}}, \quad X_{\mathcal{C}} = PX_{\mathcal{B}}, \quad Y_{\mathcal{C}} = PY_{\mathcal{B}}.$$

$$AX_{\mathcal{C}} = Y_{\mathcal{C}} = PY_{\mathcal{B}} = PDX_{\mathcal{B}}$$

Repaso 4.11.

4.2. Vectores propios

En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base \mathcal{C} ,
- D es la matriz de f en la base \mathcal{B} ,
- P es la matriz de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} ,

entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

Demostración.

$$Y_{\mathcal{C}} = AX_{\mathcal{C}}, \quad Y_{\mathcal{B}} = DX_{\mathcal{B}}, \quad X_{\mathcal{C}} = PX_{\mathcal{B}}, \quad Y_{\mathcal{C}} = PY_{\mathcal{B}}.$$

$$AX_{\mathcal{C}} = Y_{\mathcal{C}} = PY_{\mathcal{B}} = PDX_{\mathcal{B}} = PDP^{-1}X_{\mathcal{C}}$$



Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Veamos que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Veamos que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución.

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Veamos que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución.

Consideramos A como la matriz del endomorfismo $f = h_A$

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Veamos que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución.

Consideramos A como la matriz del endomorfismo $f = h_A$ en la base canónica $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Veamos que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución.

Consideramos A como la matriz del endomorfismo $f = h_A$ en la base canónica $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Hallamos una base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Veamos que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución.

Consideramos A como la matriz del endomorfismo $f = h_A$ en la base canónica $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Hallamos una base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ formada por vectores propios de valores propios 4 y 0.

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Veamos que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución.

Consideramos A como la matriz del endomorfismo $f = h_A$ en la base canónica $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Hallamos una base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ formada por vectores propios de valores propios 4 y 0.

Calcular la matriz P de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} es muy sencillo,

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Veamos que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución.

Consideramos A como la matriz del endomorfismo $f = h_A$ en la base canónica $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Hallamos una base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ formada por vectores propios de valores propios 4 y 0.

Calcular la matriz P de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} es muy sencillo, gracias a que \mathcal{C} es la base canónica,

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Veamos que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución.

Consideramos A como la matriz del endomorfismo $f = h_A$ en la base canónica $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Hallamos una base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ formada por vectores propios de valores propios 4 y 0.

Calcular la matriz P de cambio de bases de \mathcal{B} a \mathcal{C} es muy sencillo, gracias a que \mathcal{C} es la base canónica, $P = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Solución.

Llamemos D a la matriz de f en la base \mathcal{B} ;

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Solución.

Llamemos D a la matriz de f en la base \mathcal{B} ;
como la base \mathcal{B} está formada por vectores propios,

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Solución.

Llamemos D a la matriz de f en la base \mathcal{B} ;
como la base \mathcal{B} está formada por vectores propios,
 D es diagonal, $D = \text{diag}(4, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Solución.

Llamemos D a la matriz de f en la base \mathcal{B} ;
como la base \mathcal{B} está formada por vectores propios,
 D es diagonal, $D = \text{diag}(4, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aplicando el repaso 4.11 tenemos que $A = PDP^{-1}$, es decir:

Ejemplo 4.12.

4.2. Vectores propios

Solución.

Llamemos D a la matriz de f en la base \mathcal{B} ;
como la base \mathcal{B} está formada por vectores propios,
 D es diagonal, $D = \text{diag}(4, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aplicando el repaso 4.11 tenemos que $A = PDP^{-1}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$



Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Probemos que la siguiente matriz no es diagonalizable:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Probemos que la siguiente matriz no es diagonalizable:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Probemos que la siguiente matriz no es diagonalizable:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

Supongamos por reducción al absurdo que

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Probemos que la siguiente matriz no es diagonalizable:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

Supongamos por reducción al absurdo que

sí que existe una matriz $D = \text{diag}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ diagonal

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Probemos que la siguiente matriz no es diagonalizable:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

Supongamos por reducción al absurdo que

sí que existe una matriz $D = \text{diag}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ diagonal

y una matriz $P \in M_2(\mathbb{F})$ regular

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Probemos que la siguiente matriz no es diagonalizable:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

Supongamos por reducción al absurdo que

sí que existe una matriz $D = \text{diag}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ diagonal

y una matriz $P \in M_2(\mathbb{F})$ regular

de manera que $N = PDP^{-1}$.

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2$$

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1}$$

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Multiplicando a izquierda por P^{-1} y a derecha por P ,

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Multiplicando a izquierda por P^{-1} y a derecha por P , vemos que D^2 es la matriz nula.

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Multiplicando a izquierda por P^{-1} y a derecha por P , vemos que D^2 es la matriz nula. Pero $D^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Multiplicando a izquierda por P^{-1} y a derecha por P , vemos que D^2 es la matriz nula. Pero $D^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Multiplicando a izquierda por P^{-1} y a derecha por P , vemos que D^2 es la matriz nula. Pero $D^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto $\alpha^2 = \beta^2 = 0$,

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Multiplicando a izquierda por P^{-1} y a derecha por P , vemos que D^2 es la matriz nula. Pero $D^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, es decir, $\alpha = \beta = 0$.

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Multiplicando a izquierda por P^{-1} y a derecha por P , vemos que D^2 es la matriz nula. Pero $D^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, es decir, $\alpha = \beta = 0$.

Así que D también es la matriz nula.

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Multiplicando a izquierda por P^{-1} y a derecha por P , vemos que D^2 es la matriz nula. Pero $D^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, es decir, $\alpha = \beta = 0$.

Así que D también es la matriz nula.

Volviendo a la expresión inicial $N = PDP^{-1}$,

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Multiplicando a izquierda por P^{-1} y a derecha por P , vemos que D^2 es la matriz nula. Pero $D^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, es decir, $\alpha = \beta = 0$.

Así que D también es la matriz nula.

Volviendo a la expresión inicial $N = PDP^{-1}$, observamos que a su vez N también es la matriz nula,

Ejemplo 4.13.

4.2. Vectores propios

Solución.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Multiplicando a izquierda por P^{-1} y a derecha por P , vemos que D^2 es la matriz nula. Pero $D^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, es decir, $\alpha = \beta = 0$.

Así que D también es la matriz nula.

Volviendo a la expresión inicial $N = PDP^{-1}$, observamos que a su vez N también es la matriz nula, contradicción. \square

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Dado un número natural $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, calculemos A^m .

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Dado un número natural $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, calculemos A^m .

Solución.

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Dado un número natural $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, calculemos A^m .

Solución.

Calculamos los valores propios de A y sus subespacios fundamentales,

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Dado un número natural $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, calculemos A^m .

Solución.

Calculamos los valores propios de A y sus subespacios fundamentales, y aplicando el repaso 4.11 obtenemos que:

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Dado un número natural $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, calculemos A^m .

Solución.

Calculamos los valores propios de A y sus subespacios fundamentales, y aplicando el repaso 4.11 obtenemos que:

$$A = PDP^{-1}$$

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Dado un número natural $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, calculemos A^m .

Solución.

Calculamos los valores propios de A y sus subespacios fundamentales, y aplicando el repaso 4.11 obtenemos que:

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Solución.

Como la matriz D es diagonal, calcular sus potencias es sencillo:

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Solución.

Como la matriz D es diagonal, calcular sus potencias es sencillo:

$$D^m = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-1)^m & \\ & & (-2)^m \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Solución.

Como la matriz D es diagonal, calcular sus potencias es sencillo:

$$D^m = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-1)^m & \\ & & (-2)^m \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$A^m$$

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Solución.

Como la matriz D es diagonal, calcular sus potencias es sencillo:

$$D^m = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-1)^m & \\ & & (-2)^m \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$A^m = (PDP^{-1})^m$$

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Solución.

Como la matriz D es diagonal, calcular sus potencias es sencillo:

$$D^m = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-1)^m & \\ & & (-2)^m \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$A^m = (PDP^{-1})^m = PD^mP^{-1}$$

Ejemplo 4.14.

4.2. Vectores propios

Solución.

Como la matriz D es diagonal, calcular sus potencias es sencillo:

$$D^m = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-1)^m & \\ & & (-2)^m \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$A^m = (PDP^{-1})^m = PD^mP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (-2)^{m+1} + 2 & (-2)^{m+1} + 2 \\ (-1)^{m+1} + 1 & (-1)^{m+1} + 2 & (-2)^{m+1} + 2 \\ (-1)^m - 1 & (-2)^m + (-1)^m - 2 & (-2)^m + 2 \cdot (-1)^m - 2 \end{pmatrix}$$



Ejercicios 4.15.

4.2. Vectores propios

- 4.4
- 4.5
- 4.6
- 4.7
- 4.8
- 4.9

Capítulo 4. Valores y vectores propios

4.1. Valores propios

4.2. Vectores propios

4.3. Polinomio característico

4.4. Subespacios fundamentales

4.5. Criterio de diagonalización

Definición 4.16.

4.3. Polinomio característico

Definición 4.16.

4.3. Polinomio característico

El **polinomio característico** de una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ cuadrada

Definición 4.16.

4.3. Polinomio característico

El **polinomio característico** de una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ cuadrada es el polinomio de $\mathbb{F}[X]$ dado por:

Definición 4.16.

4.3. Polinomio característico

El **polinomio característico** de una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ cuadrada es el polinomio de $\mathbb{F}[X]$ dado por:

$$\det(XI_n - A)$$

Definición 4.16.

4.3. Polinomio característico

El **polinomio característico** de una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ cuadrada es el polinomio de $\mathbb{F}[X]$ dado por:

$$\det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & X - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definición 4.16.

4.3. Polinomio característico

El **polinomio característico** de una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ cuadrada es el polinomio de $\mathbb{F}[X]$ dado por:

$$\det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & X - a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{F}[X]$$

Ejemplo 4.17.

4.3. Polinomio característico

Ejemplo 4.17.

4.3. Polinomio característico

Calculemos el polinomio característico de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 26 & 6 & 8 \\ 36 & 12 & 12 \\ -93 & -24 & -29 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.17.

4.3. Polinomio característico

Calculemos el polinomio característico de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 26 & 6 & 8 \\ 36 & 12 & 12 \\ -93 & -24 & -29 \end{pmatrix}$$

Solución.

Ejemplo 4.17.

4.3. Polinomio característico

Calculemos el polinomio característico de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 26 & 6 & 8 \\ 36 & 12 & 12 \\ -93 & -24 & -29 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} X - 26 & -6 & -8 \\ -36 & X - 12 & -12 \\ 93 & 24 & X + 29 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 4.17.

4.3. Polinomio característico

Calculemos el polinomio característico de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 26 & 6 & 8 \\ 36 & 12 & 12 \\ -93 & -24 & -29 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} X - 26 & -6 & -8 \\ -36 & X - 12 & -12 \\ 93 & 24 & X + 29 \end{vmatrix} = \dots$$

Ejemplo 4.17.

4.3. Polinomio característico

Calculemos el polinomio característico de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 26 & 6 & 8 \\ 36 & 12 & 12 \\ -93 & -24 & -29 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} X - 26 & -6 & -8 \\ -36 & X - 12 & -12 \\ 93 & 24 & X + 29 \end{vmatrix} = \dots = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$$

Ejemplo 4.17.

4.3. Polinomio característico

Calculemos el polinomio característico de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 26 & 6 & 8 \\ 36 & 12 & 12 \\ -93 & -24 & -29 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} X - 26 & -6 & -8 \\ -36 & X - 12 & -12 \\ 93 & 24 & X + 29 \end{vmatrix} = \dots = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$$

Ruffini

Ejemplo 4.17.

4.3. Polinomio característico

Calculemos el polinomio característico de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 26 & 6 & 8 \\ 36 & 12 & 12 \\ -93 & -24 & -29 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} X - 26 & -6 & -8 \\ -36 & X - 12 & -12 \\ 93 & 24 & X + 29 \end{vmatrix} = \dots = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$$

Ruffini $(X - 2)(X - 3)(X - 4)$



Nota 4.18.

4.3. Polinomio característico

Nota 4.18.

4.3. Polinomio característico

Hemos definido el polinomio característico de una matriz de forma que sus raíces sean los valores propios de dicha matriz.

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$.

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$. Entonces:

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$. Entonces:

1. $p(X)$ es un polinomio mónico de grado n , es decir:

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$. Entonces:

1. $p(X)$ es un polinomio mónico de grado n , es decir:

$$p(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$. Entonces:

1. $p(X)$ es un polinomio mónico de grado n , es decir:

$$p(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

2. $b_{n-1} = -\operatorname{tr} A$.

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$. Entonces:

1. $p(X)$ es un polinomio mónico de grado n , es decir:

$$p(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

2. $b_{n-1} = -\operatorname{tr} A$.
3. $b_0 = (-1)^n \det A$.

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$. Entonces:

1. $p(X)$ es un polinomio mónico de grado n , es decir:

$$p(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

2. $b_{n-1} = -\operatorname{tr} A$.
3. $b_0 = (-1)^n \det A$.

Demostración.

3.

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$. Entonces:

1. $p(X)$ es un polinomio mónico de grado n , es decir:

$$p(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

2. $b_{n-1} = -\operatorname{tr} A$.
3. $b_0 = (-1)^n \det A$.

Demostración.

3. Basta evaluar $p(X)$ en $X = 0$:

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$. Entonces:

1. $p(X)$ es un polinomio mónico de grado n , es decir:

$$p(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

2. $b_{n-1} = -\operatorname{tr} A$.
3. $b_0 = (-1)^n \det A$.

Demostración.

3. Basta evaluar $p(X)$ en $X = 0$:

$$b_0 = p(0)$$

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$. Entonces:

1. $p(X)$ es un polinomio mónico de grado n , es decir:

$$p(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

2. $b_{n-1} = -\operatorname{tr} A$.
3. $b_0 = (-1)^n \det A$.

Demostración.

3. Basta evaluar $p(X)$ en $X = 0$:

$$b_0 = p(0) = \det(0 \cdot I_n - A)$$

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$. Entonces:

1. $p(X)$ es un polinomio mónico de grado n , es decir:

$$p(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

2. $b_{n-1} = -\operatorname{tr} A$.
3. $b_0 = (-1)^n \det A$.

Demostración.

3. Basta evaluar $p(X)$ en $X = 0$:

$$b_0 = p(0) = \det(0 \cdot I_n - A) = \det(-A)$$

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$. Entonces:

1. $p(X)$ es un polinomio mónico de grado n , es decir:

$$p(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

2. $b_{n-1} = -\operatorname{tr} A$.
3. $b_0 = (-1)^n \det A$.

Demostración.

3. Basta evaluar $p(X)$ en $X = 0$:

$$b_0 = p(0) = \det(0 \cdot I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

2.

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

2. Para calcular $\det(XI_n - A)$ sumamos todos los posibles productos de n entradas de la matriz $XI_n - A$ de manera que cojamos una entrada de cada fila y de cada columna.

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

2. Para calcular $\det(XI_n - A)$ sumamos todos los posibles productos de n entradas de la matriz $XI_n - A$ de manera que cojamos una entrada de cada fila y de cada columna.

Estos productos son polinomios de grado el número de entradas que hayamos cogido de la diagonal principal.

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

2. Para calcular $\det(XI_n - A)$ sumamos todos los posibles productos de n entradas de la matriz $XI_n - A$ de manera que cojamos una entrada de cada fila y de cada columna.

Estos productos son polinomios de grado el número de entradas que hayamos cogido de la diagonal principal.

Luego solo contribuirán al término b_{n-1} si escogemos al menos $n - 1$ entradas de la diagonal principal.

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

2. Para calcular $\det(XI_n - A)$ sumamos todos los posibles productos de n entradas de la matriz $XI_n - A$ de manera que cojamos una entrada de cada fila y de cada columna.

Estos productos son polinomios de grado el número de entradas que hayamos cogido de la diagonal principal.

Luego solo contribuirán al término b_{n-1} si escogemos al menos $n - 1$ entradas de la diagonal principal.

Pero si elegimos todas las entradas menos una de la diagonal principal, necesariamente la última entrada también estará en la diagonal principal, ya que hay que elegir una de cada fila y columna.

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

2. Para calcular $\det(XI_n - A)$ sumamos todos los posibles productos de n entradas de la matriz $XI_n - A$ de manera que cojamos una entrada de cada fila y de cada columna.

Estos productos son polinomios de grado el número de entradas que hayamos cogido de la diagonal principal.

Luego solo contribuirán al término b_{n-1} si escogemos al menos $n - 1$ entradas de la diagonal principal.

Pero si elegimos todas las entradas menos una de la diagonal principal, necesariamente la última entrada también estará en la diagonal principal, ya que hay que elegir una de cada fila y columna.

En conclusión, la única contribución proviene de multiplicar todas las entradas de la diagonal principal.

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

$$(X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}) =$$

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

$$\begin{aligned}(X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}) &= \\ &= X^n\end{aligned}$$

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

$$\begin{aligned}(X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}) &= \\ &= X^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})X^{n-1} +\end{aligned}$$

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

$$\begin{aligned}(X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}) &= \\ &= X^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})X^{n-1} + \\ &\quad (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + \cdots + a_{n-1,n-1}a_{nn})X^{n-2}\end{aligned}$$

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

$$\begin{aligned}(X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}) &= \\ &= X^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})X^{n-1} + \\ &\quad (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + \cdots + a_{n-1,n-1}a_{nn})X^{n-2} + \cdots +\end{aligned}$$

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

$$\begin{aligned}(X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}) &= \\ &= X^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})X^{n-1} + \\ &\quad (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + \cdots + a_{n-1,n-1}a_{nn})X^{n-2} + \cdots + \\ &\quad (-1)^n \cdot a_{11} \cdots a_{nn}\end{aligned}$$

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

$$\begin{aligned}(X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}) &= \\ &= X^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})X^{n-1} + \\ &\quad (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + \cdots + a_{n-1,n-1}a_{nn})X^{n-2} + \cdots + \\ &\quad (-1)^n \cdot a_{11} \cdots a_{nn}\end{aligned}$$

Luego $b_{n-1} = -a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn}$

Propiedades 4.19.

4.3. Polinomio característico

Demostración.

$$\begin{aligned}(X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}) &= \\ &= X^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})X^{n-1} + \\ &\quad (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + \cdots + a_{n-1,n-1}a_{nn})X^{n-2} + \cdots + \\ &\quad (-1)^n \cdot a_{11} \cdots a_{nn}\end{aligned}$$

Luego $b_{n-1} = -a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn} = -\operatorname{tr} A$. □

Corolario 4.20.

4.3. Polinomio característico

Corolario 4.20.

4.3. Polinomio característico

Supongamos que podemos factorizar el polinomio característico de la matriz A como $p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k}$.

Corolario 4.20.

4.3. Polinomio característico

Supongamos que podemos factorizar el polinomio característico de la matriz A como $p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k}$.

(Esto siempre es posible si el cuerpo de escalares es $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Corolario 4.20.

4.3. Polinomio característico

Supongamos que podemos factorizar el polinomio característico de la matriz A como $p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k}$.

(Esto siempre es posible si el cuerpo de escalares es $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Entonces:

Corolario 4.20.

4.3. Polinomio característico

Supongamos que podemos factorizar el polinomio característico de la matriz A como $p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k}$.

(Esto siempre es posible si el cuerpo de escalares es $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Entonces:

1. $\operatorname{tr} A = M_1 \lambda_1 + \cdots + M_k \lambda_k$.

Corolario 4.20.

4.3. Polinomio característico

Supongamos que podemos factorizar el polinomio característico de la matriz A como $p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k}$.

(Esto siempre es posible si el cuerpo de escalares es $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Entonces:

1. $\operatorname{tr} A = M_1 \lambda_1 + \cdots + M_k \lambda_k$.
2. $\det A = \lambda_1^{M_1} \cdots \lambda_k^{M_k}$.

Nota 4.21.

4.3. Polinomio característico

Nota 4.21.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) = \det(XI_n - A)$ el polinomio característico de A ;

Nota 4.21.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) = \det(XI_n - A)$ el polinomio característico de A ; recuerda que es un polinomio mónico.

Nota 4.21.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) = \det(XI_n - A)$ el polinomio característico de A ; recuerda que es un polinomio mónico.

Sea $q(X) = \det(A - XI_n)$.

Nota 4.21.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) = \det(XI_n - A)$ el polinomio característico de A ; recuerda que es un polinomio mónico.

Sea $q(X) = \det(A - XI_n)$.

Entonces $q(X) = (-1)^n p(X)$.

Nota 4.21.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) = \det(XI_n - A)$ el polinomio característico de A ; recuerda que es un polinomio mónico.

Sea $q(X) = \det(A - XI_n)$.

Entonces $q(X) = (-1)^n p(X)$.

Luego si n es impar estos dos polinomios no son iguales,

Nota 4.21.

4.3. Polinomio característico

Sea $p(X) = \det(XI_n - A)$ el polinomio característico de A ; recuerda que es un polinomio mónico.

Sea $q(X) = \det(A - XI_n)$.

Entonces $q(X) = (-1)^n p(X)$.

Luego si n es impar estos dos polinomios no son iguales, pero sí que tienen las mismas raíces.

Propiedad 4.22.

4.3. Polinomio característico

Propiedad 4.22.

4.3. Polinomio característico

Si dos matrices son semejantes,

Propiedad 4.22.

4.3. Polinomio característico

Si dos matrices son semejantes,
entonces tienen el mismo polinomio característico.

Propiedad 4.22.

4.3. Polinomio característico

Si dos matrices son semejantes,
entonces tienen el mismo polinomio característico.

Demostración.

Propiedad 4.22.

4.3. Polinomio característico

Si dos matrices son semejantes,
entonces tienen el mismo polinomio característico.

Demostración.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$,

Propiedad 4.22.

4.3. Polinomio característico

Si dos matrices son semejantes,
entonces tienen el mismo polinomio característico.

Demostración.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$,

y supongamos que existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ regular t.q. $B = P^{-1}AP$.

Propiedad 4.22.

4.3. Polinomio característico

Si dos matrices son semejantes,
entonces tienen el mismo polinomio característico.

Demostración.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$,

y supongamos que existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ regular t.q. $B = P^{-1}AP$.

$$|XI_n - B|$$

Propiedad 4.22.

4.3. Polinomio característico

Si dos matrices son semejantes,
entonces tienen el mismo polinomio característico.

Demostración.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$,

y supongamos que existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ regular t.q. $B = P^{-1}AP$.

$$|XI_n - B| = |X(P^{-1}I_nP) - P^{-1}AP|$$

Propiedad 4.22.

4.3. Polinomio característico

Si dos matrices son semejantes,
entonces tienen el mismo polinomio característico.

Demostración.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$,

y supongamos que existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ regular t.q. $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} |XI_n - B| &= |X(P^{-1}I_nP) - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(XI_n)P - P^{-1}AP| \end{aligned}$$

Propiedad 4.22.

4.3. Polinomio característico

Si dos matrices son semejantes,
entonces tienen el mismo polinomio característico.

Demostración.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$,

y supongamos que existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ regular t.q. $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} |XI_n - B| &= |X(P^{-1}I_nP) - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(XI_n)P - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}| \cdot |XI_n - A| \cdot |P| \end{aligned}$$

Propiedad 4.22.

4.3. Polinomio característico

Si dos matrices son semejantes,
entonces tienen el mismo polinomio característico.

Demostración.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$,

y supongamos que existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ regular t.q. $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} |XI_n - B| &= |X(P^{-1}I_nP) - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(XI_n)P - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}| \cdot |XI_n - A| \cdot |P| \\ &= |P|^{-1} \cdot |P| \cdot |XI_n - A| \end{aligned}$$

Propiedad 4.22.

4.3. Polinomio característico

Si dos matrices son semejantes,
entonces tienen el mismo polinomio característico.

Demostración.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$,

y supongamos que existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ regular t.q. $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} |XI_n - B| &= |X(P^{-1}I_nP) - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(XI_n)P - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}| \cdot |XI_n - A| \cdot |P| \\ &= |P|^{-1} \cdot |P| \cdot |XI_n - A| = |XI_n - A| \end{aligned}$$



Notas 4.23.

4.3. Polinomio característico

Notas 4.23.

4.3. Polinomio característico

1. Ya sabíamos que si dos matrices son semejantes, entonces tienen el mismo determinante, la misma traza, y los mismos valores propios. La propiedad 4.22 es una demostración alternativa de esto.

Notas 4.23.

4.3. Polinomio característico

1. Ya sabíamos que si dos matrices son semejantes, entonces tienen el mismo determinante, la misma traza, y los mismos valores propios. La propiedad 4.22 es una demostración alternativa de esto.
2. Gracias a la propiedad 4.22 podemos definir el polinomio característico de un endomorfismo como el polinomio característico de su matriz respecto a una base cualquiera.

Ejercicios 4.24.

4.3. Polinomio característico

- 4.10
- 4.11
- 4.12

Capítulo 4. Valores y vectores propios

4.1. Valores propios

4.2. Vectores propios

4.3. Polinomio característico

4.4. Subespacios fundamentales

4.5. Criterio de diagonalización

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base.

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base.
Sea λ un valor propio de f

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base. Sea λ un valor propio de f (es decir, λ es un valor propio de A).

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base. Sea λ un valor propio de f (es decir, λ es un valor propio de A).

Entonces:

$$\dim S_f(\lambda) = \dim S_A(\lambda) = n - \text{rango}(\lambda I_n - A)$$

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base. Sea λ un valor propio de f (es decir, λ es un valor propio de A).

Entonces:

$$\dim S_f(\lambda) = \dim S_A(\lambda) = n - \text{rango}(\lambda I_n - A)$$

Demostración.

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base. Sea λ un valor propio de f (es decir, λ es un valor propio de A).

Entonces:

$$\dim S_f(\lambda) = \dim S_A(\lambda) = n - \text{rango}(\lambda I_n - A)$$

Demostración.

Recordamos que, si A es la matriz de f en la base fijada, entonces

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base. Sea λ un valor propio de f (es decir, λ es un valor propio de A).

Entonces:

$$\dim S_f(\lambda) = \dim S_A(\lambda) = n - \text{rango}(\lambda I_n - A)$$

Demostración.

Recordamos que, si A es la matriz de f en la base fijada, entonces $\lambda I_n - A$ es la matriz del endomorfismo $\lambda \text{id}_V - f$ en esa misma base.

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base. Sea λ un valor propio de f (es decir, λ es un valor propio de A).

Entonces:

$$\dim S_f(\lambda) = \dim S_A(\lambda) = n - \text{rango}(\lambda I_n - A)$$

Demostración.

Recordamos que, si A es la matriz de f en la base fijada, entonces $\lambda I_n - A$ es la matriz del endomorfismo $\lambda \text{id}_V - f$ en esa misma base.

Por lo tanto, $\text{rango}(\lambda \text{id}_V - f) = \text{rango}(\lambda I_n - A)$.

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base. Sea λ un valor propio de f (es decir, λ es un valor propio de A).

Entonces:

$$\dim S_f(\lambda) = \dim S_A(\lambda) = n - \text{rango}(\lambda I_n - A)$$

Demostración.

Recordamos que, si A es la matriz de f en la base fijada, entonces $\lambda I_n - A$ es la matriz del endomorfismo $\lambda \text{id}_V - f$ en esa misma base.

Por lo tanto, $\text{rango}(\lambda \text{id}_V - f) = \text{rango}(\lambda I_n - A)$.

$$\dim S_f(\lambda) = \dim \ker(\lambda \text{id}_V - f)$$

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base. Sea λ un valor propio de f (es decir, λ es un valor propio de A).

Entonces:

$$\dim S_f(\lambda) = \dim S_A(\lambda) = n - \text{rango}(\lambda I_n - A)$$

Demostración.

Recordamos que, si A es la matriz de f en la base fijada, entonces $\lambda I_n - A$ es la matriz del endomorfismo $\lambda \text{id}_V - f$ en esa misma base.

Por lo tanto, $\text{rango}(\lambda \text{id}_V - f) = \text{rango}(\lambda I_n - A)$.

$$\dim S_f(\lambda) = \dim \ker(\lambda \text{id}_V - f) = \dim V - \text{rango}(\lambda \text{id}_V - f)$$

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base. Sea λ un valor propio de f (es decir, λ es un valor propio de A).

Entonces:

$$\dim S_f(\lambda) = \dim S_A(\lambda) = n - \text{rango}(\lambda I_n - A)$$

Demostración.

Recordamos que, si A es la matriz de f en la base fijada, entonces $\lambda I_n - A$ es la matriz del endomorfismo $\lambda \text{id}_V - f$ en esa misma base.

Por lo tanto, $\text{rango}(\lambda \text{id}_V - f) = \text{rango}(\lambda I_n - A)$.

$$\begin{aligned} \dim S_f(\lambda) &= \dim \ker(\lambda \text{id}_V - f) = \dim V - \text{rango}(\lambda \text{id}_V - f) \\ &= \dim \mathbb{F}^n - \text{rango}(\lambda I_n - A) \end{aligned}$$

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base. Sea λ un valor propio de f (es decir, λ es un valor propio de A).

Entonces:

$$\dim S_f(\lambda) = \dim S_A(\lambda) = n - \text{rango}(\lambda I_n - A)$$

Demostración.

Recordamos que, si A es la matriz de f en la base fijada, entonces $\lambda I_n - A$ es la matriz del endomorfismo $\lambda \text{id}_V - f$ en esa misma base.

Por lo tanto, $\text{rango}(\lambda \text{id}_V - f) = \text{rango}(\lambda I_n - A)$.

$$\begin{aligned} \dim S_f(\lambda) &= \dim \ker(\lambda \text{id}_V - f) = \dim V - \text{rango}(\lambda \text{id}_V - f) \\ &= \dim \mathbb{F}^n - \text{rango}(\lambda I_n - A) = \dim \ker(\lambda I_n - A) \end{aligned}$$

Nota 4.25.

4.4. Subespacios fundamentales

Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base. Sea λ un valor propio de f (es decir, λ es un valor propio de A).

Entonces:

$$\dim S_f(\lambda) = \dim S_A(\lambda) = n - \text{rango}(\lambda I_n - A)$$

Demostración.

Recordamos que, si A es la matriz de f en la base fijada, entonces $\lambda I_n - A$ es la matriz del endomorfismo $\lambda \text{id}_V - f$ en esa misma base.

Por lo tanto, $\text{rango}(\lambda \text{id}_V - f) = \text{rango}(\lambda I_n - A)$.

$$\begin{aligned} \dim S_f(\lambda) &= \dim \ker(\lambda \text{id}_V - f) = \dim V - \text{rango}(\lambda \text{id}_V - f) \\ &= \dim \mathbb{F}^n - \text{rango}(\lambda I_n - A) = \dim \ker(\lambda I_n - A) = \dim S_A(\lambda) \end{aligned}$$



Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Los subespacios fundamentales

tienen suma directa.

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Los subespacios fundamentales de un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita tienen suma directa.

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Los subespacios fundamentales de un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita tienen suma directa.

Demostración.

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Los subespacios fundamentales de un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita tienen suma directa.

Demostración.

Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son k valores propios distintos de f .

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Los subespacios fundamentales de un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita tienen suma directa.

Demostración.

Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son k valores propios distintos de f .

Veamos que $S(\lambda_1) \oplus \dots \oplus S(\lambda_k)$ mediante inducción sobre k .

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Los subespacios fundamentales de un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita tienen suma directa.

Demostración.

Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son k valores propios distintos de f .

Veamos que $S(\lambda_1) \oplus \dots \oplus S(\lambda_k)$ mediante inducción sobre k .

$$v_1 + \dots + v_k = \bar{0}, \quad \text{con } v_i \in S(\lambda_i) \quad \forall i \quad \stackrel{?}{\implies} \quad v_i = \bar{0} \quad \forall i$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Los subespacios fundamentales de un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita tienen suma directa.

Demostración.

Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son k valores propios distintos de f .

Veamos que $S(\lambda_1) \oplus \dots \oplus S(\lambda_k)$ mediante inducción sobre k .

$$v_1 + \dots + v_k = \bar{0}, \quad \text{con } v_i \in S(\lambda_i) \quad \forall i \quad \stackrel{?}{\implies} \quad v_i = \bar{0} \quad \forall i$$

El resultado es trivial para $k = 1$.

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Los subespacios fundamentales de un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita tienen suma directa.

Demostración.

Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son k valores propios distintos de f .

Veamos que $S(\lambda_1) \oplus \dots \oplus S(\lambda_k)$ mediante inducción sobre k .

$$v_1 + \dots + v_k = \bar{0}, \quad \text{con } v_i \in S(\lambda_i) \quad \forall i \quad \stackrel{?}{\implies} \quad v_i = \bar{0} \quad \forall i$$

El resultado es trivial para $k = 1$. Supongamos que es cierto para $k - 1$.

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\bar{0} = f(\bar{0})$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\bar{0} = f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k)$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\bar{0} = f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k)$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\bar{0} = f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\begin{aligned}\bar{0} &= f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ \bar{0} &= \lambda_k \cdot \bar{0}\end{aligned}$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\bar{0} = f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

$$\bar{0} = \lambda_k \cdot \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\begin{aligned}\bar{0} &= f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ &\quad - \qquad \qquad \bar{0} = \lambda_k \cdot \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k\end{aligned}$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\begin{aligned}\bar{0} &= f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ - \quad \quad \quad \bar{0} &= \lambda_k \cdot \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k\end{aligned}$$

$$\bar{0} = (\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \cdots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\begin{aligned}\bar{0} &= f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ - \quad \quad \quad \bar{0} &= \lambda_k \cdot \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k\end{aligned}$$

$$\bar{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)v_1}_{\in S_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}}_{\in S_{k-1}}$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\begin{aligned}\bar{0} &= f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ - \quad \quad \quad \bar{0} &= \lambda_k \cdot \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k\end{aligned}$$

$$\bar{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)v_1}_{\in S_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}}_{\in S_{k-1}}$$

inducción \rightarrow

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\begin{aligned}\bar{0} &= f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ - \quad \quad \quad \bar{0} &= \lambda_k \cdot \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k\end{aligned}$$

$$\bar{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)v_1}_{\in S_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}}_{\in S_{k-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{inducción}} (\lambda_i - \lambda_k)v_i = \bar{0}$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\begin{aligned}\bar{0} &= f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ - \quad \quad \quad \bar{0} &= \lambda_k \cdot \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k\end{aligned}$$

$$\bar{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)v_1}_{\in S_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}}_{\in S_{k-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{inducción}} (\lambda_i - \lambda_k)v_i = \bar{0} \qquad 1 \leq i \leq k-1$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\begin{aligned}\bar{0} &= f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ - \quad \quad \quad \bar{0} &= \lambda_k \cdot \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k\end{aligned}$$

$$\bar{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)v_1}_{\in S_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}}_{\in S_{k-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{inducción}} (\lambda_i - \lambda_k)v_i = \bar{0} \xrightarrow{\lambda_i \neq \lambda_k} 1 \leq i \leq k-1$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\begin{aligned}\bar{0} &= f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ - \quad \quad \quad \bar{0} &= \lambda_k \cdot \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k\end{aligned}$$

$$\bar{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)v_1}_{\in S_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}}_{\in S_{k-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{inducción}} (\lambda_i - \lambda_k)v_i = \bar{0} \xrightarrow{\lambda_i \neq \lambda_k} v_i = \bar{0}, \quad 1 \leq i \leq k-1$$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\begin{aligned}\bar{0} &= f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ - \quad \quad \quad \bar{0} &= \lambda_k \cdot \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k\end{aligned}$$

$$\bar{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)v_1}_{\in S_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}}_{\in S_{k-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{inducción}} (\lambda_i - \lambda_k)v_i = \bar{0} \xrightarrow{\lambda_i \neq \lambda_k} v_i = \bar{0}, \quad 1 \leq i \leq k-1$$

Finalmente, $v_k = -v_1 - \cdots - v_{k-1}$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\begin{aligned}\bar{0} &= f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ - \quad \quad \quad \bar{0} &= \lambda_k \cdot \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k\end{aligned}$$

$$\bar{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)v_1}_{\in S_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}}_{\in S_{k-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{inducción}} (\lambda_i - \lambda_k)v_i = \bar{0} \xrightarrow{\lambda_i \neq \lambda_k} v_i = \bar{0}, \quad 1 \leq i \leq k-1$$

Finalmente, $v_k = -v_1 - \cdots - v_{k-1} = -\bar{0} - \cdots - \bar{0}$

Proposición 4.26.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

$$\begin{aligned}\bar{0} &= f(\bar{0}) = f(v_1 + \cdots + v_k) = f(v_1) + \cdots + f(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ - \quad \quad \quad \bar{0} &= \lambda_k \cdot \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k\end{aligned}$$

$$\bar{0} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)v_1}_{\in S_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}}_{\in S_{k-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{inducción}} (\lambda_i - \lambda_k)v_i = \bar{0} \xrightarrow{\lambda_i \neq \lambda_k} v_i = \bar{0}, \quad 1 \leq i \leq k-1$$

Finalmente, $v_k = -v_1 - \cdots - v_{k-1} = -\bar{0} - \cdots - \bar{0} = \bar{0}$. □

Definiciones 4.27 y nota 4.28.

4.4. Subespacios fundamentales

Definiciones 4.27 y nota 4.28.

4.4. Subespacios fundamentales

Definiciones 4.27.

Definiciones 4.27 y nota 4.28.

4.4. Subespacios fundamentales

Definiciones 4.27.

Sea λ un valor propio del endomorfismo f .

Definiciones 4.27 y nota 4.28.

4.4. Subespacios fundamentales

Definiciones 4.27.

Sea λ un valor propio del endomorfismo f .

1. La **multiplicidad geométrica** de λ es

Definiciones 4.27 y nota 4.28.

4.4. Subespacios fundamentales

Definiciones 4.27.

Sea λ un valor propio del endomorfismo f .

1. La **multiplicidad geométrica** de λ es la dimensión del subespacio fundamental $S(\lambda)$.

Definiciones 4.27 y nota 4.28.

4.4. Subespacios fundamentales

Definiciones 4.27.

Sea λ un valor propio del endomorfismo f .

1. La **multiplicidad geométrica** de λ es la dimensión del subespacio fundamental $S(\lambda)$.
2. La **multiplicidad algebraica** de λ es

Definiciones 4.27 y nota 4.28.

4.4. Subespacios fundamentales

Definiciones 4.27.

Sea λ un valor propio del endomorfismo f .

1. La **multiplicidad geométrica** de λ es la dimensión del subespacio fundamental $S(\lambda)$.
2. La **multiplicidad algebraica** de λ es su multiplicidad como raíz en el polinomio característico.

Definiciones 4.27 y nota 4.28.

4.4. Subespacios fundamentales

Definiciones 4.27.

Sea λ un valor propio del endomorfismo f .

1. La **multiplicidad geométrica** de λ es la dimensión del subespacio fundamental $S(\lambda)$.
2. La **multiplicidad algebraica** de λ es su multiplicidad como raíz en el polinomio característico.

Nota 4.28.

Definiciones 4.27 y nota 4.28.

4.4. Subespacios fundamentales

Definiciones 4.27.

Sea λ un valor propio del endomorfismo f .

1. La **multiplicidad geométrica** de λ es la dimensión del subespacio fundamental $S(\lambda)$.
2. La **multiplicidad algebraica** de λ es su multiplicidad como raíz en el polinomio característico.

Nota 4.28.

La multiplicidad geométrica de un valor propio es mayor o igual que 1.

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

La multiplicidad geométrica de un valor propio es menor o igual que la multiplicidad algebraica.

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

La multiplicidad geométrica de un valor propio es menor o igual que la multiplicidad algebraica.

Demostración.

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

La multiplicidad geométrica de un valor propio es menor o igual que la multiplicidad algebraica.

Demostración.

Sea λ un valor propio de f ,

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

La multiplicidad geométrica de un valor propio es menor o igual que la multiplicidad algebraica.

Demostración.

Sea λ un valor propio de f , sea $m = \dim S(\lambda)$ su multiplicidad geométrica.

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

La multiplicidad geométrica de un valor propio es menor o igual que la multiplicidad algebraica.

Demostración.

Sea λ un valor propio de f , sea $m = \dim S(\lambda)$ su multiplicidad geométrica.

Sea (v_1, \dots, v_m) una base de $S(\lambda)$,

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

La multiplicidad geométrica de un valor propio es menor o igual que la multiplicidad algebraica.

Demostración.

Sea λ un valor propio de f , sea $m = \dim S(\lambda)$ su multiplicidad geométrica.

Sea (v_1, \dots, v_m) una base de $S(\lambda)$, la ampliamos con v_{m+1}, \dots, v_n

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

La multiplicidad geométrica de un valor propio es menor o igual que la multiplicidad algebraica.

Demostración.

Sea λ un valor propio de f , sea $m = \dim S(\lambda)$ su multiplicidad geométrica.

Sea (v_1, \dots, v_m) una base de $S(\lambda)$, la ampliamos con v_{m+1}, \dots, v_n hasta que $(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ sea base de V .

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

La matriz de f respecto de dicha base es la matriz por bloques:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m & B \\ \hline & C \end{array} \right)$$

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

La matriz de f respecto de dicha base es la matriz por bloques:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m & B \\ \hline & C \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} m \times m & m \times (n - m) \\ \hline & (n - m) \times (n - m) \end{array} \right)$$

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

La matriz de f respecto de dicha base es la matriz por bloques:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m & B \\ \hline & C \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} m \times m & m \times (n - m) \\ \hline & (n - m) \times (n - m) \end{array} \right)$$

El polinomio característico de f es el polinomio característico de A :

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

La matriz de f respecto de dicha base es la matriz por bloques:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m & B \\ \hline & C \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} m \times m & m \times (n - m) \\ \hline & (n - m) \times (n - m) \end{array} \right)$$

El polinomio característico de f es el polinomio característico de A :

$$\det(XI_n - A)$$

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

La matriz de f respecto de dicha base es la matriz por bloques:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m & B \\ \hline & C \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} m \times m & m \times (n - m) \\ \hline (n - m) \times (n - m) & \end{array} \right)$$

El polinomio característico de f es el polinomio característico de A :

$$\det(XI_n - A) = \det \left(\begin{array}{c|c} (X - \lambda)I_m & -B \\ \hline & XI_{n-m} - C \end{array} \right)$$

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

La matriz de f respecto de dicha base es la matriz por bloques:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m & B \\ \hline & C \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} m \times m & m \times (n-m) \\ \hline & (n-m) \times (n-m) \end{array} \right)$$

El polinomio característico de f es el polinomio característico de A :

$$\begin{aligned} \det(XI_n - A) &= \det \left(\begin{array}{c|c} (X - \lambda)I_m & -B \\ \hline & XI_{n-m} - C \end{array} \right) \\ &= (X - \lambda)^m \cdot \det(XI_{n-m} - C) \end{aligned}$$

Proposición 4.29.

4.4. Subespacios fundamentales

Demostración.

La matriz de f respecto de dicha base es la matriz por bloques:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m & B \\ \hline & C \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} m \times m & m \times (n-m) \\ \hline & (n-m) \times (n-m) \end{array} \right)$$

El polinomio característico de f es el polinomio característico de A :

$$\begin{aligned} \det(XI_n - A) &= \det \left(\begin{array}{c|c} (X - \lambda)I_m & -B \\ \hline & XI_{n-m} - C \end{array} \right) \\ &= (X - \lambda)^m \cdot \det(XI_{n-m} - C) \end{aligned}$$

Así, la multiplicidad de λ en el polinomio característico es al menos m . \square

Ejercicios 4.30.

4.4. Subespacios fundamentales

- 4.13
- 4.14
- 4.15

Capítulo 4. Valores y vectores propios

4.1. Valores propios

4.2. Vectores propios

4.3. Polinomio característico

4.4. Subespacios fundamentales

4.5. Criterio de diagonalización

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita,

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita, y sea f un endomorfismo de V .

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita, y sea f un endomorfismo de V .

Entonces son equivalentes:

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita, y sea f un endomorfismo de V .

Entonces son equivalentes:

1. f es diagonalizable.

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita, y sea f un endomorfismo de V .

Entonces son equivalentes:

1. f es diagonalizable.
2. La suma de los subespacios fundamentales es el espacio total V .

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita, y sea f un endomorfismo de V .

Entonces son equivalentes:

1. f es diagonalizable.
2. La suma de los subespacios fundamentales es el espacio total V .
3. El polinomio característico puede factorizarse como producto de polinomios de grado 1 con coeficientes en el cuerpo de escalares \mathbb{F} ,

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial de dimensión finita, y sea f un endomorfismo de V .

Entonces son equivalentes:

1. f es diagonalizable.
2. La suma de los subespacios fundamentales es el espacio total V .
3. El polinomio característico puede factorizarse como producto de polinomios de grado 1 con coeficientes en el cuerpo de escalares \mathbb{F} , y las multiplicidades geométrica y algebraica de cada valor propio coinciden.

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

- $(2 \Rightarrow 1)$

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Los subespacios fundamentales siempre tienen suma directa,

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Los subespacios fundamentales siempre tienen suma directa, y además sabemos por hipótesis que dicha suma es el total.

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

- (2 \Rightarrow 1) Los subespacios fundamentales siempre tienen suma directa, y además sabemos por hipótesis que dicha suma es el total.

Al juntar una base de cada $S(\lambda_i)$, obtenemos una base de V .

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Los subespacios fundamentales siempre tienen suma directa, y además sabemos por hipótesis que dicha suma es el total.

Al juntar una base de cada $S(\lambda_i)$, obtenemos una base de V .

\exists una base formada por vectores propios, luego f es diagonalizable.

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Los subespacios fundamentales siempre tienen suma directa, y además sabemos por hipótesis que dicha suma es el total.

Al juntar una base de cada $S(\lambda_i)$, obtenemos una base de V .

\exists una base formada por vectores propios, luego f es diagonalizable.

- $(1 \Rightarrow 2)$

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Los subespacios fundamentales siempre tienen suma directa, y además sabemos por hipótesis que dicha suma es el total.

Al juntar una base de cada $S(\lambda_i)$, obtenemos una base de V .

\exists una base formada por vectores propios, luego f es diagonalizable.

- $(1 \Rightarrow 2)$ f diagonaliz. $\Rightarrow \exists$ una base (v_1, \dots, v_n) de autovectores de V

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Los subespacios fundamentales siempre tienen suma directa, y además sabemos por hipótesis que dicha suma es el total.

Al juntar una base de cada $S(\lambda_i)$, obtenemos una base de V .

\exists una base formada por vectores propios, luego f es diagonalizable.

- $(1 \Rightarrow 2)$ f diagonaliz. $\Rightarrow \exists$ una base (v_1, \dots, v_n) de autovectores de V
Cada v_i está en un $S(\lambda_j)$

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Los subespacios fundamentales siempre tienen suma directa, y además sabemos por hipótesis que dicha suma es el total.

Al juntar una base de cada $S(\lambda_i)$, obtenemos una base de V .

\exists una base formada por vectores propios, luego f es diagonalizable.

- $(1 \Rightarrow 2)$ f diagonaliz. $\Rightarrow \exists$ una base (v_1, \dots, v_n) de autovectores de V
Cada v_i está en un $S(\lambda_j) \Rightarrow \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq S(\lambda_1) \oplus \dots \oplus S(\lambda_k)$.

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Los subespacios fundamentales siempre tienen suma directa, y además sabemos por hipótesis que dicha suma es el total.

Al juntar una base de cada $S(\lambda_i)$, obtenemos una base de V .

\exists una base formada por vectores propios, luego f es diagonalizable.

- $(1 \Rightarrow 2)$ f diagonaliz. $\Rightarrow \exists$ una base (v_1, \dots, v_n) de autovectores de V
Cada v_i está en un $S(\lambda_j) \Rightarrow \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq S(\lambda_1) \oplus \dots \oplus S(\lambda_k)$.
 (v_1, \dots, v_n) base

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Los subespacios fundamentales siempre tienen suma directa, y además sabemos por hipótesis que dicha suma es el total.

Al juntar una base de cada $S(\lambda_j)$, obtenemos una base de V .

\exists una base formada por vectores propios, luego f es diagonalizable.

- $(1 \Rightarrow 2)$ f diagonaliz. $\Rightarrow \exists$ una base (v_1, \dots, v_n) de autovectores de V
Cada v_i está en un $S(\lambda_j) \Rightarrow \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq S(\lambda_1) \oplus \dots \oplus S(\lambda_k)$.
 (v_1, \dots, v_n) base $\Rightarrow \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Asumamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Los subespacios fundamentales siempre tienen suma directa, y además sabemos por hipótesis que dicha suma es el total.

Al juntar una base de cada $S(\lambda_i)$, obtenemos una base de V .

\exists una base formada por vectores propios, luego f es diagonalizable.

- $(1 \Rightarrow 2)$ f diagonaliz. $\Rightarrow \exists$ una base (v_1, \dots, v_n) de autovectores de V
Cada v_i está en un $S(\lambda_j) \Rightarrow \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq S(\lambda_1) \oplus \dots \oplus S(\lambda_k)$.
 (v_1, \dots, v_n) base $\Rightarrow \text{span}\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V \Rightarrow S(\lambda_1) \oplus \dots \oplus S(\lambda_k) = V$

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Ya sabemos: f diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Ya sabemos: f diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$

Sea M_i la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i .

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Ya sabemos: f diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$

Sea M_i la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i .

Siempre podemos escribir el polinomio característico $p(X)$ como:

$$p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k} q(X)$$

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Ya sabemos: f diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$

Sea M_i la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i .

Siempre podemos escribir el polinomio característico $p(X)$ como:

$$p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k} q(X)$$

(El polinomio mónico $q(X)$ no tiene raíces en el cuerpo de escalares \mathbb{F}).

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Ya sabemos: f diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$

Sea M_i la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i .

Siempre podemos escribir el polinomio característico $p(X)$ como:

$$p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k} q(X)$$

(El polinomio mónico $q(X)$ no tiene raíces en el cuerpo de escalares \mathbb{F}).

$$\dim V = \deg p(X)$$

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Ya sabemos: f diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$

Sea M_i la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i .

Siempre podemos escribir el polinomio característico $p(X)$ como:

$$p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k} q(X)$$

(El polinomio mónico $q(X)$ no tiene raíces en el cuerpo de escalares \mathbb{F}).

$$\dim V = \deg p(X) = M_1 + \cdots + M_k + \deg q(X)$$

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Ya sabemos: f diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$

Sea M_i la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i .

Siempre podemos escribir el polinomio característico $p(X)$ como:

$$p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k} q(X)$$

(El polinomio mónico $q(X)$ no tiene raíces en el cuerpo de escalares \mathbb{F}).

$$\begin{aligned} \dim V &= \deg p(X) = M_1 + \cdots + M_k + \deg q(X) \\ &\geq M_1 + \cdots + M_k \end{aligned}$$

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Ya sabemos: f diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$

Sea M_i la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i .

Siempre podemos escribir el polinomio característico $p(X)$ como:

$$p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k} q(X)$$

(El polinomio mónico $q(X)$ no tiene raíces en el cuerpo de escalares \mathbb{F}).

$$\begin{aligned} \dim V &= \deg p(X) = M_1 + \cdots + M_k + \deg q(X) \\ &\geq M_1 + \cdots + M_k \geq \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k) \end{aligned}$$

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Ya sabemos: f diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$

Sea M_i la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i .

Siempre podemos escribir el polinomio característico $p(X)$ como:

$$p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k} q(X)$$

(El polinomio mónico $q(X)$ no tiene raíces en el cuerpo de escalares \mathbb{F}).

$$\begin{aligned} \dim V = \deg p(X) &= M_1 + \cdots + M_k + \deg q(X) \\ &\geq M_1 + \cdots + M_k \geq \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k) \end{aligned}$$

Las dos igualdades se cumplen si y solo si

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Ya sabemos: f diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$

Sea M_i la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i .

Siempre podemos escribir el polinomio característico $p(X)$ como:

$$p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k} q(X)$$

(El polinomio mónico $q(X)$ no tiene raíces en el cuerpo de escalares \mathbb{F}).

$$\begin{aligned} \dim V = \deg p(X) &= M_1 + \cdots + M_k + \deg q(X) \\ &\geq M_1 + \cdots + M_k \geq \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k) \end{aligned}$$

Las dos igualdades se cumplen si y solo si

$$\deg q(X) = 0$$

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Ya sabemos: f diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$

Sea M_i la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i .

Siempre podemos escribir el polinomio característico $p(X)$ como:

$$p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k} q(X)$$

(El polinomio mónico $q(X)$ no tiene raíces en el cuerpo de escalares \mathbb{F}).

$$\begin{aligned} \dim V = \deg p(X) &= M_1 + \cdots + M_k + \deg q(X) \\ &\geq M_1 + \cdots + M_k \geq \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k) \end{aligned}$$

Las dos igualdades se cumplen si y solo si

$\deg q(X) = 0$ (es decir $q(X) = 1$),

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos).

4.5. Criterio de diagonalización

Demostración.

Ya sabemos: f diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$

Sea M_i la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i .

Siempre podemos escribir el polinomio característico $p(X)$ como:

$$p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k} q(X)$$

(El polinomio mónico $q(X)$ no tiene raíces en el cuerpo de escalares \mathbb{F}).

$$\begin{aligned} \dim V = \deg p(X) &= M_1 + \cdots + M_k + \deg q(X) \\ &\geq M_1 + \cdots + M_k \geq \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k) \end{aligned}$$

Las dos igualdades se cumplen si y solo si

$\deg q(X) = 0$ (es decir $q(X) = 1$), y $\dim S(\lambda_i) = M_i$ para todo i . \square

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

Veamos que la diagonalizabilidad de una matriz depende del cuerpo de escalares \mathbb{F} en el que trabajamos.

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

Veamos que la diagonalizabilidad de una matriz depende del cuerpo de escalares \mathbb{F} en el que trabajamos.

1. Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

Veamos que la diagonalizabilidad de una matriz depende del cuerpo de escalares \mathbb{F} en el que trabajamos.

1. Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es $X^2 + 4$.

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

Veamos que la diagonalizabilidad de una matriz depende del cuerpo de escalares \mathbb{F} en el que trabajamos.

1. Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es $X^2 + 4$.

A es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

Veamos que la diagonalizabilidad de una matriz depende del cuerpo de escalares \mathbb{F} en el que trabajamos.

1. Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es $X^2 + 4$.

A es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, pero no es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

Veamos que la diagonalizabilidad de una matriz depende del cuerpo de escalares \mathbb{F} en el que trabajamos.

1. Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es $X^2 + 4$.

A es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, pero no es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (y por tanto tampoco es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$).

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

2. Sea B la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

2. Sea B la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de B es $X^3 - 5X + 3$.

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

2. Sea B la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de B es $X^3 - 5X + 3$.

B no es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$,

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

2. Sea B la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de B es $X^3 - 5X + 3$.

B no es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, pero sí es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

Ejemplos 4.32.

4.5. Criterio de diagonalización

2. Sea B la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de B es $X^3 - 5X + 3$.

B no es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, pero sí es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (y por tanto también es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros,

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$.

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$.

Sea $a/b \in \mathbb{Q}$ una raíz de dicho polinomio,

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$.

Sea $a/b \in \mathbb{Q}$ una raíz de dicho polinomio, donde a y b son números enteros coprimos entre sí.

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$.

Sea $a/b \in \mathbb{Q}$ una raíz de dicho polinomio, donde a y b son números enteros coprimos entre sí.

Entonces: $a \mid c_0$, $b \mid c_n$.

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$.

Sea $a/b \in \mathbb{Q}$ una raíz de dicho polinomio, donde a y b son números enteros coprimos entre sí.

Entonces: $a \mid c_0$, $b \mid c_n$.

Demostración.

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$.

Sea $a/b \in \mathbb{Q}$ una raíz de dicho polinomio, donde a y b son números enteros coprimos entre sí.

Entonces: $a \mid c_0$, $b \mid c_n$.

Demostración.

(Antes de empezar observamos que $a \neq 0$, $b \neq 0$).

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$.

Sea $a/b \in \mathbb{Q}$ una raíz de dicho polinomio, donde a y b son números enteros coprimos entre sí.

Entonces: $a \mid c_0$, $b \mid c_n$.

Demostración.

(Antes de empezar observamos que $a \neq 0$, $b \neq 0$).

$$c_0 + c_1 \cdot \frac{a}{b} + c_2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + c_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$.

Sea $a/b \in \mathbb{Q}$ una raíz de dicho polinomio, donde a y b son números enteros coprimos entre sí.

Entonces: $a \mid c_0$, $b \mid c_n$.

Demostración.

(Antes de empezar observamos que $a \neq 0$, $b \neq 0$).

$$c_0 + c_1 \cdot \frac{a}{b} + c_2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + c_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

$$\iff b^n c_0 + ab^{n-1}c_1 + a^2b^{n-2}c_2 + \cdots + a^n c_n = 0$$

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$.

Sea $a/b \in \mathbb{Q}$ una raíz de dicho polinomio, donde a y b son números enteros coprimos entre sí.

Entonces: $a \mid c_0$, $b \mid c_n$.

Demostración.

(Antes de empezar observamos que $a \neq 0$, $b \neq 0$).

$$c_0 + c_1 \cdot \frac{a}{b} + c_2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + c_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

$$\iff b^n c_0 + ab^{n-1}c_1 + a^2b^{n-2}c_2 + \cdots + a^n c_n = 0$$

Luego $a \mid b^n c_0$

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$.

Sea $a/b \in \mathbb{Q}$ una raíz de dicho polinomio, donde a y b son números enteros coprimos entre sí.

Entonces: $a \mid c_0$, $b \mid c_n$.

Demostración.

(Antes de empezar observamos que $a \neq 0$, $b \neq 0$).

$$c_0 + c_1 \cdot \frac{a}{b} + c_2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + c_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

$$\iff b^n c_0 + ab^{n-1}c_1 + a^2b^{n-2}c_2 + \cdots + a^n c_n = 0$$

Luego $a \mid b^n c_0 \xrightarrow{a, b \text{ coprimos}}$

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$.

Sea $a/b \in \mathbb{Q}$ una raíz de dicho polinomio, donde a y b son números enteros coprimos entre sí.

Entonces: $a \mid c_0$, $b \mid c_n$.

Demostración.

(Antes de empezar observamos que $a \neq 0$, $b \neq 0$).

$$c_0 + c_1 \cdot \frac{a}{b} + c_2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + c_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

$$\iff b^n c_0 + ab^{n-1}c_1 + a^2b^{n-2}c_2 + \cdots + a^n c_n = 0$$

Luego $a \mid b^n c_0 \xrightarrow{a, b \text{ coprimos}} a \mid c_0$.

Repaso 4.33.

4.5. Criterio de diagonalización

Sea $c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$.

Sea $a/b \in \mathbb{Q}$ una raíz de dicho polinomio, donde a y b son números enteros coprimos entre sí.

Entonces: $a \mid c_0$, $b \mid c_n$.

Demostración.

(Antes de empezar observamos que $a \neq 0$, $b \neq 0$).

$$c_0 + c_1 \cdot \frac{a}{b} + c_2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + c_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$
$$\iff b^n c_0 + ab^{n-1}c_1 + a^2b^{n-2}c_2 + \cdots + a^n c_n = 0$$

Luego $a \mid b^n c_0 \xrightarrow{a, b \text{ coprimos}} a \mid c_0$. Análogamente $b \mid c_n$. \square

Ejercicios 4.34.

4.5. Criterio de diagonalización

- 4.16
- 4.17
- 4.18
- 4.19