Álgebra Lineal I

Adrián Rodrigo Escudero

20 de septiembre de 2021

https://personal.unizar.es/rodrigo
Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza
rodrigo@unizar.es

Introducción

Estos apuntes de Álgebra Lineal I surgen a lo largo de dos cursos impartiendo la asignatura; 2018-19 en la Universidad de La Rioja y 2020-21 en la Universidad de Zaragoza. Los capítulos 1, 2 y 4 están basados en los apuntes que recibí como alumno de la Universidad de Zaragoza de las profesoras Pilar Gállego Tapia y Paz Jiménez Seral, mientras que el capítulo 3 parte de unas notas de Alberto Elduque. Para mí ha sido un entretenimiento pensar cuál puede ser la manera más didáctica de explicar matemáticas.

Quiero insistir en que los ejercicios son la parte más importante de la asignatura. Muchos de los que encontrarás aquí provienen de una colección de problemas elaborada por el Área de Álgebra de la Universidad de Zaragoza.

Este documento se puede descargar desde la web:

`https://personal.unizar.es/rodrigo`

La versión de estos apuntes es la fecha que aparece en la portada, es decir, 2021-9-20. Ten en cuenta que si únicamente añado exámenes al final del texto, pero no modifico nada más (ni siquiera corregir erratas), entonces mantengo la misma fecha en la portada.

Índice general

Capítulo 1

Espacios vectoriales

1.1. Método de Gauss

Ejemplo 1.1. Imaginemos que queremos resolver el siguiente *sistema de ecuaciones lineales*:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + \ \ y = 6 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases} \tag{1.1}$$

Una opción sencilla es despejar la incógnita y de la segunda ecuación, y sustituirla en la primera. Así $y = 6 + x$, luego $7 = 3x + 2(6 + x) = 5x + 12$. Por tanto en caso de existir alguna solución, esta debe ser:

$$x = -1 \qquad\qquad y = 5 \tag{1.2}$$

¡Cuidado, todavía no hemos acabado! Tenemos que sustituir esta solución en el sistema inicial para asegurarnos de que es correcta. Observa qué pasaría si la tercera ecuación fuera $4x + 3y = 10$ en lugar de $4x + 3y = 11$.

Ejemplo 1.2. Supongamos que ahora nos plantean un sistema más complicado:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + z = 1 \\ 4x + \ \ y \qquad = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \tag{1.3}$$

El siguiente algoritmo es más eficiente. La idea es operar hasta que los coeficientes «de debajo de la diagonal» sean cero.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 2x + \ \ y + z = 1 \\ 4x + \ \ y \qquad = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \quad - \ \ y - 2z = -4 \\ \qquad 3y + 2z = 8 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y + \ \ z = 1 \\ \quad - y - 2z = -4 \\ \qquad - 4z = -4 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Ahora podemos ir obteniendo los valores de las incógnitas, empezando por la última y acabando con la primera:

$$z = 1 \qquad\qquad y = 2 \qquad\qquad x = -1 \tag{1.5}$$

Como el sistema tiene una única solución, se dice que es *compatible determinado*.

Propiedad 1.3 (Método de Gauss)**.** *Si en un sistema de ecuaciones lineales realizamos cualquiera de las siguientes tres operaciones, entonces las soluciones del nuevo sistema siguen siendo las mismas.*

1. *Multiplicar una fila por un escalar* no nulo*.*
2. *Sumar a una fila otra fila.*
3. *Intercambiar dos filas.*

Ejemplo 1.4. Vamos a resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Para ser más rápidos escribimos solamente los coeficientes de las variables (siempre en el mismo orden), y así nos ahorramos escribir las incógnitas.

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Por tanto el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \phantom{x + {}} y - 4z = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Las soluciones del sistema son:

$$z = \lambda \qquad\qquad y = 4\lambda \qquad\qquad x = -5\lambda \tag{1.9}$$

Como el sistema tiene más de una solución (una para cada valor de λ), se dice que es *compatible indeterminado*.

Definiciones 1.5.

1. En cada fila de una matriz dada, llamamos *pivote* al primer elemento no nulo empezando por la izquierda.

2. Se dice que una matriz está *escalonada por filas* si el pivote de cada fila (excepto la fila primera) está más a la derecha que el pivote de la fila anterior, y todas las filas nulas están abajo.

Ejemplo 1.6. Consideramos el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y \phantom{{}+z} = 1 \\ 2x \phantom{{}+2y} + z = 2 \\ 3x + 2y + z = a \end{cases} \tag{1.10}$$

Vamos a calcular sus soluciones, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array}\right) &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & a-3 \end{array}\right) \\ &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right) \\ &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Por lo tanto si $a = 3$ las soluciones del sistema son:

$$z = \lambda \qquad\qquad y = \frac{1}{4}\lambda \qquad\qquad x = -\frac{1}{2}\lambda + 1 \tag{1.12}$$

Mientras que si $a \neq 3$ el sistema no tiene soluciones, por lo que se dice *incompatible*.

Ejercicios 1.7. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4.

1.2. Espacios vectoriales

Notación 1.8. En esta asignatura, la letra $\mathbb{F}$ denotará siempre a uno de los tres siguientes *cuerpos*: los números racionales $\mathbb{Q}$, los números reales $\mathbb{R}$, o los números complejos $\mathbb{C}$.

Definición 1.9. Un *espacio vectorial* sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es un conjunto V dotado de una operación binaria interna

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u + v \end{aligned} \tag{1.13}$$

y una operación externa

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda v \end{aligned} \tag{1.14}$$

que satisfacen las siguientes ocho propiedades:

1. Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in V$.
2. Conmutatividad: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$.
3. Vector neutro: existe $\bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + v = v$ para todo $v \in V$.
4. Vector opuesto: para todo $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = \bar{0}$.
5. Distributividad: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$.
6. Distributividad: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $v \in V$.
7. Asociatividad: $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $v \in V$.
8. Para todo $v \in V$ se cumple que $1 \cdot v = v$.

Ejemplo 1.10. Dado un número entero n mayor o igual que 1, $\mathbb{F}^n$ es el conjunto de las n-tuplas con coeficientes en $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F} \right\} \tag{1.15}$$

$\mathbb{F}^n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ con la suma y producto siguientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

El vector neutro es $(0,\dots,0)^T$ y, dado un vector $(x_1,\dots,x_n)^T$, su vector opuesto es $(-x_1,\dots,-x_n)^T$. Observa que en esta asignatura escribimos los elementos de $\mathbb{F}^n$ siempre en columnas o, lo que es lo mismo, como vectores fila traspuestos.

Notas 1.11.

1. En las propiedades del vector neutro y el vector opuesto (propiedades 3 y 4 de la definición 1.9) el orden de los cuantificadores ('existe' y 'para todo') es fundamental. En un espacio vectorial hay un vector neutro, mientras que cada vector tiene un vector opuesto.

2. La propiedad del vector neutro implica que todo espacio vectorial tiene al menos un vector, el vector neutro $\bar{0}$. De hecho $V = \{\bar{0}\}$ es el espacio vectorial más pequeño posible.

3. La asociatividad de la suma y la asociatividad del producto por escalares nos ahorra escribir muchos paréntesis. Por ejemplo escribimos $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ en lugar de escribir cualquiera de las expresiones equivalentes siguientes:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) \\ &= v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) = v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \\ &= ((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 = (v_1 + (v_2 + v_3)) + v_4 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Demostración. Ejercicio 1.6. □

Ejemplos 1.12. Veamos algún ejemplo más de espacio vectorial.

1. Fijados dos enteros m, n mayores o iguales que 1, el conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, formado por las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en $\mathbb{F}$, es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial con la suma y producto por escalares habituales. Por ejemplo en el caso 3×2 estas operaciones vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

2. El conjunto $\mathbb{F}_n[X]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}\} \tag{1.20}$$

Dados $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$, $g(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n \in \mathbb{F}_n[X]$, y $\lambda \in \mathbb{F}$, la suma y el producto vienen dados por:

$$f(X) + g(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n \tag{1.21}$$
$$\lambda \cdot f(X) = \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \cdots + \lambda a_n X^n \tag{1.22}$$

3. El conjunto de los polinomios de cualquier grado (pero grado finito) con coeficientes en $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F}[X] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n[X] \tag{1.23}$$

4. Hemos visto que $\mathbb{R}^3$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, pero también podemos verlo como un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial al restringir el producto de escalares a los números racionales.

5. El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, formado por las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Dados $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, la aplicación suma $f + g$ es aquella que a cada número $x \in \mathbb{R}$ le asocia el número $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$, mientras que la aplicación $\lambda \cdot f$ es aquella que a cada número $x \in \mathbb{R}$ le asocia el número $\lambda f(x) \in \mathbb{R}$.

Ejercicios 1.13. 1.5, 1.6, 1.7.

1.3. Subespacios

Propiedades 1.14. *Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial, entonces:*

1. *El vector neutro es único.*

   Demostración. Si $\bar{0}'$ también satisface que $\bar{0}' + v = v$ para todo $v \in V$, entonces:

$$\bar{0}' \overset{\bar{0}\text{ es neutro}}{=\!=\!=} \bar{0}' + \bar{0} \overset{\bar{0}'\text{ es neutro}}{=\!=\!=} \bar{0} \tag{1.24}$$

$\square$

   Esto justifica que denotemos $\bar{0}$ al vector neutro.

2. *El vector opuesto de cualquier vector es único.*

   Demostración. Si u, w son opuestos de v, entonces:

   $$u = u + \bar{0} = u + (w + v) = w + (u + v) = w + \bar{0} = w \tag{1.25}$$

   □

   Esto justifica que denotemos $-v$ al opuesto de v.

3. *Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.*

   Demostración. Observamos que $\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$. Sumando a ambos lados el opuesto de $\lambda \cdot \bar{0}$, obtenemos que $\bar{0} = \lambda \cdot \bar{0}$. □

4. *Para todo vector $v \in V$ se cumple que $0 \cdot v = \bar{0}$.*

   Demostración. Análoga al apartado anterior. □

5. *Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tales que $\lambda \cdot v = \bar{0}$, entonces o bien $\lambda = 0$ o bien $v = \bar{0}$.*

   Demostración. Si $\lambda \neq 0$, entonces:

   $$\bar{0} = \lambda^{-1} \cdot \bar{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1 \cdot v = v \tag{1.26}$$

   □

6. *Para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ se cumple que $(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$.*

   Demostración. Como el vector opuesto es único, basta comprobar que:

   $$(-\lambda)v = -(\lambda v) \quad \Longleftarrow \quad \lambda v + ((-\lambda)v) = (\lambda - \lambda)v = 0v = \bar{0} \tag{1.27}$$
   $$\lambda(-v) = -(\lambda v) \quad \Longleftarrow \quad \lambda v + (\lambda(-v)) = \lambda(v - v) = \lambda\bar{0} = \bar{0} \tag{1.28}$$

   □

Truco 1.15. Más adelante veremos que todo espacio vectorial (de dimensión finita) V es (isomorfo a) $\mathbb{F}^n$. Luego en V se cumplen todas las propiedades que se cumplen en $\mathbb{F}^n$.

Definición 1.16. Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Un *subespacio vectorial* es un subconjunto S de V que cumple las siguientes tres propiedades:

1. El vector neutro está en S.
2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $v \in S$, entonces $\lambda v \in S$.

Notas 1.17.

1. Un subespacio vectorial es a su vez un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalares heredadas.
2. Un subconjunto S de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V es subespacio si y solo si se cumplen las siguientes dos propiedades:
   a) El conjunto S es no vacío.
   b) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ y $v_1, v_2 \in S$, entonces $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in S$.

Ejemplos 1.18.

1. Tenemos la siguiente cadena de subespacios:
$$\mathbb{F}_0[X] \leq \mathbb{F}_1[X] \leq \mathbb{F}_2[X] \leq \cdots \leq \mathbb{F}[X] \tag{1.29}$$
   Observa que $\mathbb{F}_0[X] = \mathbb{F}$.
2. Sea V un espacio vectorial cualquiera. Tanto V como $\{\bar{0}\}$ son subespacios de V.
3. Sea $V = \mathbb{C}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_i \in \mathbb{C}\}$, y sea S el subconjunto de vectores que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+3x_3-x_4} = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \tag{1.30}$$
   El subconjunto S es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^4$, ya que el sistema es *homogéneo*, es decir, los coeficientes que aparecen en la parte derecha de cada igualdad son nulos.
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2\delta + 6\mu \\ \delta - 3\mu \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} \mid \delta, \mu \in \mathbb{C} \right\} \tag{1.31}$$

Ejercicios 1.19. 1.8, 1.9, 1.10.

1.4. Conjuntos generadores

Propiedades 1.20. *Sean $S_1, \dots, S_n$ subespacios de un espacio vectorial V. Entonces:*

1. $S_1 \cap \cdots \cap S_n$ *también es subespacio de V.*
2. $S_1 + \cdots + S_n = \{v_1 + \cdots + v_n \mid v_i \in S_i\}$ *también es subespacio de V.*

Definiciones 1.21. Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y $v_1, \dots, v_n$ vectores. El vector $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ se dice que es *combinación lineal* de $v_1, \dots, v_n$.
2. Sea C un subconjunto no vacío (y posiblemente infinito) de V. El *subespacio generado* por C, denotado $\operatorname{span}\langle C\rangle$, es por definición el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) de vectores de C:
$$\begin{aligned}\operatorname{span}\langle C\rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \mid m \geq 1,\ &\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}\\ &v_1, \dots, v_m \in C\}\end{aligned} \tag{1.32}$$
3. Por convenio definimos $\operatorname{span}\langle\emptyset\rangle = \{\bar{0}\}$.

Notas 1.22.

1. En efecto, $\operatorname{span}\langle C\rangle$ es un subespacio vectorial de V.
2. Si $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ escribimos $\operatorname{span}\langle u_1, \dots, u_n\rangle$ en lugar de escribir $\operatorname{span}\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$. En este caso la expresión (1.32) se simplifica:
$$\operatorname{span}\langle u_1, \dots, u_n\rangle = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\} \tag{1.33}$$
3. Si existen vectores $u_1, \dots, u_n$ tales que $V = \operatorname{span}\langle u_1, \dots, u_n\rangle$, decimos que V es *finitamente generado.*

Ejemplo 1.23. Seguimos con el ejemplo 1.18.3:

$$\begin{aligned}S = \left\{\begin{pmatrix}-2\delta + 6\mu\\ \delta - 3\mu\\ \mu\\ \delta\end{pmatrix} \mid \delta, \mu \in \mathbb{C}\right\} &= \left\{\delta\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6\\-3\\1\\0\end{pmatrix} \mid \delta, \mu \in \mathbb{C}\right\}\\ &= \operatorname{span}\langle\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-3\\1\\0\end{pmatrix}\rangle\end{aligned} \tag{1.34}$$

Propiedad 1.24. *Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V. Entonces* $\operatorname{span}\langle C\rangle$ *es el menor subespacio de V que contiene a C, es decir:*

1. $\operatorname{span}\langle C\rangle$ *es un subespacio de V.*
2. $C \subseteq \operatorname{span}\langle C\rangle$.
3. *Si S es otro subespacio de V tal que $C \subseteq S$, entonces* $\operatorname{span}\langle C\rangle \subseteq S$.

Notas 1.25.

1. $\operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \operatorname{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3\rangle$.

   Demostración. Por la propiedad 1.24, hay que ver que los vectores $v_1, v_2 + v_3, v_3$ están en $\operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3\rangle$, lo que es evidente, y que los vectores v_1, v_2, v_3 están en $\operatorname{span}\langle v_1, v_2 + v_3, v_3\rangle$, lo que también está claro ya que:

   $$\begin{aligned} v_1 &= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 0 \cdot v_3 \\ v_2 &= 0 \cdot v_1 + 1 \cdot (v_2 + v_3) + (-1) \cdot v_3 \\ v_3 &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_2 + v_3) + 1 \cdot v_3 \end{aligned} \tag{1.35}$$

   □

2. $\operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \operatorname{span}\langle \lambda v_1, v_2, v_3\rangle$ si $\lambda \neq 0$.
3. $\operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \operatorname{span}\langle v_2, v_1, v_3\rangle$.
4. $w \in \operatorname{span}\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ si y solo si $\operatorname{span}\langle v_1, \ldots, v_n, w\rangle = \operatorname{span}\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$.

Ejemplo 1.26. Sea S el subespacio de $\mathbb{C}^4$:

$$S = \operatorname{span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \rangle \tag{1.36}$$

Hemos visto que, al hacer operaciones de Gauss por columnas, el subespacio generado sigue siendo el mismo. Luego:

$$S = \operatorname{span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \rangle = \operatorname{span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \rangle \tag{1.37}$$

$$= \operatorname{span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \operatorname{span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \rangle \tag{1.38}$$

Ejercicios 1.27. 1.11, 1.12, 1.13, 1.14.

1.5. Dependencia lineal

Terminología 1.28. Distinguiremos entre *familias* y *conjuntos*. En una familia puede haber elementos repetidos; además en las familias finitas tendremos en cuenta el orden de los elementos. Por lo tanto los siguientes tres conjuntos de números son iguales: $\{2, 2, 5\} = \{2, 5\} = \{5, 2\}$. Mientras que las siguientes tres familias son distintas dos a dos: $(2, 2, 5)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$. Observa que utilizamos llaves para denotar los conjuntos y paréntesis para denotar las familias.

Definiciones 1.29. Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

1. Sea $(v_1, \ldots, v_n)$ una familia finita de vectores de V. Se dice que dicha familia es *ligada* (o linealmente dependiente) si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \bar{0}$ y tales que al menos uno de estos λ_i es distinto de 0.

2. Se dice que la familia $(v_1, \ldots, v_n)$ es *libre* (o linealmente independiente) si no es ligada, es decir, si:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \bar{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \tag{1.39}$$

3. Una familia infinita de vectores es ligada si tiene *al menos una* subfamilia finita ligada, y es libre en caso contrario, es decir, si *todas* sus subfamilias finitas son libres.

4. Por convenio decimos que la familia vacía es libre.

Propiedad 1.30. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de vectores. Supongamos que $\mathcal{F}$ tiene al menos dos vectores. Entonces $\mathcal{F}$ es ligada si y solo si existe un vector de $\mathcal{F}$ que se puede expresar como combinación lineal (finita) de otros vectores de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Basta observar que, si $\lambda_i \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \bar{0} \quad \Longleftrightarrow \quad v_i = \frac{-\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \cdots + \frac{-\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} + \\ \frac{-\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} + \cdots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_i} v_n \end{aligned} \tag{1.40}$$

□

Notas 1.31.

1. Al cambiar el orden de los vectores, la nueva familia es libre si y solo si la familia inicial era libre.

2. Una familia formada por un único vector es ligada si y solo si dicho vector es el vector nulo.

3. Toda familia que contiene a una subfamilia ligada es ligada. En otras palabras, toda subfamilia de una familia libre es libre.

4. Si una familia contiene vectores repetidos, entonces es ligada.

Ejemplo 1.32. Sean a, b, c los vectores de $\mathbb{Q}^4$:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

La familia (a, b, c) está *escalonada*:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \boxed{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{-1} \\ \boxed{0} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

Veamos que el escalonamiento implica que la familia (a, b, c) es libre.

Solución. En efecto, supongamos que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ cumplen que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \bar{0}$. Entonces:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

Comparamos la tercera componente, y obtenemos que α debe ser 0. Ahora que sabemos que $\alpha = 0$, comparamos la segunda componente, y obtenemos que β debe ser 0. Finalmente sabiendo que $\alpha = \beta = 0$, comparamos la primera componente, y obtenemos que γ debe ser 0. Por tanto la familia (a, b, c) es libre. □

Ejemplo 1.33. Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución. Como la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, existen escalares x_1, x_2, x_3 no todos nulos tales que:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = \bar{0} \tag{1.44}$$

Buscamos escalares y_1, y_2, y_3 tales que:

$$y_1(v_1 + v_2) + y_2(v_2 + v_3) + y_3(v_3 + v_1) = \bar{0} \tag{1.45}$$

Podemos reescribir esta ecuación como:

$$(y_1 + y_3)v_1 + (y_2 + y_1)v_2 + (y_3 + y_2)v_3 = \bar{0} \tag{1.46}$$

Por tanto podemos hacer que y_1, y_2, y_3 cumplan lo pedido si satisfacen:

$$\begin{cases} y_1 \phantom{{}+y_2} + y_3 = x_1 \\ y_1 + y_2 \phantom{{}+y_3} = x_2 \\ \phantom{y_1+{}} y_2 + y_3 = x_3 \end{cases} \tag{1.47}$$

Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array}\right) &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array}\right) \\ &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_1 - x_2 \end{array}\right) \\ &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array}\right) \\ &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (x_1 + x_2 - x_3)/2 \\ 0 & 1 & 0 & (x_2 + x_3 - x_1)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (x_3 + x_1 - x_2)/2 \end{array}\right) \end{aligned} \tag{1.48}$$

La solución es:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2} \qquad y_2 = \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2} \qquad y_3 = \frac{x_3 + x_1 - x_2}{2} \tag{1.49}$$

Por último observamos que no pueden ser los tres y_i iguales a 0, porque el sistema de ecuaciones (1.47) nos dice que entonces los tres x_i serían iguales a 0. Así, hemos probado que $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ es ligada. □

Ejercicios 1.34. 1.15, 1.16, 1.17.

1.6. Dimensión

Teorema 1.35 (de la dimensión). *Sea V un espacio vectorial. Supongamos que la familia de vectores $(a_1, \dots, a_m)$ es libre, y supongamos que la familia de vectores $(b_1, \dots, b_n)$ genera V. Entonces $m \leq n$.*

Demostración.

1. Sabemos que $\operatorname{span}\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$. Luego existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $a_1 = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$. Como $(a_1, \dots, a_m)$ es familia libre, el vector a_1 no es el vector nulo, luego existe un índice i tal que $\lambda_i \neq 0$. Reordenando los índices si es necesario, podemos suponer que $i = 1$. Despejando:
$$b_1 = \frac{1}{\lambda_1} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} b_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} b_n \tag{1.50}$$
Por lo tanto $\operatorname{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = \operatorname{span}\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$.

2. Ahora que sabemos que $\operatorname{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$, repetimos el proceso con a_2. Existen escalares μ_i tales que $a_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 b_2 + \cdots + \mu_n b_n$. Si fuera $\mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$, entonces $(-\mu_1) a_1 + 1 \cdot a_2 = \bar{0}$, y $(a_1, \dots, a_m)$ no sería libre. Luego $\mu_j \neq 0$ para algún índice $j \geq 2$; reordenando, $j = 2$. Despejando b_2, obtenemos que $\operatorname{span}\langle a_1, a_2, b_3, \dots, b_n \rangle = \operatorname{span}\langle a_1, b_2, \dots, b_n \rangle = V$.

3. Si fuera $m > n$, podríamos repetir este proceso hasta llegar a que $\operatorname{span}\langle a_1, \dots, a_n \rangle = V$. Así, a_{n+1} sería combinación lineal de $a_1, \dots, a_n$, contradicción. Por lo tanto $m \leq n$.

□

Definición 1.36. Sea V un espacio vectorial. Una *base* es una familia libre y que genera V.

Corolario 1.37. *Sea V un espacio vectorial finitamente generado. Entonces todas las bases de V tienen el mismo número de vectores.*

Corolario 1.38. *Sea V un espacio vectorial finitamente generado. Entonces cualquier familia libre se puede expandir (añadiendo vectores) hasta formar una base.*

Demostración. Si la familia no genera V, es porque existe algún vector en V que no se puede expresar como su combinación lineal. Por lo tanto, al añadirlo, la familia sigue siendo libre.

El teorema de la dimensión nos asegura que, después de añadir un número finito de vectores, obtenemos una familia generadora (y libre). □

Nota 1.39. Evidentemente, cualquier familia finita de vectores que genere un espacio vectorial se puede reducir (quitando vectores) hasta formar una base.

Definición 1.40. Sea V un espacio vectorial finitamente generado. Llamamos *dimensión* al número de elementos de cualquier base de V.

Ejemplos 1.41.

1. En $\mathbb{F}^n$ los siguientes vectores forman una base:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

   Diremos que $(e_1, \dots, e_n)$ es la *base canónica* de $\mathbb{F}^n$. Luego $\dim \mathbb{F}^n = n$.

2. La familia $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ es una base de $\mathbb{F}_n[X]$. En consecuencia, $\dim \mathbb{F}_n[X] = n + 1$.

3. $\dim M_{m\times n}(\mathbb{F}) = mn$.

4. La familia vacía $\emptyset$ es una base del espacio vectorial $\{\bar{0}\}$. Por lo tanto $\dim\{\bar{0}\} = 0$.

Ejercicios 1.42. 1.18, 1.19, 1.20, 1.21.

1.7. Coordenadas

Propiedades 1.43. *Sea V un espacio vectorial.*

1. *Si la familia de vectores $(v_1, \dots, v_n)$ es libre, y $w \notin \operatorname{span}\langle v_1, \dots, v_n\rangle$, entonces la familia $(v_1, \dots, v_n, w)$ también es libre.*

   Demostración. Observa que ya usamos este resultado en la demostración del corolario 1.38. Repitamos ahora el argumento con más detenimiento. Como siempre, empezamos la demostración por el final. Supongamos que los escalares λ_i cumplen que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} w = \bar{0}$, debemos probar que necesariamente $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$. Distinguimos dos casos.

   Por un lado, si $\lambda_{n+1} = 0$, entonces $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \bar{0}$, y como $(v_1, \dots, v_n)$ es libre, necesariamente $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

   Por otro lado, si $\lambda_{n+1} \neq 0$, entonces $w = -\lambda_1/\lambda_{n+1} v_1 - \cdots - \lambda_n/\lambda_{n+1} v_n$, luego $w \in \operatorname{span}\langle v_1, \dots, v_n\rangle$, contradicción. □

Supongamos ahora que V es de dimensión finita, $\dim V = n < \infty$.

2. *Sea $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ una familia formada exactamente por n vectores. Entonces $\mathcal{F}$ es base si y solo si $\mathcal{F}$ es libre, si y solo si $\mathcal{F}$ genera V.*

3. *Sea S un subespacio de V. Entonces el espacio vectorial S también es de dimensión finita, y* $\dim S \leq \dim V$. *Es más,* $\dim S = n$ *si y solo si* $S = V$.

Ejemplo 1.44. El concepto de dimensión nos permite dar una solución más rápida al ejemplo 1.33. Vamos a demostrar que, si la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, entonces la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ también es ligada.

Solución. Puesto que la familia (v_1, v_2, v_3) es ligada, la dimensión de $V = \operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ es a lo sumo 2. Si la familia $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ fuera libre, entonces la dimensión de $W = \operatorname{span}\langle v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\rangle$ sería 3. Pero W está contenido en V, contradicción. $\square$

Definición 1.45. Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita n. Sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V. Sea v un vector cualquiera de V. Como $(b_1, \ldots, b_n)$ genera V, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que $v = \lambda_1 b_1 + \ldots \lambda_n b_n$. Como $(b_1, \ldots, b_n)$ es libre, dichos coeficientes son únicos. Se dice que el vector columna $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$ son las *coordenadas* del vector $v \in V$ *respecto* de la base $\mathcal{B}$.

Demostración. Veamos la unicidad. Si también $v = \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_n b_n$, entonces $\bar{0} = v - v = (\lambda_1 - \mu_1) b_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) b_n$, luego $\lambda_i = \mu_i$ para todo i. $\square$

Notas 1.46.

1. Al fijar la base $\mathcal{B}$, queda definida una aplicación

$$f_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{F}^n \tag{1.52}$$

que a cada vector $v \in V$ lo envía a sus coordenadas $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in \mathbb{F}^n$.

2. Esta aplicación $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva.

3. Gracias a haber fijado la base $\mathcal{B}$, operar en V es como operar en $\mathbb{F}^n$, es decir, para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v, w \in V$:

$$f_{\mathcal{B}}(v + w) = f_{\mathcal{B}}(v) + f_{\mathcal{B}}(w) \tag{1.53}$$

$$f_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f_{\mathcal{B}}(v) \tag{1.54}$$

Ejemplo 1.47. Sean v_i y w_i los vectores de $\mathbb{C}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1.55}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

1. Encuentra una subfamilia de la familia (v_1, v_2, v_3, v_4) que sea base de $\operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
2. Halla qué vectores w_i pertenecen a $\operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
3. Calcula las coordenadas de dichos vectores $w_i \in \operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ en la base que has calculado en el primer apartado.

Solución. Escribimos los ocho vectores en una matriz por columnas:

$$(v_1|\ldots|v_4|w_1|\ldots|w_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 6 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -4 & -2 & -1 \end{array}\right) \tag{1.57}$$

Efectuamos operaciones del método de Gauss en las filas de esta matriz, hasta obtener una matriz escalonada por filas y lo más simplificada posible:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (c_1|\ldots|c_8) \tag{1.58}$$

Recordamos que las operaciones del método de Gauss son reversibles, así que también podríamos obtener la matriz $(v_1|\ldots|v_4|w_1|\ldots|w_4)$ a partir de $(c_1|\ldots|c_8)$.

Claramente $c_4 = 2c_1 + 3c_2$. Luego también se cumple que $v_4 = 2v_1 + 3v_2$; en efecto, al hacer operaciones de Gauss por *filas* las relaciones entre las *columnas* siguen siendo las mismas. Por el mismo motivo v_3 no es combinación lineal de v_1 y v_2, ya que si no c_3 sería combinación lineal de c_1 y c_2.

1. (v_1, v_2, v_3) es base de $\operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$.

2. $w_1, w_2, w_3 \in \operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$, pero $w_4 \notin \operatorname{span}\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$.

3. Las coordenadas de w_1 en la base (v_1, v_2, v_3) son $(1, -2, 1)^T$, las de w_2 son $(3, 1, -5)^T$, y las de w_3 son $(1, 0, -2)^T$.

$\square$

Ejercicios 1.48. 1.22, 1.23, 1.24.

1.8. Suma directa I

Definición 1.49. Sean $S_1, \dots, S_n$ subespacios de un espacio vectorial V. Decimos que la suma $S_1 + \cdots + S_n$ es *directa* si todo vector de $S_1 + \cdots + S_n$ se puede expresar de manera única como suma de vectores de $S_1, \dots, S_n$. Es decir, si $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ con $a_i, b_i \in S_i$ implica que $a_i = b_i$ para todo i. Cuando la suma es directa, escribimos $S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ en lugar de escribir $S_1 + \cdots + S_n$.

Proposición 1.50. *Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V.*

1. *S y T tienen suma directa si y solo si $S \cap T = \{\bar{0}\}$.*

   Demostración.

   - ($\Longrightarrow$) Sea $v \in S \cap T$, nuestro objetivo es demostrar que $v = \bar{0}$. Observamos que:

   $$\underbrace{v}_{\in S} + \underbrace{(-v)}_{\in T} = \bar{0} = \underbrace{\bar{0}}_{\in S} + \underbrace{\bar{0}}_{\in T} \tag{1.59}$$

     Por la unicidad de la suma directa, debe ser $v = \bar{0}$ y $-v = \bar{0}$.

   - ($\Longleftarrow$) Sean $s_1, s_2 \in S$ y $t_1, t_2 \in T$ tales que $s_1 + t_1 = s_2 + t_2$, debemos probar que $s_1 = s_2$ y $t_1 = t_2$. Notamos que:

   $$\underbrace{s_1 - s_2}_{\in S} = \underbrace{t_2 - t_1}_{\in T} \in S \cap T \tag{1.60}$$

     Por tanto $s_1 - s_2 = \bar{0}$ y $t_2 - t_1 = \bar{0}$.

$\square$

2. *Si V es de dimensión finita, entonces:*

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) \tag{1.61}$$

Demostración. Cogemos una base $(x_1, \dots, x_r)$ del subespacio $S \cap T$. La ampliamos con $\begin{Bmatrix} s_1, \dots, s_m \\ t_1, \dots, t_n \end{Bmatrix}$ hasta formar una base de $\begin{Bmatrix} S \\ T \end{Bmatrix}$. Basta ver que $(x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n)$ es base de $S+T$.

a) Veamos que esta familia genera $S+T$:

$$\begin{aligned} S+T &= \operatorname{span}\langle x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m\rangle + \operatorname{span}\langle x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_n\rangle \\ &= \operatorname{span}\langle x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m, x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_n\rangle \\ &= \operatorname{span}\langle x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n\rangle \end{aligned} \tag{1.62}$$

b) Veamos que la familia es libre. Suponemos que:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j s_j + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k t_k = \bar{0} \tag{1.63}$$

Hay que ver que necesariamente los α_i, los β_j y los γ_k son todos cero.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j s_j}_{\in S} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{n} \gamma_k t_k}_{\in T} \in S \cap T \tag{1.64}$$

Como $(x_1, \dots, x_r)$ es base de $S \cap T$, existen $\delta_1, \dots, \delta_r$ tales que:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j s_j = \sum_{i=1}^{r} \delta_i x_i \tag{1.65}$$

Pero $(x_1, \dots, x_r, s_1, \dots, s_m)$ es familia libre, luego $\alpha_i = \delta_i$ para todo i, y $\beta_j = 0$ para todo j. Así la ecuación (1.63) ahora es:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k t_k = \bar{0} \tag{1.66}$$

Aplicando que $(x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_n)$ es familia libre, obtenemos que también los α_i y los γ_k son todos cero.

□

Notas 1.51.

1. Dos subespacios S y T de un espacio vectorial V se dicen *suplementarios* si $S \oplus T = V$, es decir, si tienen suma directa, y dicha suma es el total.

2. Si V es de dimensión finita, siempre podemos encontrar al menos un suplementario de un subespacio S dado.

Ejercicios 1.52. 1.25, 1.26, 1.27, 1.28, 1.29.

1.9. Suma directa II

Proposición 1.53. *Sean $S_1, \dots, S_n$ subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita. Son equivalentes:*

1. *Los subespacios $S_1, \dots, S_n$ tienen suma directa.*

2. *Si $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$, con cada v_i en S_i, entonces $v_i = \bar{0}$ para todo i.*

3. *Al juntar una base de cada S_i, obtenemos una base de $S_1 + \cdots + S_n$.*

4. $\dim(S_1 + \cdots + S_n) = \dim S_1 + \cdots + \dim S_n$.

Demostración.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Si $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$, con $a_i, b_i \in S_i$, entonces:

$$\underbrace{(a_1 - b_1)}_{\in S_1} + \cdots + \underbrace{(a_n - b_n)}_{\in S_n} = \bar{0} \tag{1.67}$$

  Luego $a_i - b_i = \bar{0}$ para todo i.

- $(1 \Rightarrow 2)$ Evidente.

- $(3 \Rightarrow 2)$ Sean $v_i \in S_i$ tales que $v_1 + \cdots + v_n = \bar{0}$. Para cada i, sea $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots)$ una base de S_i. Existen escalares $\lambda_{i,j}$ tales que $v_i = \sum_j \lambda_{i,j} a_{i,j}$. Luego $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} a_{i,j} = \bar{0}$. Como $(a_{i,j})$ es familia libre, necesariamente todos los escalares $\lambda_{i,j}$ son 0, luego todos los v_i son $\bar{0}$.

- $(2 \Rightarrow 3)$ Muy similar a la implicación anterior.

- $(4 \Rightarrow 3)$ En general siempre se cumple que, si juntamos una base de cada S_i, obtenemos una familia que genera el subespacio $S_1 + \cdots + S_n$. Por dimensiones dicha familia es base.

- $(3 \Rightarrow 4)$ Evidente.

□

Ejercicios 1.54. 1.30.

Ejercicios espacios vectoriales

Ejercicio 1.1. Calcula para qué valores de los parámetros $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ los siguientes sistemas son compatibles determinados:

$$\begin{cases} x - 3y = a_1 \\ 3x + y = a_2 \\ x + 7y = a_3 \\ 2x + 4y = a_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b_2 \\ x_1 + 8x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.68}$$

Ejercicio 1.2. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, o bien encuentra un ejemplo de lo siguiente, o bien demuestra que no existe. Una sucesión finita de operaciones del método de Gauss por filas, de manera que al aplicarlas al sistema, la primera fila del sistema resultante sea $x_1 - 2x_3 = 0$.

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1 - x_2 - 4x_3 = -11 \\ -10x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \tag{1.69}$$

Ejercicio 1.3. Demuestra que la operación de intercambio de filas del método de Gauss es redundante, es decir, se puede conseguir mediante las otras dos operaciones.

Ejercicio 1.4 (American Mathematical Monthly 1963)**.** Decimos que un sistema está en progresión aritmética si al ordenar sus coeficientes fila por fila obtenemos una progresión aritmética; por ejemplo, el siguiente sistema está en progresión aritmética:

$$\begin{cases} 6x + 9y + 12z = 15 \\ 18x + 21y + 24z = 27 \end{cases} \tag{1.70}$$

Ahora nos dicen que un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$ cumple las siguientes tres propiedades:

1. Tiene al menos dos incógnitas.
2. Es compatible determinado.
3. Está en progresión aritmética.

Calcula las soluciones de dicho sistema.

Ejercicio 1.5.

1. En el conjunto $V = (0, \infty)$ definimos las operaciones $\oplus : V \times V \to V$ y $\odot : \mathbb{R} \times V \to V$ mediante:

$$x \oplus y = xy \qquad \lambda \odot x = x^{\lambda} \tag{1.71}$$

¿Es $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

2. Considera el conjunto $\mathbb{R}^3$ con la suma de vectores habitual pero con el producto de escalares dado por:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.72}$$

¿Es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

Ejercicio 1.6. Sea V un conjunto dotado de una operación binaria interna $+ : V \times V \to V$.

1. Hay 2 maneras posibles de agrupar los paréntesis en una suma de 3 elementos:
$$v_1 + (v_2 + v_3) \qquad (v_1 + v_2) + v_3 \tag{1.73}$$
Si sumamos 4 elementos, el número de posibles combinaciones es 5:

$$\begin{array}{ll} v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) & v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \\ (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) & \\ (v_1 + (v_2 + v_3)) + v_4 & ((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 \end{array} \tag{1.74}$$

¿De cuántas maneras podemos agrupar los paréntesis en una suma de 5 elementos?

Supongamos ahora que la suma es asociativa.

2. Demuestra que todas las posibles formas de agrupar los paréntesis en una suma de 5 elementos dan el mismo resultado.

3. Prueba el caso general: en una suma de n elementos podemos ahorrarnos los paréntesis.

Ejercicio 1.7. Supongamos que $(V, +, \cdot)$ cumple las propiedades 1-7 de la definición de espacio vectorial, y supongamos además que el producto por escalares $\mathbb{F} \times V \to V$ es una aplicación sobreyectiva. Demuestra que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Ejercicio 1.8. Sean u, v, w vectores de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

1. Demuestra que si $u + v = v + w$, entonces $u = w$.
2. Prueba que si $\lambda u = \lambda v$, donde $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$, entonces $u = v$.

Ejercicio 1.9. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Q}^4$ son subespacios?

1. $S_1 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 0\}$.
2. $S_2 = \{(a, b, c, d)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid a + 2d = 1\}$.
3. $S_3 = \{(3a, a, a - b, b)^T \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
4. $S_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{Q}^4$ tales que $|x_1| \leq |x_2|\}$.
5. $S_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 \in \mathbb{Z}\}$.
6. $S_6 = \{(x, y, z, t)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid x = 0$ ó $y = 0\}$.
7. $S_7 = \{(x, y, z, t)^T \in \mathbb{Q}^4 \mid x(y + z) = 0\}$.

Ejercicio 1.10. Sea $T = \{(z, \overline{z})^T \mid z \in \mathbb{C}\}$.

1. Considera $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, ¿es T subespacio suyo?
2. Considera $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, ¿es T subespacio suyo?

Ejercicio 1.11. Sean L, M, N subespacios de un espacio vectorial V. Para cada una de las siguientes igualdades, o bien demuestra que es cierta, o bien encuentra un contraejemplo que pruebe que es falsa.

1. $L \cap (M + N) = (L \cap M) + (L \cap N)$.
2. $L \cap (M + (L \cap N)) = (L \cap M) + (L \cap N)$.
3. $(L + M) \cap (L + N) = L + (M \cap N)$.

Ejercicio 1.12. Sean $S_1, \ldots, S_n$ subespacios de un espacio vectorial V. Además supongamos que un subconjunto S de V satisface la siguiente propiedad: S es el menor subespacio de V que contiene a los subespacios $S_1, \ldots, S_n$.

1. Enuncia qué significa dicha propiedad.
2. Prueba que $S = S_1 + \cdots + S_n$.

(Análogamente $S_1 \cap \cdots \cap S_n$ es el mayor subespacio de V que está contenido en cada uno de los subespacios $S_1, \ldots, S_n$).

Ejercicio 1.13. Sean S y T subespacios de un espacio vectorial V. Prueba que $S \cup T$ es subespacio si y solo si o bien $S \subseteq T$ o bien $T \subseteq S$.

Ejercicio 1.14. Sea T el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado por las ternas de números $(t_1, t_2, t_3)^T \in \mathbb{R}^3$ tales que el siguiente sistema es compatible:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = t_1 \\ x_1 - x_2 = t_2 \\ x_1 + 2x_2 = t_3 \end{cases} \tag{1.75}$$

1. Demuestra que T es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
2. Encuentra vectores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^3$ tales que $T = \operatorname{span}\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

Ejercicio 1.15. Sea (u_1, u_2, u_3, u_4) la familia de vectores de $\mathbb{C}^4$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ \beta \\ 5 \end{pmatrix} \tag{1.76}$$

Calcula para qué valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ esta familia es libre.

Ejercicio 1.16. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ consideramos los vectores:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{sen}(x) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned} \tag{1.77}$$

Prueba que la familia $(\operatorname{sen}, \cos)$ es libre.

Ejercicio 1.17. Prueba que una familia de vectores $(a_1, \ldots, a_n)$ es libre si y solo si se cumplen las dos propiedades siguientes:

1. El vector a_1 no es el vector nulo.
2. Para cada k desde 2 hasta n, el vector a_k no es combinación lineal de $a_1, \ldots, a_{k-1}$.

Ejercicio 1.18. Para todo vector $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ y toda permutación σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ definimos $\sigma(v) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})^T \in \mathbb{R}^n$. Ahora fijamos el vector v y definimos S_v como el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por el subconjunto:

$$\{\sigma(v) \mid \sigma \text{ es permutación de } \{1, 2, \ldots, n\}\} \tag{1.78}$$

Calcula cuáles son las posibles dimensiones de S_v según el valor de v.

Ejercicio 1.19. Para cada $i = 1, 2$, calcula bases de S_i, T_i, $S_i + T_i$ y $S_i \cap T_i$, donde S_i y T_i son los subespacios de $\mathbb{C}^4$:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a-b \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\} \quad T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid a + 2d = 0 \right\} \tag{1.79}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a-b \\ a \\ b \\ a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\} \quad T_2 = \operatorname{span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \tag{1.80}$$

Ejercicio 1.20. ¿Cuáles de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}_3[X]$ son iguales?

1. $S_1 = \operatorname{span}\langle 2 - X - 4X^2 + 3X^3, 3 + X - 8X^2 + 5X^3, 1 - 3X + X^3 \rangle$.
2. $S_2 = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0\}$.
3. $S_3 = \operatorname{span}\langle -2+3X^2-2X^3, -X-4X^2+3X^3, 3-2X+X^2, 5+3X-X^3 \rangle$.
4. $S_4 = \{2a - (3a + 2b)X + 4bX^2 + (a - 2b)X^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 1.21. Para cada una de las siguientes familias de vectores de $\mathbb{C}_3[X]$, primero reduce la familia (quitando vectores) hasta obtener una familia libre con el mayor número de vectores posible, y segundo amplía la familia (añadiendo vectores) hasta obtener una base de $\mathbb{C}_3[X]$.

1. $(3 + 2X + 4X^2, -1 - X - 2X^2 - 2X^3, -X - 2X^2 - 6X^3, -1 - X^3)$.
2. $(3 + X^2 - 4X^3, 1 - 2X + X^2 - 2X^3, 6X - 2X^2 + 2X^3, -1 - 4X + X^2)$.

Ejercicio 1.22. Para cada $i = 0, \ldots, 5$, o bien encuentra un ejemplo de lo siguiente, o bien demuestra que no existe. Vectores $u_1, u_2, u_3, u_4, w \in \mathbb{Q}^5$ tales que:

$$\dim \operatorname{span}\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle = 3 \tag{1.81}$$

$$\dim \operatorname{span}\langle u_1 + w, u_2 + w, u_3 + w, u_4 + w \rangle = i \tag{1.82}$$

Ejercicio 1.23. Calcula un subespacio S de dimensión 3 de $\mathbb{C}^4$ tal que $R \cap S = W$, donde R y W son los subespacios:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 = 3x_3 \right\} \quad W = \operatorname{span}\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \tag{1.83}$$

Ejercicio 1.24. Sea (A_1, A_2, A_3, A_4) la base del espacio vectorial $M_2(\mathbb{Q})$ formada por los vectores:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.84}$$

Sabemos que (B_1, B_2, B_3) es una familia libre de vectores de $M_2(\mathbb{Q})$. Además:

1. Las coordenadas de A_1 en la base (B_1, B_2, B_3) son $(2, 1, 2)^T$.
2. Las coordenadas de A_2 en la base (B_1, B_2, B_3) son $(0, -3, -1)^T$.
3. El vector A_3 no pertenece al subespacio $\operatorname{span}\langle B_1, B_2, B_3\rangle$.
4. Las coordenadas de A_4 en la base (B_1, B_2, B_3) son $(1, 0, 1)^T$.

Calcula B_1, B_2, B_3.

Ejercicio 1.25.

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sean S_1, S_2, S_3 subespacios de V. Prueba que:

$$\begin{aligned} \dim(S_1 + S_2 + S_3) \leq\ & + \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 \\ & - \dim(S_1 \cap S_2) - \dim(S_2 \cap S_3) - \dim(S_3 \cap S_1) \\ & + \dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3) \end{aligned} \tag{1.85}$$

2. Encuentra un ejemplo en el que la desigualdad anterior sea estricta.

Ejercicio 1.26. Para cada uno de los siguientes subespacios T_i de $\mathbb{Q}^4$, calcula una base de T_i y una base de un suplementario de T_i en $\mathbb{Q}^4$.

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + 2x_3 = 0 \right\} \tag{1.86}$$

$$T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 - 2x_3 = x_2 + 2x_4 = 0 \right\} \tag{1.87}$$

Ejercicio 1.27. Sea $T = \{p(X) \in \mathbb{Q}_3[X] \mid p(1) = p(2)\}$.

1. Prueba que T es un subespacio de $\mathbb{Q}_3[X]$.
2. Calcula una base de T.
3. Calcula una base de un suplementario de T en $\mathbb{Q}_3[X]$.

Ejercicio 1.28. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ consideramos los subespacios de las funciones pares e impares:

$$P = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\} \tag{1.88}$$
$$I = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\} \tag{1.89}$$

1. Demuestra que los subespacios P, I no son de dimensión finita.
2. Prueba que P, I son subespacios suplementarios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 1.29. $\mathbb{Z}_2$ es el cuerpo con el menor número de elementos que existe. El conjunto subyacente es $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, y sus operaciones de suma y producto vienen dadas por las siguientes tablas:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \tag{1.90}$$

Para cada una de las siguientes afirmaciones, o bien demuestra que la afirmación es cierta, o bien encuentra un contraejemplo que pruebe que es falsa.

1. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, y S es un subespacio, entonces existe un subespacio T tal que $S \oplus T = V$.
2. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, y S_1, S_2 son dos subespacios de igual dimensión, entonces existe un subespacio T tal que $S_i \oplus T = V$ para todo i.
3. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, y S_1, S_2, S_3 son tres subespacios de igual dimensión, entonces existe un subespacio T tal que $S_i \oplus T = V$ para todo i.

Ejercicio 1.30. Para cada una de las siguientes afirmaciones, o bien demuestra que la afirmación es cierta, o bien encuentra un contraejemplo que pruebe que es falsa.

1. Sean R, S, T subespacios de un espacio vectorial tales que:

$$R \cap S = S \cap T = T \cap R = \{\bar{0}\} \tag{1.91}$$

   Entonces R, S, T tienen suma directa.

2. Sean S_1, S_2, S_3, S_4 subespacios de un espacio vectorial tales que:

$$\begin{array}{ll} S_1 \cap (S_2 + S_3 + S_4) = \{\bar{0}\} & S_2 \cap (S_1 + S_3 + S_4) = \{\bar{0}\} \\ S_3 \cap (S_1 + S_2 + S_4) = \{\bar{0}\} & S_4 \cap (S_1 + S_2 + S_3) = \{\bar{0}\} \end{array} \tag{1.92}$$

   Entonces S_1, S_2, S_3, S_4 tienen suma directa.

Capítulo 2

Aplicaciones lineales y matrices

2.1. Aplicaciones lineales

Repaso 2.1.

1. Una *aplicación* f entre dos conjuntos V y W, escrito $f : V \to W$, es una correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto inicial V un único elemento del conjunto final W.

2. Las dos aplicaciones siguientes son distintas, ya que aunque la regla de asignación es la misma, los conjuntos finales son distintos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3 + x^2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow [3, \infty) \\ x &\longmapsto 3 + x^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

3. La siguiente correspondencia no es una aplicación, ya que no hemos definido la imagen del número 5:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1/(x - 5) \end{aligned} \tag{2.2}$$

4. Una aplicación es *inyectiva* si todo elemento del conjunto final tiene a lo sumo una preimagen.

5. Una aplicación es *sobreyectiva* si todo elemento del conjunto final tiene al menos una preimagen.

6. Una aplicación $f : V \to W$ es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva. En tal caso existe su aplicación inversa $f^{-1} : W \to V$.

Definición 2.2. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares $\mathbb{F}$. Sea $f : V \to W$ una aplicación entre los conjuntos V y W. Se dice que la aplicación f es *lineal* si:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ para todos $u, v \in V$.
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$.

Notas 2.3. Sea $f : V \to W$ una aplicación $\mathbb{F}$-lineal. Entonces:

1. $f(\bar{0}) = \bar{0}$. (Denotamos $\bar{0}$ tanto al vector nulo de V como al de W).
2. $f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)$ para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Notación 2.4.

1. Gracias a las notas 1.46 sabemos que, si en un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V de dimensión finita n fijamos una base $\mathcal{B}$, entonces queda definida una aplicación de V en $\mathbb{F}^n$ que a cada vector lo envía a sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$. Denotaremos esta aplicación:
$$f_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^n \tag{2.3}$$
Observamos ahora que las ecuaciones (1.53) y (1.54) dicen exactamente que esta aplicación es lineal. También sabemos que $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva.

2. Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, denotaremos h_A a la aplicación:
$$\begin{aligned} h_A : \mathbb{F}^n &\longrightarrow \mathbb{F}^m \\ X &\longmapsto AX \end{aligned} \tag{2.4}$$
Por esto escribimos los vectores de $\mathbb{F}^n$ por columnas, para poder interpretarlos como matrices de tamaño $n \times 1$, y que el producto $A \cdot X$ tenga sentido. La aplicación h_A es lineal; por ejemplo $h_A(X_1 + X_2) = h_A(X_1) + h_A(X_2)$ debido a la propiedad distributiva de las matrices.

Ejemplos 2.5.

1. La siguiente aplicación es lineal:
$$\begin{aligned} h : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) &\longmapsto \left(\begin{smallmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 0 \\ -3x_2 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$
Observa que de hecho $h = h_A$, donde A es la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

2. La aplicación que a cada polinomio le asocia su derivada es lineal:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n &\longmapsto a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1} \end{aligned} \tag{2.7}$$

3. La aplicación nula, que a cada $v \in V$ lo envía a $\bar{0} \in W$, es lineal. La aplicación identidad $\mathrm{id}_V : V \to V$, dada por $\mathrm{id}_V(v) = v$, es lineal.

Ejercicios 2.6. 2.1, 2.2, 2.3.

2.2. Núcleo e imagen

Definición 2.7.

1. Definimos el *núcleo* de una aplicación lineal $f : V \to W$ como:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \bar{0}\} \tag{2.8}$$

2. Recordamos que la *imagen* de una aplicación $f : V \to W$ es:

$$\mathrm{im}\, f = \{w \in W \mid \text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = w\} \tag{2.9}$$

Notas 2.8. Sea $f : V \to W$ lineal.

1. $\ker f$ es un subespacio del espacio inicial V.

2. $\mathrm{im}\, f$ es un subespacio del espacio final W.

3. f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\bar{0}\}$.

   Demostración. Recordamos que, por ser f lineal, $f(\bar{0}) = \bar{0}$. Así, la implicación de izquierda a derecha es evidente. Supongamos pues que $\ker f = \{\bar{0}\}$, y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$, debemos probar que $v_1 = v_2$.

   Observamos que $\bar{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$. Luego el vector $v_1 - v_2$ está en el núcleo de f. Por tanto $v_1 - v_2 = \bar{0}$, es decir, $v_1 = v_2$. □

4. f es sobreyectiva si y solo si $\mathrm{im}\, f = W$.

Proposición 2.9. *Sea $f : V \to W$ lineal. Supongamos que $\dim V < \infty$. Entonces:*

$$\dim V - \dim(\ker f) = \dim(\mathrm{im}\, f) \tag{2.10}$$

Demostración. Sea $n = \dim V$, y sea $m = \dim(\ker f)$. Tomamos una base $(a_1, \dots, a_m)$ de $\ker f$, y la ampliamos con $a_{m+1}, \dots, a_n$ hasta formar una base de V. Basta que probemos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ es base de $\operatorname{im} f$.

1. Demostremos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ genera $\operatorname{im} f$. Cogemos un vector $w \in \operatorname{im} f$ cualquiera, esto significa que existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$. Como $(a_1, \dots, a_n)$ es base de V, existen escalares λ_i de manera que $v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$. Luego:
$$\begin{aligned} w = f(v) &= f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) \\ &= \lambda_1 f(a_1) + \cdots + \lambda_n f(a_n) \\ &= \lambda_1 \bar{0} + \cdots + \lambda_m \bar{0} + \lambda_{m+1} f(a_{m+1}) + \cdots + \lambda_n f(a_n) \\ &= \lambda_{m+1} f(a_{m+1}) + \cdots + \lambda_n f(a_n) \end{aligned} \tag{2.11}$$

2. Veamos que $(f(a_{m+1}), \dots, f(a_n))$ es libre. Sean $\mu_{m+1}, \dots, \mu_n$ escalares tales que:
$$\begin{aligned} \bar{0} &= \mu_{m+1} f(a_{m+1}) + \cdots + \mu_n f(a_n) \\ &= f(\mu_{m+1} a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n) \end{aligned} \tag{2.12}$$
Por tanto el vector $u = \mu_{m+1} a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n$ está en el núcleo de f. Como $(a_1, \dots, a_m)$ es base de $\ker f$, existen escalares $\mu_1, \dots, \mu_m$ tales que:
$$\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_m a_m = u = \mu_{m+1} a_{m+1} + \cdots + \mu_n a_n \tag{2.13}$$
Pero sabemos que $(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n)$ es familia libre, por lo que necesariamente $\mu_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

□

Corolario 2.10 (de la demostración)**.** *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal y* biyectiva*.*

1. *Si $(a_1, \dots, a_n)$ es base de V, entonces $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ es base de W.*
2. *En particular,* $\dim V = \dim W$.

Corolario 2.11. *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Supongamos que* $\dim V = \dim W < \infty$. *Entonces son equivalentes:*

1. *f es biyectiva.*
2. *f es inyectiva.*
3. *f es sobreyectiva.*

Ejercicios 2.12. 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9.

2.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Propiedades 2.13.

1. *La composición de aplicaciones lineales es lineal. Es decir, si tanto $f : V \to W$ como $g : W \to U$ son aplicaciones $\mathbb{F}$-lineales, entonces la aplicación $g \circ f : V \to U$ también es $\mathbb{F}$-lineal.*

2. *Si la aplicación $f : V \to W$ es lineal y biyectiva, entonces $f^{-1} : W \to V$ también es lineal (y biyectiva).*

   Demostración. Fijemos dos vectores $w_1, w_2 \in W$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cualesquiera. Como f es biyectiva existen $v_1, v_2 \in V$ cumpliendo que $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$. Así:

$$\begin{aligned} f^{-1}(w_1 + w_2) &= f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) \\ &= v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda w_1) &= f^{-1}(\lambda f(v_1)) = f^{-1}(f(\lambda v_1)) \\ &= \lambda v_1 = \lambda f^{-1}(w_1) \end{aligned} \tag{2.15}$$

   □

Propiedad 2.14. *Sean V y W dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales. Sea $(a_1, \ldots, a_n)$ una base de V, y sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una familia de vectores de W. Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \to W$ tal que $f(a_i) = b_i$ para todo i.*

Ejemplos 2.15. Antes de demostrar la propiedad 2.14, veamos qué puede pasar si la familia del espacio inicial no es base. Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$.

1. Sean $a_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $a_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $a_3 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$. No puede existir $f : V \to W$ lineal tal que $f(a_1) = 2$, $f(a_2) = 5$, $f(a_3) = 9$, ya que entonces:

$$f(a_3) = f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) = 2 + 5 = 7 \neq 9 \tag{2.16}$$

2. Sea $a_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$. Existe más de una aplicación lineal $f : V \to W$ tal que $f(a_1) = 2$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) &\longmapsto 2x - 10y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) &\longmapsto 2x - 24y \end{aligned} \tag{2.17}$$

Demostración de la propiedad 2.14. Recordamos que, como $(a_1, \dots, a_n)$ es base de V, dado un vector $v \in V$ cualquiera, existen unos únicos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que $v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$. Por lo tanto la existencia, la linealidad y la unicidad de la aplicación f son consecuencia de la ecuación:

$$f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \tag{2.18}$$

□

Lema 2.16. *Sea $h : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ una aplicación lineal. Llamemos $(e_1, \dots, e_n)$ a la base canónica de $\mathbb{F}^n$. Entonces $h = h_A$, donde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es la matriz por columnas $A = (h(e_1)| \dots |h(e_n))$.*

Demostración. Debido a la propiedad 2.14, no es de extrañar que toda la información de la aplicación h esté presente en la matriz A. Dado un vector $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$, notamos que $X = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. El truco de esta demostración es observar que multiplicar la matriz A por el vector columna X es lo mismo que hacer una combinación lineal de las columnas de A con pesos las componentes de X. Por tanto:

$$\begin{aligned} h_A(X) = AX &= x_1 h(e_1) + \cdots + x_n h(e_n) \\ &= h(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = h(X) \end{aligned} \tag{2.19}$$

□

Ejercicios 2.17. 2.10, 2.11.

2.4. Aplicaciones lineales y matrices

Observación 2.18. Sean V y W dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales de dimensión finita, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Sea $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base de V, y sea $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ una base de W.

1. Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, podemos construir una aplicación lineal $f : V \to W$ definiendo $f = f_{\mathcal{C}}^{-1} \circ h_A \circ f_{\mathcal{B}}$. Es decir, tomamos como f la única aplicación que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "h_A"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd} \tag{2.20}$$

   ($f_{\mathcal{C}}^{-1} \circ h_A \circ f_{\mathcal{B}}$ es lineal por ser composición de aplicaciones lineales).

2. Recíprocamente, dada $f : V \to W$ lineal, definimos $h = f_{\mathcal{C}} \circ f \circ f_{\mathcal{B}}^{-1}$, es decir, h es la única aplicación que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, dashed, "h"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd} \tag{2.21}$$

El lema 2.16 nos dice que existe una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ tal que $h = h_A$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ a la base canónica de $\mathbb{F}^n$, entonces $f_{\mathcal{B}}(b_i) = e_i$ para todo i; luego A es la matriz por columnas:

$$A = \Big(f_{\mathcal{C}}(f(b_1)) | \ldots | \ f_{\mathcal{C}}(f(b_n)) \Big) \tag{2.22}$$

Por definición, A es la *matriz* de f *respecto* de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

En conclusión:

3. Una vez que fijamos bases en V y W, tenemos una correspondencia *biyectiva* entre las aplicaciones lineales de V en W y las matrices de $M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

4. Dicha correspondencia biyectiva viene dada por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "h_A"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd} \tag{2.23}$$

5. Dada una aplicación lineal, construimos su matriz así:

   I) Partimos de los vectores de la base inicial.
   II) Calculamos sus imágenes.
   III) Los expresamos en coordenadas respecto de la base final.
   IV) El resultado son las columnas de la matriz.

6. Que A sea la matriz de f en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ significa lo siguiente. Si $X \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base $\mathcal{B}$, y $Y \in \mathbb{F}^m$ son las coordenadas de su imagen $f(v) \in W$ en la base $\mathcal{C}$, entonces:

$$Y = AX \tag{2.24}$$

Nota 2.19. h_A es la aplicación lineal de $\mathbb{F}^n$ en $\mathbb{F}^m$ cuya matriz en las bases canónicas es A.

Ejemplo 2.20. Calculemos la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_1-x_2 \\ 3x_2 \end{smallmatrix}\right)$ respecto de las bases $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 2 \end{smallmatrix}\right))$ y $\mathcal{C} = (\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right))$.

Solución.

I) $b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

II) $f(b_1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $f(b_2) = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$.

III) Buscamos escalares λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \lambda_2 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, y μ_1, μ_2 tales que $\mu_1 \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \mu_2 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$. Podemos resolver estos dos sistemas a la vez:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -8 & -12 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \tag{2.25}$$

IV) La matriz que buscamos es $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$.

□

Ejercicios 2.21. 2.12, 2.13.

2.5. El espacio de las aplicaciones lineales

Notas 2.22. Sean V y W dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales de dimensión finita, $\dim V = n$, $\dim W = m$.

1. Recordamos que $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.

2. Sea $\mathrm{Hom}(V, W)$ el conjunto de las aplicaciones $\mathbb{F}$-lineales del espacio inicial V al espacio final W, es decir:

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ lineal}\} \tag{2.26}$$

   $\mathrm{Hom}(V, W)$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial con las operaciones siguientes. La suma de dos vectores $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $f(v) + g(v) \in W$. Mientras que el producto del escalar λ por el vector $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ es la aplicación lineal que a cada $v \in V$ lo envía a $\lambda f(v) \in W$.

Hom(V, W) cumple las ocho propiedades de espacio vectorial gracias a que el espacio final W es espacio vectorial; aquí las propiedades del espacio inicial V no juegan ningún papel. El vector neutro de Hom(V, W) es la aplicación nula, que a cada $v \in V$ lo envía a $\bar{0} \in W$.

3. Fijemos una base en V y una base en W. Automáticamente obtenemos una aplicación biyectiva entre Hom(V, W) y $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Además esta aplicación biyectiva es lineal. En otras palabras, si A es la matriz de f, y B es la matriz de g, entonces $A + B$ es la matriz de $f + g$; y si λ es un escalar, entonces λA es la matriz de λf.

Nota 2.23. La construcción anterior tiene especial interés en el caso $W = \mathbb{F}$. Decimos que Hom($V, \mathbb{F}$) es el espacio vectorial *dual* del espacio vectorial V, y lo denotamos:

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F}) = \{f : V \to \mathbb{F} \mid f \text{ lineal}\} \tag{2.27}$$

Propiedad 2.24. *Componer aplicaciones lineales es equivalente a multiplicar matrices. En términos precisos: Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de $f : V \to W$ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, y $B \in M_{p\times m}(\mathbb{F})$ es la matriz de $g : W \to U$ en las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, entonces la matriz de la composición $g \circ f : V \to U$ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ es el producto $BA \in M_{p\times n}(\mathbb{F})$.*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] & U \arrow[d, "f_{\mathcal{D}}"] \\
\mathbb{F}^n \arrow[r, "h_A"] \arrow[rr, bend right, "h_{BA}"'] & \mathbb{F}^m \arrow[r, "h_B"] & \mathbb{F}^p
\end{tikzcd} \tag{2.28}$$

Demostración. Basta comprobar que $h_B \circ h_A = h_{BA}$. Pero esto es consecuencia de la asociatividad del producto de matrices, ya que para todo $X \in \mathbb{F}^n$:

$$h_B(h_A(X)) = B(AX) = (BA)X = h_{BA}(X) \tag{2.29}$$

$\square$

Ejercicios 2.25. 2.14, 2.15.

2.6. Matrices regulares

Definiciones 2.26. Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas en $\mathbb{F}$, es decir, sea $A \in M_n(\mathbb{F})$. La matriz A se dice *regular* si la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ es biyectiva. En tal caso, sabemos que la aplicación inversa $(h_A)^{-1} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ es también lineal, así que denotamos A^{-1} a su matriz respecto de las bases canónicas, es decir, $(h_A)^{-1} = h_{A^{-1}}$. Decimos que A^{-1} es la matriz *inversa* de A.

Notas 2.27. Sea A una matriz regular. Entonces:

1. A^{-1} también es regular, y $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

   Demostración. $h_{AA^{-1}} = h_A \circ h_{A^{-1}} = h_A \circ (h_A)^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{F}^n} = h_{I_n}$. □

Teorema 2.28 (de la matrices inversas)**.** *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices* cuadradas $n \times n$. *Si $AB = I_n$, entonces A y B son regulares y son inversas la una de la otra.*

Demostración. Este es un resultado de la teoría de matrices, sin embargo para probarlo vamos a utilizar la teoría de aplicaciones lineales.

1. Veamos que la aplicación lineal $h_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ es biyectiva. Como $h_A \circ h_B = h_{AB} = h_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{F}^n}$, la composición $h_A \circ h_B$ es biyectiva. Por tanto $h_A \circ h_B$ es sobreyectiva, luego h_A es sobreyectiva, y como la dimensión del espacio inicial es igual a la del espacio final, $h_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ es biyectiva.

2. Como h_A es biyectiva, A es regular, y existe A^{-1}. Calculamos $A^{-1}AB$:

$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}AB = I_nB = B \tag{2.30}$$

   B es regular porque A^{-1} es regular.

□

Corolario 2.29. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas tales que $AB = I_n$.*

1. *Entonces las matrices A y B conmutan, $AB = BA = I_n$.*

2. *Si A' es otra matriz cuadrada tal que $A'B = I_n$, entonces $A = A'$.*

3. *Si B' es otra matriz cuadrada tal que $AB' = I_n$, entonces $B = B'$.*

Corolario 2.30. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas.*

1. *La matriz producto AB es regular si y solo si tanto A como B son regulares. En tal caso $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

2. *Recuerda que, al trasponer matrices, el orden de los productos también se invierte, es decir, $(AB)^T = B^T A^T$.*

3. *La matriz A es regular si y solo si su traspuesta A^T es regular. En tal caso $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Demostración. Si A y B son regulares, entonces:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n \tag{2.31}$$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n \tag{2.32}$$

Luego el teorema de las matrices inversas nos dice que AB y A^T son matrices regulares, y que sus inversas son $B^{-1}A^{-1}$ y $(A^{-1})^T$.

Recíprocamente, si la matriz AB es regular, entonces la aplicación lineal $h_{AB} = h_A \circ h_B$ es biyectiva. Por consiguiente h_A es sobreyectiva y h_B es inyectiva. Luego tanto h_A como h_B son biyectivas, ya que la dimensión de sus espacios iniciales es igual a la de sus espacios finales. □

Ejemplo 2.31. Sea $A \in M_3(\mathbb{C})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

¿Es A regular? En caso afirmativo, calcula su matriz inversa.

Solución. El teorema de las matrices inversas nos dice que simplemente debemos comprobar si existe una matriz tal que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

Esta igualdad entre matrices 3×3 es equivalente a que se cumplan tres sistemas de ecuaciones a la vez:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

Gracias al método de Gauss, podemos averiguar si los tres sistemas son compatibles y hallar su solución mediante un único cálculo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right) \tag{2.36}$$

Luego A es regular, y su matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -5 & 2 & 10 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

□

Ejercicios 2.32. 2.16, 2.17, 2.18, 2.19.

2.7. Matrices elementales

Notas 2.33.

1. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

por la izquierda es lo mismo que intercambiarle las filas 1 y 2.

Demostración. En efecto, por ejemplo si la matriz tiene 2 columnas:

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

□

2. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

por la izquierda es lo mismo que multiplicar la segunda fila por λ.

Demostración. Por ejemplo si la matriz tiene 3 columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

□

3. Multiplicarle, a una matriz de 3 filas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

por la izquierda es lo mismo que sumarle a la fila 3 la fila 1.

Demostración. Por ejemplo si la matriz tiene 1 columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{11} + a_{31} \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

□

Definición 2.34. Llamaremos *matrices elementales* a las matrices cuadradas correspondientes con las operaciones básicas del método de Gauss.

Truco 2.35. No es necesario que memoricemos la expresión de las matrices elementales, en su lugar aplicaremos la operación elemental deseada a la matriz identidad. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la matriz elemental 4×4 correspondiente a sumarle a la fila 2 la fila 4; llamemos F a dicha matriz. Por un lado, debido a la propiedad de F, la matriz FI_4 es la matriz identidad a la que le hemos sumado a la fila 2 la fila 4. Por otro lado, debido a la propiedad de I_4, la matriz FI_4 es F. Así:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

Notas 2.36.

1. Hacer Gauss por filas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda.

2. Como las operaciones de Gauss son reversibles, las matrices elementales son regulares, y sus inversas también son matrices elementales.

$$\begin{array}{c|c} \text{Operación} & \text{Inversa} \\ \hline F_i \to F_i + F_j & F_i \to F_i - F_j \\ F_i \to \lambda F_i & F_i \to \lambda^{-1} F_i \\ F_i \longleftrightarrow F_j & F_i \longleftrightarrow F_j \\ F_i \to F_i + \mu F_j & F_i \to F_i - \mu F_j \end{array} \tag{2.45}$$

3. Las matrices elementales, al multiplicarlas por la derecha en lugar de por la izquierda, actúan por columnas en lugar de por filas.

4. ¡Cuidado! La matriz F de la ecuación (2.44) le suma a la fila 2 la fila 4 cuando la multiplicamos por la izquierda, pero le suma a la columna 4 la columna 2 cuando la multiplicamos por la derecha.

Propiedad 2.37. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada. Son equivalentes:*

1. *A es regular.*

2. *A es producto de matrices elementales.*

3. *Existen $F_1, F_2, \dots, F_r \in M_n(\mathbb{F})$ matrices elementales tales que:*

$$F_r \cdots F_2 \cdot F_1 \cdot A = I_n \tag{2.46}$$

Demostración.

- ($3 \Rightarrow 2$) Despejando obtenemos $A = (F_1)^{-1} \cdot (F_2)^{-1} \cdots (F_r)^{-1}$. (Cuidado con el cambio de orden). Así, el resultado es consecuencia de que la inversa de una matriz elemental es también elemental.

- ($2 \Rightarrow 1$) Las matrices elementales son regulares, y el producto de matrices regulares es regular.

- ($1 \Rightarrow 3$) El algoritmo desarrollado en la ecuación (2.36) del ejemplo 2.31 nos dice que una matriz cuadrada es regular si y solo si existe una sucesión finita de operaciones del método de Gauss por filas, de manera que al aplicarlas a la matriz, obtenemos la matriz identidad.

□

Ejercicios 2.38. 2.20.

2.8. Cambios de bases I

Definición 2.39. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de un mismo espacio vectorial V de dimensión finita. La *matriz de cambio de bases* de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es la matriz de la aplicación identidad $\mathrm{id}_V : V \to V$ respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

Ejemplo 2.40. Sean b_1, b_2, b_3 y b_1', b_2', b_3' los vectores de $\mathbb{Q}^3$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

$$b_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

Observamos que $\dim \operatorname{span}\langle b_1, b_2, b_3 \rangle = 3 = \dim \operatorname{span}\langle b_1', b_2', b_3' \rangle$, por lo tanto (b_1, b_2, b_3) y (b_1', b_2', b_3') son bases de $\mathbb{Q}^3$. Calculemos la matriz de cambio de bases de (b_1, b_2, b_3) a (b_1', b_2', b_3').

Solución.

I) $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II) No hay que hacer nada.

III)

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \\ &\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -5 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right) \\ &\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right) \end{aligned} \tag{2.49}$$

IV) La matriz que buscamos es $\begin{pmatrix} -7 & -8 & -3 \\ -7 & -9 & -4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$\square$

Notas 2.41. Sea P la matriz de cambio de bases de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ en el $\mathbb{F}$-espacio vectorial V.

1. P es una matriz cuadrada $n \times n$, es decir $P \in M_n(\mathbb{F})$, donde $n = \dim V$.

2. Las columnas de P son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ respecto de $\mathcal{B}'$.

3. Como la aplicación identidad $\mathrm{id}_V : V \to V$ es biyectiva, la matriz P es regular, y su matriz inversa P^{-1} es la matriz de cambio de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

4. Si $X \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base $\mathcal{B}$, y $X' \in \mathbb{F}^n$ son las coordenadas del *mismo* vector $v \in V$ en la base $\mathcal{B}'$, entonces:
$$X' = PX \tag{2.50}$$

Propiedad 2.42. *Recíprocamente, dada una base $\mathcal{B}$ de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V, con* $\dim V = n < \infty$, *y dada una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$* regular*, existe una única base $\mathcal{B}'$ de V tal que P es la matriz de cambio de bases de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.*

Ejemplo 2.43. Observa que $\mathcal{B} = (b_1, b_2) = \left(\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right)\right)$ es una base de $\mathbb{R}^2$, y que $P = \left(\begin{smallmatrix}-1&1\\-2&3\end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ es una matriz regular. Halla la base $\mathcal{B}' = (b_1', b_2')$ de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz de cambio de bases de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es P.

Solución. Las columnas de P son los vectores de $\mathcal{B}$ expresados en coordenadas de $\mathcal{B}'$. En este caso es mucho más útil conocer la matriz de cambio de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, que es P^{-1}, ya que las columnas de P^{-1} son los vectores de $\mathcal{B}'$, que buscamos, expresados en coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$, que conocemos. Calculamos la matriz inversa de P y obtenemos:
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

Por tanto:
$$b_1' = -3b_1 - 2b_2 = \begin{pmatrix} -12 \\ -17 \end{pmatrix} \qquad b_2' = b_1 + b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

Podemos asegurar que $\mathcal{B}'$ es base sin necesidad de hacer ningún cálculo. En efecto, $\operatorname{span}\langle b_1, b_2\rangle$ está contenido en $\operatorname{span}\langle b_1', b_2'\rangle$ porque podemos expresar b_1, b_2 como combinación lineal de b_1', b_2' mediante la matriz P. Análogamente, $\operatorname{span}\langle b_1', b_2'\rangle$ está contenido en $\operatorname{span}\langle b_1, b_2\rangle$ porque podemos expresar b_1', b_2' como combinación lineal de b_1, b_2 mediante la matriz P^{-1}. Luego $\mathcal{B}'$ es una familia que genera el espacio vectorial y que tiene tantos elementos como su dimensión, así que es base. $\square$

Ejercicios 2.44. 2.21.

2.9. Cambios de bases II

Propiedad 2.45. *Sea $f : V \to W$ una aplicación $\mathbb{F}$-lineal. Supongamos que* $\dim V = n < \infty$ *y* $\dim W = m < \infty$. *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de V, y sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ bases de W.*

1. *Sea* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ *la matriz de* f *en las bases* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{C}$.
2. *Sea* $B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ *la matriz de* f *en las bases* $\mathcal{B}'$ *y* $\mathcal{C}'$.
3. *Sea* $P \in M_n(\mathbb{F})$ *la matriz de cambio de bases de* $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{B}'$.
4. *Sea* $Q \in M_m(\mathbb{F})$ *la matriz de cambio de bases de* $\mathcal{C}$ *a* $\mathcal{C}'$.

Entonces la relación entre estas cuatro matrices es:

$$B = QAP^{-1} \tag{2.53}$$

Demostración de la propiedad 2.45. Sea v un vector cualquiera de V.

a) Sean $X \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base $\mathcal{B}$.

b) Sean $X' \in \mathbb{F}^n$ las coordenadas de $v \in V$ en la base $\mathcal{B}'$.

c) Sean $Y \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base $\mathcal{C}$.

d) Sean $Y' \in \mathbb{F}^m$ las coordenadas de $f(v) \in W$ en la base $\mathcal{C}'$.

Por la definición de A, B, P, Q:

$$Y = AX \qquad Y' = BX' \qquad X' = PX \qquad Y' = QY \tag{2.54}$$

Por lo tanto:

$$QAX = QY = Y' = BX' = BPX \tag{2.55}$$

Esta igualdad es cierta para todo $X \in \mathbb{F}^n$, ya que v puede ser cualquier vector de V, por lo tanto $QA = BP$. $\square$

Demostración alternativa de la propiedad 2.45. Tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "f_{\mathcal{B}'}"] \arrow[rrr, bend left, "f"] & V \arrow[l, "\mathrm{id}_V"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] & W \arrow[d, "f_{\mathcal{C}'}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[rrr, bend right, "h_B"'] & \mathbb{F}^n \arrow[l, "h_P"'] \arrow[r, "h_A"] & \mathbb{F}^m \arrow[r, "h_Q"] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd} \tag{2.56}$$

Por lo tanto $h_B = h_Q \circ h_A \circ (h_P)^{-1} = h_Q \circ h_A \circ h_{P^{-1}} = h_{QAP^{-1}}$. $\square$

Ejemplo 2.46. En el ejemplo 2.20 vimos que $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ es la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{smallmatrix}\right)$ respecto de las bases $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 2 \end{smallmatrix}\right))$ y $\mathcal{C} = (\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right))$. Calculemos ahora la matriz de la aplicación respecto de las bases canónicas, y comprobemos la ecuación (2.53) de la propiedad 2.45.

Solución. $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $Q = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. (Es muy fácil calcular una matriz de cambio bases si la base final es la canónica). En efecto, se cumple que $BP = QA$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

□

Notas 2.47.

1. Un *endomorfismo* es una aplicacion lineal en la que el espacio inicial es igual al espacio final.

2. Cuando calculemos la matriz de un endomorfismo, exigiremos que la base inicial sea igual a la base final.

3. En tal caso en la propiedad 2.45 tendríamos que $V = W$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ y $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$. Por tanto $P = Q$, y la ecuación (2.53) se escribe:

$$B = PAP^{-1} \tag{2.58}$$

Ejercicios 2.48. 2.22, 2.23.

2.10. Equivalencia y semejanza de matrices

Definiciones 2.49.

1. Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ matrices $m \times n$. A es *equivalente* a B si existen matrices $P \in M_m(\mathbb{F})$ y $Q \in M_n(\mathbb{F})$ *regulares* tales que $B = PAQ$.

2. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ matrices cuadradas $n \times n$. A es *semejante* a B si existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ *regular* tal que $B = PAP^{-1}$.

Nota 2.50. Estas dos relaciones son son reflexivas, simétricas y transitivas. Veámoslo por ejemplo con la equivalencia.

1. *Reflexiva.* Toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es equivalente a sí misma.

Demostración. Tomando $P = I_m$ y $Q = I_n$, tenemos que $A = I_m A I_n$; y tanto I_m como I_n son regulares. $\square$

2. *Simétrica.* Si A es equivalente a B, entonces B es equivalente a A.

   Demostración. Si $B = PAQ$, entonces $A = P^{-1}BQ^{-1}$; y tanto P^{-1} como Q^{-1} son regulares. $\square$

3. *Transitiva.* Si A es equivalente a B, y B es equivalente a C, entonces A es equivalente a C.

   Demostración. Si $B = PAQ$, y $C = RBS$, entonces $C = (RP)A(QS)$; y tanto RP como QS son regulares. $\square$

Notas 2.51.

1. Las matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ son equivalentes si y solo si son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases. En términos precisos: A y B son equivalentes si y solo si existe

   - un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V de dimensión n,
   - un $\mathbb{F}$-espacio vectorial W de dimensión m,
   - una aplicación lineal $f : V \to W$,
   - bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V,
   - y bases $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ de W

   de manera que

   - A es la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$,
   - y B es la matriz de f respecto de $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}'$.

2. Las matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ son semejantes si y solo si son matrices del mismo endomorfismo respecto de distintas bases. En términos precisos: A y B son semejantes si y solo si existe

   - un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V de dimensión n,
   - un endomorfismo $f : V \to V$,
   - y bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V

   de manera que

   - A es la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$,
   - y B es la matriz de f respecto de $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}'$.

Ejercicios 2.52. 2.24, 2.25.

2.11. Rango I

Definiciones 2.53. Sea $f : V \to W$ lineal, y sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

1. El *rango* de f es la dimensión del subespacio $\operatorname{im} f$ de W.
2. El *rango por columnas* de A es la dimensión del subespacio de $\mathbb{F}^m$ generado por las columnas de A.
3. El *rango por filas* de A es la dimensión del subespacio de $\mathbb{F}^n$ generado por las filas de A.

Nota 2.54. El rango por filas de una matriz A es igual al rango por columnas de su matriz traspuesta A^T.

Proposición 2.55. *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Supongamos que $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de f respecto a algunas bases. Entonces el rango de f es igual al rango por columnas de A.*

Demostración. El diagrama que relaciona f y A es:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "f_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "h_A"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd} \tag{2.59}$$

Recordamos que multiplicar la matriz A por el vector columna X es lo mismo que hacer una combinación lineal de las columnas de A con pesos las componentes de X. Por lo tanto el rango de h_A es igual al rango por columnas de A, y lo que tenemos que demostrar es que $\dim(\operatorname{im} f) = \dim(\operatorname{im} h_A)$.

Vamos a probar que la aplicación

$$\begin{aligned} \operatorname{im} f &\longrightarrow \operatorname{im} h_A \\ w &\longmapsto f_{\mathcal{C}}(w) \end{aligned} \tag{2.60}$$

está bien definida, es lineal y biyectiva. Por lo tanto $\dim(\operatorname{im} f) = \dim(\operatorname{im} h_A)$ y habremos terminado. La aplicación es lineal e inyectiva porque $f_{\mathcal{C}}$ es lineal e inyectiva.

1. Está bien definida. Dado $w \in \operatorname{im} f$ hay que ver que $f_{\mathcal{C}}(w)$ pertenece a $\operatorname{im} h_A$. Existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$. Luego:

$$f_{\mathcal{C}}(w) = f_{\mathcal{C}}(f(v)) = h_A(f_{\mathcal{B}}(v)) \in \operatorname{im} h_A \tag{2.61}$$

2. Es sobreyectiva. Dado $Y \in \operatorname{im} h_A$ hay que ver que existe $w \in \operatorname{im} f$ tal que $f_{\mathcal{C}}(w) = Y$. Existe $X \in \mathbb{F}^n$ tal que $h_A(X) = Y$. Como $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva, existe $v \in V$ tal que $f_{\mathcal{B}}(v) = X$. Luego podemos tomar $w = f(v) \in \operatorname{im} f$ ya que:

$$f_{\mathcal{C}}(w) = f_{\mathcal{C}}(f(v)) = h_A(f_{\mathcal{B}}(v)) = h_A(X) = Y \tag{2.62}$$

□

Lema 2.56. *Si el rango por columnas de una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ es r, entonces A es equivalente a la matriz por bloques:*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) \tag{2.63}$$

Demostración. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal tal que A es la matriz de f respecto a algunas bases. Es suficiente que probemos que existe otra base $\mathcal{B}$ de V y otra base $\mathcal{C}$ de W respecto de las cuales la matriz de f es:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) \tag{2.64}$$

En efecto, como A y B son matrices de la misma aplicación lineal respecto de distintas bases, por un lado las notas 2.51 nos dicen que A y B son matrices equivalentes, y por otro lado la proposición 2.55 nos garantiza que $r = r'$, ya que el rango por columnas de A es igual al rango por columnas de B.

Sea $(a_1, \ldots, a_s)$ una base de $\ker f$ (luego $\dim(\ker f) = s$), y la ampliamos con $a_{s+1}, \ldots, a_n$ hasta formar una base de V (observa que $\dim V = n$). Esta situación nos recuerda a la demostración de la proposición 2.9. Por los mismos argumentos que entonces, la familia $\mathcal{F} = (f(a_{s+1}), \ldots, f(a_n))$ genera $\operatorname{im} f$. Sin embargo ahora no hace falta que probemos que $\mathcal{F}$ es libre, ya que sabemos que $\dim(\operatorname{im} f) = \dim V - \dim(\ker f) = n - s$, luego $\mathcal{F}$ es base de $\operatorname{im} f$ por dimensiones. Ampliamos $\mathcal{F}$ con $b_1, \ldots, b_k$ hasta formar una base de W; las bases que buscamos son:

$$\mathcal{B} = (a_{s+1}, \ldots, a_n\,,\, a_1, \ldots, a_s) \tag{2.65}$$

$$\mathcal{C} = (f(a_{s+1}), \ldots, f(a_n)\,,\, b_1, \ldots, b_k) \tag{2.66}$$

□

Ejercicios 2.57. 2.26, 2.27, 2.28.

2.12. Rango II

Teorema 2.58 (del rango)**.** *Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ matrices. Entonces:*

1. *El rango por columnas de A es igual al rango por filas de A. Así que simplemente escribiremos* rango(A)*.*
2. *A y B son equivalentes si y solo si* rango$(A) =$ rango(B)*.*

Demostración.

1. Nuestro objetivo es demostrar que el rango por columnas de A es igual al rango por columnas de A^T. Sea r el rango por columnas de A, el lema 2.56 nos dice que existen matrices P y Q regulares tales que:

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) \tag{2.67}$$

   Trasponiendo:

$$Q^T A^T P^T = (PAQ)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{n\times m}(\mathbb{F}) \tag{2.68}$$

   Pero Q^T y P^T son matrices regulares, luego A^T y $\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ son matrices equivalentes. Por la proposición 2.55, estas dos matrices equivalentes tienen el mismo rango por columnas, es decir, el rango por columnas de A^T también es r.

2. ($\Longrightarrow$) Esta implicación ya nos ha aparecido en un par de ocasiones; repitamos de nuevo el argumento. Si A y B son equivalentes, existe una aplicación lineal f de manera que A y B son matrices de f respecto de algunas bases. Luego la proposición 2.55 nos asegura que:

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(f) = \text{rango}(B) \tag{2.69}$$

   ($\Longleftarrow$) Sea $r = \text{rango}(A) = \text{rango}(B)$, el lema 2.56 nos dice que existen matrices P_1, Q_1, P_2, Q_2 regulares tales que:

$$P_1 A Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = P_2 B Q_2 \tag{2.70}$$

   Por tanto A y B son equivalentes entre sí, ya que ambas son equivalentes a la matriz por bloques $\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

$\square$

Propiedad 2.59. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada $n \times n$. Entonces:*

$$A \text{ es regular} \iff \operatorname{rango}(A) = n \tag{2.71}$$

Ejemplo 2.60. Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \tag{2.72}$$

Mediante un único cálculo, vamos a hallar matrices P y Q regulares tales que PAQ es una matriz por bloques de la forma $\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. En particular, habremos calculado el rango de A, ya que $\operatorname{rango}(A) = r$.

Solución. La idea es hacer operaciones elementales de Gauss partiendo de la matriz por bloques:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_2 \\ \hline I_3 & \end{array}\right) \tag{2.73}$$

Cada vez que hacemos una operación por filas, la aplicamos a los dos bloques superiores a la vez, y cada vez que hacemos una operación por columnas, la aplicamos a los dos bloques de la izquierda a la vez. Recordamos que hacer Gauss por filas/columnas en una matriz es lo mismo que multiplicar sucesivamente dicha matriz por matrices elementales a izquierda/derecha. Así obtendremos:

$$\left(\begin{array}{c|c} F_s \cdots F_1 \cdot A \cdot C_1 \cdots C_t & F_s \cdots F_1 \cdot I_2 \\ \hline I_3 \cdot C_1 \cdots C_t & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} PAQ & P \\ \hline Q & \end{array}\right) \tag{2.74}$$

Lo entenderemos mejor al hacer el ejemplo:

$$\begin{gathered}
\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right) \\
\to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right) \\
\to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \end{array}\right)
\end{gathered} \tag{2.75}$$

Luego:

$$P = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.76}$$

La propiedad 2.37 nos asegura que las matrices P y Q son regulares. Observa que las matrices P y Q no son únicas. □

Ejercicios 2.61. 2.29, 2.30, 2.31, 2.32, 2.33, 2.34.

2.13. Sistemas de ecuaciones lineales

Notas 2.62.

1. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal, y sea w un vector de W fijado. Supongamos que queremos calcular $f^{-1}(\{w\})$:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\} \tag{2.77}$$

Observa que este subconjunto de V podría ser vacío. Supongamos que hay al menos un vector v_p tal que $f(v_p) = w$, y fijamos este vector v_p. Entonces, como f es lineal, otro vector $v \in V$ cumple que $f(v) = w$ si y solo si $v - v_p \in \ker f$. Por lo tanto:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v_p + v_0 \mid v_0 \in \ker f\} =: \underbrace{v_p}_{\text{elemento}} + \underbrace{\ker f}_{\text{conjunto}} \tag{2.78}$$

2. Consideremos el caso particular en el que la aplicación es $h_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Fijado un vector columna $b \in \mathbb{F}^m$, observamos que $h_A^{-1}(\{b\})$ es el conjunto de soluciones del sistema $AX = b$. Así, en este caso el apartado anterior se traduce en la conocida propiedad de que el conjunto de soluciones de un sistema lineal se obtiene hallando una solución particular, y sumándole todas las soluciones del sistema homogéneo asociado.

Nota 2.63. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, donde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $b \in \mathbb{F}^m$. Así, el sistema tiene m ecuaciones y n incógnitas. Entonces:

1. Si $\text{rango}(A) < \text{rango}(A|b)$, el sistema es incompatible.
2. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = n$, el sistema es compatible determinado.
3. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) < n$, el sistema es compatible indeterminado.

Ejercicios 2.64. 2.35.

Ejercicios aplicaciones lineales y matrices

Ejercicio 2.1. Sea $f : V \to W$ una aplicación, sean A, A_1, A_2 subconjuntos del conjunto inicial V, y sean B, B_1, B_2 subconjuntos del conjunto final W. Recuerda que:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \tag{2.79}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in V \mid f(x) \in B\} \tag{2.80}$$

Para cada una de las siguientes igualdades, o bien demuestra que es cierta, o bien encuentra un contraejemplo que pruebe que es falsa. Además, en los casos en los que la igualdad es falsa, sí que se cumple que uno de los conjuntos está contenido en el otro; demuestra también dichos contenidos.

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
2. $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
4. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
5. $f^{-1}(f(A)) = A$.
6. $f(f^{-1}(B)) = B$.

Ejercicio 2.2. Sea $f : V \to W$ una aplicación entre dos conjuntos V y W. Demuestra que son equivalentes:

1. f es inyectiva.
2. $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ para todos $A_1, A_2 \subseteq V$.
3. $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq V$.

Ejercicio 2.3. ¿Cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales?

1. $f_1 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ dada por $(x, y, z)^T \mapsto (2x, x + y - 3z)^T$.
2. $f_2 : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ dada por $(x, y, z)^T \mapsto (2x, y + z - 3)^T$.
3. $f_3 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$ dada por $p(X) \mapsto (p(3) - p(1), p'(2))^T$.
4. $f_4 : \mathbb{C}_3[X] \to \mathbb{C}^2$ dada por $p(X) \mapsto (p(3)p(1), p'(2))^T$.
5. $f_5 : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ dada por $A \mapsto \overline{A^T}$.

Ejercicio 2.4. Sean f_1 y f_2 las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}_3[X]$ en $\mathbb{R}_3[X]$ dadas por:

$$f_1(p(X)) = p''(X) + p(0) \qquad f_2(p(X)) = (1 + X)p'(X) \tag{2.81}$$

Para cada $i = 1, 2$, calcula bases de $\operatorname{im} f_i$, $\ker f_i$, $\operatorname{im} f_i + \ker f_i$, $\operatorname{im} f_i \cap \ker f_i$.

Ejercicio 2.5. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Sea S un subespacio de V, y sea T un subespacio de W.

1. Prueba que $f^{-1}(T) = \{v \in V \mid f(v) \in T\}$ es un subespacio de V.
2. Demuestra que $f(S) = \{f(v) \mid v \in S\}$ es un subespacio de W.

Ejercicio 2.6. Sea $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ la aplicación lineal dada por $f(x, y, z) = (2x, x + y - 3z)$, y $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ la dada por $g(x, y) = (y, x - y, x)$. Considera los subespacios $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x - y = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x - y + 3z = 0\}$.

1. Calcula bases de los subespacios $\operatorname{im} f$, $f(S)$ y $f(T)$.
2. ¿Son alguno de estos tres subespacios de $\mathbb{C}^2$ iguales?
3. Calcula $f \circ g$, y calcula $g \circ f$.

Ejercicio 2.7. Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal, donde $\dim V < \infty$. Demuestra que son equivalentes:

1. $\ker f = \operatorname{im} f$.
2. $f \circ f$ es la aplicación nula, la dimensión de V es par, y la dimensión de la imagen de f es $(\dim V)/2$.

Ejercicio 2.8. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal, y sea S un subespacio de V de dimensión finita. Demuestra que:

$$\dim f(S) = \dim S - \dim(S \cap \ker f) \tag{2.82}$$

Ejercicio 2.9. Recuerda que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial real. Dada una aplicación $\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, definimos la aplicación $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mediante $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x^2)$. Ahora definimos la aplicación $f : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ que a cada $\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le asocia $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Observa que f es una aplicación lineal.

1. Calcula $\ker f$.
2. ¿Está la aplicación identidad $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\operatorname{im} f$?

Ejercicio 2.10. Sea (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canónica de $\mathbb{Q}^4$. Sabemos que una aplicación $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ cumple:

1. f es lineal.
2. $f(e_1) = e_1 - e_2$, $f(e_3) = 2e_1 + e_4$.
3. $f \circ f = f$.

Dado un vector $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4$, calcula su imagen $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Ejercicio 2.11. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Sea $\mathcal{F}_1 = (a_1, \dots, a_n)$ una familia de vectores de V. Observa que $\mathcal{F}_2 = (f(a_1), \dots, f(a_n))$ es una familia de vectores de W. Para cada una de las siguientes afirmaciones, o bien demuestra que la afirmación es cierta, o bien encuentra un contraejemplo que pruebe que es falsa.

1. Si $\mathcal{F}_1$ es ligada, entonces $\mathcal{F}_2$ es ligada.
2. Si $\mathcal{F}_2$ es ligada, entonces $\mathcal{F}_1$ es ligada.
3. Si $\mathcal{F}_1$ genera V, entonces $\mathcal{F}_2$ genera W.
4. Si $\mathcal{F}_2$ genera W, entonces $\mathcal{F}_1$ genera V.
5. Si f es inyectiva y $\mathcal{F}_1$ es libre, entonces $\mathcal{F}_2$ es libre.
6. Si f es sobreyectiva y $\mathcal{F}_1$ es libre, entonces $\mathcal{F}_2$ es libre.
7. Si f es inyectiva y $\mathcal{F}_1$ genera V, entonces $\mathcal{F}_2$ genera W.
8. Si f es sobreyectiva y $\mathcal{F}_1$ genera V, entonces $\mathcal{F}_2$ genera W.

Ejercicio 2.12. Calcula las matrices de las siguientes aplicaciones lineales en las bases que se indican.

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f_1(x, y, z) = (x + 2y, 3y + z)$ respecto de las bases $((1, 0, -2), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ y $((1, 1), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$.
2. $f_2 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ dada por $f_2(p(X)) = p(1)(1 + X^2) + p''(0)X^3$ en la base $(1, X, X^2, X^3)$.
3. $f_3 : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ dada por $f_3(M) = M \cdot \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ respecto de la base $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ de $M_2(\mathbb{R})$ y la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.13. Sea $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$ la aplicación lineal dada por:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ x+2z \\ y-z \\ x+y+z \end{pmatrix} \tag{2.83}$$

Considera el subespacio:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid x+y+z=0 \right\} \tag{2.84}$$

1. Calcula una base $\mathcal{B}_1$ de S.

2. Calcula una base $\mathcal{B}_2$ del subespacio $\operatorname{im} f$.

Sea h la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} h : S &\longrightarrow \operatorname{im} f \\ a &\longmapsto f(a) \end{aligned} \tag{2.85}$$

3. Calcula la matriz de h en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

Sean b_1, b_2, b_3 los vectores:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.86}$$

4. Para cada $i = 1, 2, 3$, calcula $f^{-1}(\{b_i\}) \cap S$.

Ejercicio 2.14 (IMC 2004)**.** Sean $A \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$ tales que:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.87}$$

Calcula BA.

Ejercicio 2.15. Recuerda que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial. Definimos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mediante $\varphi_1(t) = e^t$, $\varphi_2(t) = te^t$, $\varphi_3(t) = e^{-t}$.

1. Demuestra que $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ es una familia libre.

Por tanto $\mathcal{B}$ es base del subespacio $V = \operatorname{span}\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$.

2. Prueba que la aplicación $d : V \to V$, que a cada función le asocia su derivada, $d(\varphi) = \varphi'$, está bien definida y es lineal.

3. Calcula la matriz de d tomando $\mathcal{B}$ como base inicial y final.

4. Calcula la matriz de $d \circ d$ tomando de nuevo $\mathcal{B}$ como base inicial y final.

5. Encuentra las funciones $\varphi \in V$ tales que $\varphi'' = \varphi$.

Ejercicio 2.16. Fijamos una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$, y definimos la aplicación $L_A : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ mediante $L_A(B) = AB$.

1. Demuestra que L_A es lineal, es decir, es un endomorfismo.

2. Prueba que L_A es biyectiva si y solo si A es regular.

3. En el caso $n = 2$, calcula la matriz de L_A en la base formada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.88}$$

Ejercicio 2.17.

1. Demuestra que no existen matrices $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{C})$ y $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$ tales que $AB = I_3$.

2. Sea $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{C})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.89}$$

   Encuentra dos matrices distintas $B_1, B_2 \in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$ que cumplan que $B_1 A = I_2 = B_2 A$. Comprueba que en ambos casos $AB_i \neq I_3$.

Ejercicio 2.18 (IMC 2003)**.** Sean A y B matrices reales $n \times n$ tales que $AB + A + B = 0$. Prueba que $AB = BA$.

Ejercicio 2.19. Sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de $\mathbb{F}^n$. Considera la matriz $A = (b_1|\ldots|b_n) \in M_n(\mathbb{F})$ cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{B}$. Recuerda que $f_{\mathcal{B}} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ es la aplicación que a cada vector de $\mathbb{F}^n$ lo envía a sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$. Sea C la matriz de la aplicación lineal $f_{\mathcal{B}}$ en las bases canónicas. ¿Cuál de las siguientes relaciones entre A y C es cierta?

$$\begin{array}{ll} A = C & A = C^{-1} \\ A = C^T & A = (C^{-1})^T \end{array} \tag{2.90}$$

Ejercicio 2.20. Expresa las siguientes matrices regulares como producto de matrices elementales:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.91}$$

Ejercicio 2.21.

1. Sea $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ una base de un espacio vectorial V, y sean $v_i' \in V$ los vectores:

$$\begin{cases} 3v_1 + 3v_2 + v_3 = v_1' \\ -v_1 \qquad\quad + v_3 = v_2' \\ \ \ v_1 + \ \ v_2 \qquad = v_3' \end{cases} \tag{2.92}$$

   a) Prueba que $\mathcal{B}' = (v_1', v_2', v_3')$ es una base de V.

   b) Si las coordenadas del vector $w \in V$ en la base $\mathcal{B}'$ son $(1, 2, 3)^T$, ¿cuáles son las coordenadas de w en la base $\mathcal{B}$?

2. En un espacio vectorial, $(x_1, x_2, x_3)^T$ representan las coordenadas en la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, y $(x_1', x_2', x_3')^T$ representan las coordenadas en la base $\mathcal{B}' = (v_1', v_2', v_3')$. Nos dicen que el cambio de coordenadas viene dado por el sistema:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = x_1' \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 = x_2' \\ -x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = x_3' \end{cases} \tag{2.93}$$

   a) ¿Qué condición debe cumplir el sistema anterior para que en efecto sea un cambio de coordenadas?

   b) Expresa los vectores de $\mathcal{B}'$ como combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3.

Ejercicio 2.22. Considera la matriz $A \in M_3(\mathbb{C})$ y la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \tag{2.94}$$

1. Sea f el endomorfismo con matriz A en la base canónica, calcula la matriz de f en la base $\mathcal{B}$.

2. Sea g el endomorfismo con matriz A en la base $\mathcal{B}$, calcula la matriz de g en la base canónica.

Ejercicio 2.23. Sea $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ la aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{2.95}$$

Considera las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ siguientes:

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \tag{2.96}$$

1. Calcula la matriz de f en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

2. Encuentra la matriz, respecto de las bases $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_1$, de *una* aplicación lineal $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}$.

3. Halla la matriz de dicha g en las bases canónicas, y llámala B.

4. Calcula BA.

Ejercicio 2.24.

1. Observa que $Z = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA \text{ para toda } B \in M_n(\mathbb{C})\}$ es un subespacio de $M_n(\mathbb{C})$. Calcula una base de Z.

2. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Supongamos que A es regular. Prueba que A y B son equivalentes si y solo si B es regular.

3. Encuentra dos matrices de $M_3(\mathbb{C})$ que sean equivalentes pero que no sean semejantes.

Ejercicio 2.25. Para cada una de las siguientes afirmaciones, o bien demuestra que la afirmación es cierta, o bien encuentra un contraejemplo que pruebe que es falsa.

1. Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ son equivalentes, entonces A^2 es equivalente a B^2.
2. Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ son semejantes, entonces A^2 es semejante a B^2.

Ejercicio 2.26. Sea $h : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ la aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.97}$$

Sean B_1, B_2, B_3, B_4 las matrices:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.98}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.99}$$

1. ¿Cuáles de las B_i son matrices de h en algún par de bases?
2. Para cada una de esas B_i, halla bases en las que B_i sea la matriz de h.
3. Sea r el rango de h. Encuentra matrices C_1 y C_2 tales que $C_1 A C_2 = I_r$.

Ejercicio 2.27. Sean $v, w \in \mathbb{F}^n$ dos vectores columna.

1. Calcula el rango de la matriz $A = vw^T \in M_n(\mathbb{F})$.
2. Sea $\alpha = w^T v \in \mathbb{F}$. Calcula A^k en función de α, A para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.28 (IMC 2005)**.** Sea $A = (a_{ij})$ la matriz real $n \times n$ dada por $a_{ij} = i + j$ para todos $i, j = 1, \ldots, n$. Calcula el rango de A.

Ejercicio 2.29. Sea $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \tag{2.100}$$

Sea $r = \text{rango}(A)$. Encuentra matrices $A_1 \in M_{3\times r}(\mathbb{Q})$, $A_2 \in M_{r\times 4}(\mathbb{Q})$ de rango r tales que $A = A_1 A_2$.

Ejercicio 2.30. Sean $A_1, A_2, A_3, A_4 \in M_4(\mathbb{C})$ las matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.101}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.102}$$

1. Calcula el rango de dichas matrices, $r_i = \text{rango}(A_i)$.
2. Para las que son regulares, calcula su matriz inversa.
3. Para las que no son regulares, halla matrices R_i, S_i regulares tales que:

$$A_i = R_i \left(\begin{array}{c|c} I_{r_i} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) S_i \tag{2.103}$$

Ejercicio 2.31. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, y sea $r = \text{rango}(A)$. Demuestra que:

1. Existen $B_1 \in M_{r\times m}(\mathbb{F})$, $B_2 \in M_{n\times r}(\mathbb{F})$ tales que $B_1AB_2 = I_r$.
2. Si $r = n$, existe $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ tal que $BA = I_n$.
3. Si $r = m$, existe $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_m$.

Ejercicio 2.32.

1. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Demuestra que si la matriz A es regular, entonces $\text{rango}(AB) = \text{rango}(BA) = \text{rango}(B)$.
2. Halla dos matrices $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ tales que $\text{rango}(AB) \neq \text{rango}(BA)$.

Ejercicio 2.33. Sea $A \in M_n(\mathbb{Q})$ una matriz cuadrada que satisface que $0 < \text{rango}(A) < n$. Denotemos $O_n \in M_n(\mathbb{Q})$ a la matriz nula.

1. Prueba que existe una matriz $B \in M_n(\mathbb{Q})$ no nula tal que $BA = O_n$.
2. Prueba que existe una matriz $C \in M_n(\mathbb{Q})$ no nula tal que $AC = O_n$.

Ejercicio 2.34. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, y sea $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$. Prueba que:

1. $\text{rango}(AB) \leq \text{rango}(A)$.
2. $\text{rango}(AB) \leq \text{rango}(B)$.
3. $\text{rango}(A) + \text{rango}(B) - n \leq \text{rango}(AB)$.

Ejercicio 2.35 (IMC 2009)**.** Sean $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, con A matriz regular. Demuestra que si $(A - B)C = BA^{-1}$, entonces $C(A - B) = A^{-1}B$.

Capítulo 3

Determinantes

3.1. Determinantes y operaciones por filas I

Definición 3.1. Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$. El *menor* (i, j) de A, denotado M_{ij}^A, es la matriz $(n-1) \times (n-1)$ formada al suprimir la fila i y la columna j de A.

Definiciones 3.2. Definimos la aplicación *determinante*

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{F}) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ A &\longmapsto \det A \equiv |A| \end{aligned} \tag{3.1}$$

inductivamente mediante:

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$.

2. Supuesto definido el determinante para matrices $(n-1) \times (n-1)$, llamamos *adjunto* (i, j) de $A \in M_n(\mathbb{F})$ al número:

   $$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}^A \tag{3.2}$$

   Definimos:

   $$\det A = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{n1}A_{n1} \tag{3.3}$$

   (Suma de los elementos de la primera columna por sus adjuntos).

Ejemplos 3.3.

1. El determinante de una matriz genérica 2×2 es:

   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3.4}$$

2. Calculemos el determinante de una matriz 3×3:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= +0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -2(3-0) + 4(18-40) \\ &= -94 \end{aligned} \tag{3.5}$$

3. El ejercicio 3.3 nos dice que el determinante de la matriz identidad es igual a 1:

$$\det I_n = 1 \tag{3.6}$$

Propiedades 3.4. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$.*

1. *Sea $F_i(\alpha)$ la matriz elemental correspondiente a multiplicar la fila i por α. Entonces:*

$$\det(F_i(\alpha)A) = \alpha \det A \tag{3.7}$$

Demostración. Sea $B = F_i(\alpha)A$. Este resultado, al igual que muchas otras propiedades de los determinantes, vamos a demostrarlo mediante inducción sobre n. Si $n = 1$ está claro: $\det B = b_{11} = \alpha a_{11} = \alpha \det A$. Supongamos pues que la fórmula es cierta para $n-1$ (con $n \geq 2$), y probemos que es cierta para n:

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{k=1}^{n} b_{k1} B_{k1} = b_{i1} B_{i1} + \sum_{k \neq i} b_{k1} B_{k1} \\ &\overset{\text{inducción}}{=\!=\!=\!=} (\alpha a_{i1}) A_{i1} + \sum_{k \neq i} a_{k1} (\alpha A_{k1}) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{k1} A_{k1} \\ &= \alpha \det A \end{aligned} \tag{3.8}$$

□

Consecuencias 3.5.

1. $\det F_i(\alpha) = \alpha$, ya que $F_i(\alpha) = F_i(\alpha) I_n$. Por lo tanto podemos reescribir la propiedad 1 como $\det(F_i(\alpha) \cdot A) = (\det F_i(\alpha)) \cdot (\det A)$.

2. Si A tiene una fila nula, entonces $\det A = 0$. (Observa que la propiedad 1 es válida incluso si $\alpha = 0$, aunque entonces $F_i(\alpha)$ no es una matriz elemental).

Propiedades 3.6.

2. *El determinante es aditivo en cada fila, es decir:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1}+a''_{i1} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demostración. Análoga a la demostración de la propiedad 1. □

Ejercicios 3.7. 3.1, 3.2, 3.3.

3.2. Determinantes y operaciones por filas II

Propiedades 3.8.

3. *Sea F_{ij} la matriz elemental correspondiente a intercambiar las filas i, j. Entonces:*

$$\det(F_{ij}A) = -\det A \tag{3.9}$$

Demostración.

1. Primero veamos que basta con que probemos el resultado para $i = 1$. Observamos que $F_{ij} = F_{1i}F_{1j}F_{1i}$ gracias al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "F_{1i}"'] & 1 \arrow[d, mapsto] & i \arrow[d, mapsto] & j \arrow[d, mapsto] & {} \arrow[ddd, "F_{ij}"] \\
{} \arrow[d, "F_{1j}"'] & i \arrow[d, mapsto] & 1 \arrow[d, mapsto] & j \arrow[d, mapsto] & {} \\
{} \arrow[d, "F_{1i}"'] & i \arrow[d, mapsto] & j \arrow[d, mapsto] & 1 \arrow[d, mapsto] & {} \\
{} & 1 & j & i & {}
\end{tikzcd} \tag{3.10}$$

Por lo tanto, una vez que probemos el resultado para $i = 1$, tendremos:

$$\begin{aligned}\det(F_{ij}A) &= \det(F_{1i}F_{1j}F_{1i}A) = -\det(F_{1j}F_{1i}A) \\ &= \det(F_{1i}A) = -\det A \end{aligned} \tag{3.11}$$

2. Inducción sobre n. La fórmula es clara para $n = 2$, así que supongamos que es cierta para $n-1$ (con $n \geq 3$) y veamos que es cierta para n. Sea $B = F_{1j}A$, debemos ver que los dos números siguientes son opuestos:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1} \qquad \det B = \sum_{k=1}^{n} b_{k1}B_{k1} \tag{3.12}$$

a) Si $k \neq 1, j$, entonces M_{k1}^A y M_{k1}^B son dos matrices iguales salvo por dos filas intercambiadas. Debido a la hipótesis de inducción, $B_{k1} = -A_{k1}$. Además $b_{k1} = a_{k1}$. Luego $b_{k1}B_{k1} = -a_{k1}A_{k1}$.

b) Veamos que $b_{11}B_{11} = -a_{j1}A_{j1}$. Por simetría ($A \leftrightarrow B$), esto también implica que $a_{11}A_{11} = -b_{j1}B_{j1}$, así que habremos terminado. Claramente $b_{11} = a_{j1}$.

$$M_{j1}^A = \begin{pmatrix} \text{fila } 1 \\ \cdots \\ \text{fila } j-2 \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } j+1 \\ \cdots \\ \text{fila } n \end{pmatrix} \qquad M_{11}^B = \begin{pmatrix} \text{fila } 2 \\ \cdots \\ \text{fila } j-1 \\ \text{fila } 1 \\ \text{fila } j+1 \\ \cdots \\ \text{fila } n \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Luego M_{11}^B se obtiene al hacer $j-2$ intercambios de filas a M_{j1}^A, y de nuevo por la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} b_{11}B_{11} &= a_{j1}\det M_{11}^B \\ &\overset{\text{inducción}}{=\!=\!=} a_{j1}(-1)^{j-2}\det M_{j1}^A \\ &= -a_{j1}(-1)^{j+1}\det M_{j1}^A = -a_{j1}A_{j1} \end{aligned} \tag{3.14}$$

□

Consecuencias 3.9.

1. Si dos filas de A son iguales, entonces $\det A = 0$.

2. $\det F_{ij} = -1$, por lo tanto $\det(F_{ij}A) = (\det F_{ij}) \cdot (\det A)$.

Propiedades 3.10.

4. *Sea $F_{ij}(\alpha)$ la matriz elemental correspondiente a sumarle, a la fila i, α veces la fila j. Entonces:*

$$\det(F_{ij}(\alpha)A) = \det A \tag{3.15}$$

Demostración. Llamamos B_α a la matriz obtenida al *sustituir* la fila i de A por α veces la fila j. Calculamos:

$$\begin{aligned}\det(F_{ij}(\alpha)A) &\overset{(2)}{=\!=\!=} \det A + \det B_\alpha \overset{(1)}{=\!=\!=} \det A + \alpha \det B_1 \\ &\overset{(3)}{=\!=\!=} \det A + \alpha \cdot 0 = \det A \end{aligned} \tag{3.16}$$

□

Consecuencias 3.11.

- $\det F_{ij}(\alpha) = 1$, por lo tanto $\det(F_{ij}(\alpha)A) = (\det F_{ij}(\alpha)) \cdot (\det A)$.

Ejercicios 3.12. 3.4, 3.5, 3.6.

3.3. Propiedades de los determinantes

Nota 3.13. Las propiedades 1, 3 y 4, junto con $\det I_n = 1$, permiten calcular el determinante de cualquier matriz A.

1. Si A es regular, entonces existen matrices elementales $F_1, \dots, F_r$ tales que $A = F_r \cdots F_1 \cdot I_n$, luego:

$$\begin{aligned}\det A = \det(F_r \cdots F_1 \cdot I_n) &= \det F_r \cdot \det(F_{r-1} \cdots F_1 \cdot I_n) \\ = \cdots &= \det F_r \cdots \det F_1 \end{aligned} \tag{3.17}$$

2. Si A no es regular, entonces existen matrices elementales $F_1, \dots, F_r$ tales que $A = F_r \cdots F_1 \cdot B$, donde todas las entradas de la última fila de la matriz B son ceros. Repitiendo la misma cuenta:

$$\det A = \cdots = \det F_r \cdots \det F_1 \cdot \underbrace{\det B}_{=0} = 0 \tag{3.18}$$

Ejemplo 3.14. Calculemos un determinante con este método:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & -5 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Propiedades 3.15.

5. A es regular $\iff \det A \neq 0$.

Demostración. Es el argumento de la nota 3.13. □

Propiedades 3.16.

6. $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.

Demostración. Primero observamos que si uno de los términos es distinto de cero, entonces el otro también es distinto de cero. En efecto, debido al corolario 2.30:

$$\begin{aligned}\det(AB) \neq 0 &\iff AB \text{ regular} \iff A \text{ y } B \text{ regulares}\\ &\iff \det A \neq 0 \text{ y } \det B \neq 0\\ &\iff (\det A)\cdot(\det B) \neq 0\end{aligned} \tag{3.20}$$

Supongamos pues que A y B son regulares. Existen matrices elementales F_i y Q_j tales que $A = F_r \cdots F_1$ y $B = Q_s \cdots Q_1$. Ya sabemos que la propiedad 6 es cierta para matrices elementales, luego:

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(F_r \cdots F_1 \cdot Q_s \cdots Q_1)\\ &= (\det F_r)\cdots(\det F_1)\cdot(\det Q_s)\cdots(\det Q_1)\\ &= \det(F_r \cdots F_1)\cdot\det(Q_s \cdots Q_1) = (\det A)\cdot(\det B)\end{aligned} \tag{3.21}$$

□

Consecuencia 3.17. Si A es regular, entonces $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Propiedades 3.18.

7. $\det(A^T) = \det A$.

Demostración. El corolario 2.30 nos dice que, si A no es regular, tampoco lo es A^T, y $\det A = 0 = \det A^T$. Supongamos pues que A es regular. Existen matrices elementales F_i tales que $A = F_r \cdots F_1$. Veamos cuál es la traspuesta de una matriz elemental cualquiera:

$$F_i(\alpha)^T = F_i(\alpha) \qquad F_{ij}^T = F_{ij} \qquad F_{ij}(\alpha)^T = F_{ji}(\alpha) \tag{3.22}$$

En los tres casos, si F es una matriz elemental, entonces F^T también es elemental y $\det F^T = \det F$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\det A^T &= \det(F_1^T \cdots F_r^T) = (\det F_1^T)\cdots(\det F_r^T)\\ &= (\det F_1)\cdots(\det F_r) = (\det F_r)\cdots(\det F_1)\\ &= \det(F_r \cdots F_1) = \det A\end{aligned} \tag{3.23}$$

□

Ejercicios 3.19. 3.7, 3.8.

3.4. Matriz adjunta

Propiedades 3.20.

8. *El determinante es suma de los elementos de una fila por sus adjuntos, o también suma de los elementos de una columna por sus adjuntos:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}A_{rj} = \sum_{i=1}^{n} a_{is}A_{is} \tag{3.24}$$

Demostración. Si $s = 1$, es la definición de determinante. Si $r = 1$, es consecuencia de que $\det A^T = \det A$. Probemos el caso $r = 2$ a partir del caso $r = 1$. Sea $B = F_{12}A$ la matriz formada al intercambiar las filas 1 y 2 de A:

$$\begin{aligned} \det A = -\det B = -\sum_{j=1}^{n} b_{1j}B_{1j} &= -\sum_{j=1}^{n} b_{1j}(-1)^{1+j}\det M_{1j}^{B} \\ = \sum_{j=1}^{n} a_{2j}(-1)^{2+j}\det M_{2j}^{A} &= \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{2j} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Repitiendo los mismos argumentos hacemos los casos $r = 3, \ldots, n$. Y como $\det A^T = \det A$, obtenemos también los casos $s = 2, \ldots, n$. □

Definición 3.21. Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$. La *adjunta* de A es la matriz traspuesta de la matriz de adjuntos. Es decir, $\operatorname{adj} A \in M_n(\mathbb{F})$ y la entrada (i,j) de $\operatorname{adj} A$ es el adjunto (j,i) de A:

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = A_{ji} \tag{3.26}$$

Propiedades 3.22.

9. $A \cdot (\operatorname{adj} A) = (\det A) \cdot I_n$.

Demostración. La entrada (i,i) de la matriz $A \cdot (\operatorname{adj} A)$ es la suma de los elementos de la fila i por sus adjuntos, es decir, $\det A$. Veamos que, si $i \neq j$, entonces la entrada (i,j) de dicha matriz es cero. Sea B la matriz formada al sustituir la fila j de A por la fila i de A (luego las filas i y j de B coinciden).

$$\begin{aligned} (A \cdot (\operatorname{adj} A))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (\operatorname{adj} A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{jk}B_{jk} = \det B = 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

□

Corolario 3.23. *Si A es regular, entonces:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \tag{3.28}$$

Nota 3.24 (Regla de Cramer)**.** Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ una matriz regular, y sea $b \in \mathbb{F}^n$ un vector columna. Entonces la solución del sistema $AX = b$ es

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A} \qquad j = 1, \dots, n \tag{3.29}$$

donde B_j es la matriz que resulta de sustituir la columna j de A por b.

Demostración. Calculamos el determinante de B_j sumando los elementos de la columna j por sus adjuntos, y vemos que:

$$\det B_j = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{adj} A)_{ji} \cdot b_i = (\text{fila } j \text{ de } \operatorname{adj} A) \cdot b \tag{3.30}$$

La solución del sistema es $X = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} \cdot (\operatorname{adj} A) \cdot b$, por lo tanto:

$$x_j = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{fila } j \text{ de } \operatorname{adj} A) \cdot b = \frac{1}{\det A} \cdot \det B_j \tag{3.31}$$

□

Ejercicios 3.25. 3.9, 3.10, 3.11, 3.12.

3.5. Signatura

Observación 3.26. Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos el polinomio p_n en las variables X_{ij} como $p_n = \det((X_{ij})_{i,j=1}^n)$. Por ejemplo:

$$p_1 = \begin{vmatrix} X_{11} \end{vmatrix} = X_{11} \tag{3.32}$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} = +X_{11}X_{22} - X_{21}X_{12} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} p_3 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix} = &+ X_{11}X_{22}X_{33} + X_{21}X_{32}X_{13} + X_{31}X_{12}X_{23} \\ &- X_{31}X_{22}X_{13} - X_{11}X_{32}X_{23} - X_{21}X_{12}X_{33} \end{aligned} \tag{3.34}$$

Por inducción, vemos que p_n es un polinomio homogéneo de grado n, es decir, es suma de monomios de grado n. ¿Cuál es el coeficiente que multiplica a cada monomio? Para calcularlo, evaluamos el polinomio haciendo las variables del monomio igual a 1 y el resto 0. Por ejemplo, si $n = 3$:

- El coeficiente de $X_{11}X_{32}X_{23}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \tag{3.35}$$

- El coeficiente de $X_{11}X_{22}X_{23}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.36}$$

Como el determinante de una matriz que tiene o bien una fila nula o bien una columna nula es cero, los únicos monomios con coeficiente distinto de cero son los de la forma

$$X_{\sigma(1),1}X_{\sigma(2),2} \cdots X_{\sigma(n),n} = \prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i} \tag{3.37}$$

donde σ es una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$, es decir, $\sigma \in S_n$. Por ejemplo, si $n = 3$, la permutación $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$ se corresponde con el monomio $X_{21}X_{32}X_{13}$.

Definición 3.27. A cada permutación $\sigma \in S_n$ le asociamos la matriz por columnas $A_\sigma = (e_{\sigma(1)}| \ldots |e_{\sigma(n)})$, donde $e_1, \ldots, e_n$ son los vectores de la base canónica. Definimos la *signatura* de σ como el determinante de A_σ:

$$\operatorname{sgn} \sigma = \det A_\sigma \in \{\pm 1\} \tag{3.38}$$

Propiedades 3.28.

10. El determinante es:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \tag{3.39}$$

Demostración. Observación 3.26. □

Propiedad 3.29. *Para todas permutaciones $\sigma, \tau \in S_n$ se cumple que:*

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot (\operatorname{sgn} \tau) \tag{3.40}$$

Demostración. Ejercicio 3.13. □

Ejercicios 3.30. 3.13, 3.14, 3.15, 3.16.

Ejercicios determinantes

Ejercicio 3.1. Definimos la *traza* de una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ como la suma de los elementos de su diagonal principal:

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + \cdots + a_{nn} \tag{3.41}$$

Demuestra que:

1. La aplicación $\operatorname{tr} : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ es lineal.
2. Para todas $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ se cumple que:
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \tag{3.42}$$
3. Si $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ es una aplicación lineal tal que $f(AB) = f(BA)$ para todas $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $f = \lambda \operatorname{tr}$.
4. La fórmula $\operatorname{tr}(AB) = (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B)$ no es cierta en general.
5. Si $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ son matrices semejantes, entonces $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.
6. Si la matriz A es simétrica ($A^T = A$) y la matriz B es antisimétrica ($B^T = -B$), entonces $\operatorname{tr}(AB) = 0$.

Ejercicio 3.2. Demuestra la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &+ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned} \tag{3.43}$$

Ejercicio 3.3. Prueba que el determinante de una matriz triangular (o bien triangular superior o bien triangular inferior) es el producto de las entradas de su diagonal principal.

Ejercicio 3.4. Prueba que, si A es una matriz de tamaño 2×2, entonces:

$$\det A = \frac{1}{2}\Big((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\Big) \tag{3.44}$$

Ejercicio 3.5. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{rango}(A) = 1$ y $\operatorname{tr} A = 0$. Demuestra que A^2 es la matriz nula.

Ejercicio 3.6 (IMC 2005)**.** En el espacio vectorial de las matrices $n \times n$ reales, halla la dimensión máxima posible de un subespacio S tal que:

$$\operatorname{tr}(AB) = 0 \qquad \text{para todas } A, B \in S \tag{3.45}$$

Ayuda: Considera el subespacio de las matrices simétricas, y el subespacio de las matrices estrictamente triangulares superiores.

Ejercicio 3.7. Evalúa, sin usar calculadora, los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 987 & 1170 \\ 1110 & 1316 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 480 & 321 & 598 \\ 321 & 215 & 401 \\ 314 & 214 & 404 \end{vmatrix} \tag{3.46}$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 0 & -25 & 0 \\ -13 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 14 & 11 \\ 35 & 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 6 & 0 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 3 & 0 \end{vmatrix} \tag{3.47}$$

Ejercicio 3.8. Calcula los valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales las columnas de la matriz resultante de hacer el siguiente producto forman una base de $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda - i \\ \lambda - 2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda + 3 \\ \lambda + 4i & \lambda \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

Ejercicio 3.9 (IMC 2002)**.** Calcula el determinante de $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, donde:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|} & \text{si } i \neq j \\ 2 & \text{si } i = j \end{cases} \tag{3.49}$$

Ejercicio 3.10. Sea $A \in M_m(\mathbb{F})$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $C \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$, $D \in M_n(\mathbb{F})$. Observa que:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline 0 & D \end{array} \right) = \det D \tag{3.50}$$

Prueba que, si D es regular, entonces:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \det(A - BD^{-1}C) \cdot \det D \tag{3.51}$$

Ejercicio 3.11. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

Ejercicio 3.12. Decimos que una matriz $A \in M_n(\mathbb{Z})$ es invertible en $M_n(\mathbb{Z})$ si existe una matriz $B \in M_n(\mathbb{Z})$ tal que $AB = BA = I_n$. Demuestra que $A \in M_n(\mathbb{Z})$ es invertible en $M_n(\mathbb{Z})$ si y solo si su determinante es $+1$ o -1.

Ejercicio 3.13. A cada permutación σ le asociamos la matriz por columnas $A_\sigma = (e_{\sigma(1)}| \dots | e_{\sigma(n)})$, donde $e_1, \dots, e_n$ son los vectores de la base canónica.

1. Prueba que $A_{\sigma \circ \tau} = A_\sigma \cdot A_\tau$.
2. Demuestra que $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot (\operatorname{sgn} \tau)$.

Ejercicio 3.14. ¿Cuántas permutaciones hay en S_4? ¿Cuántas de ellas tienen signatura $+1$ y cuántas -1?

Ejercicio 3.15. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. El determinante de Vandermonde es por definición:

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{3.53}$$

1. Comprueba que $V(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$.
2. Demuestra que $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)$.
3. Calcula las raíces del polinomio $p(X) = V(X, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{F}[X]$.
4. Prueba que:
$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_j - \alpha_i) \tag{3.54}$$

Ejercicio 3.16 (IMC 2007)**.** Sea $n \ge 2$ un número entero. ¿Cuál es el valor mínimo y el valor máximo posible del rango de una matriz real $n \times n$ cuyas n^2 entradas son precisamente los números $1, 2, \dots, n^2$?

Capítulo 4

Valores y vectores propios

4.1. Valores propios

Situación 4.1. En este capítulo, V es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita, n es la dimensión de dicho espacio vectorial, $A \in M_n(\mathbb{F})$ es una matriz cuadrada, y f es un endomorfismo de V. (Es decir, $f : V \to V$ es una aplicación lineal en la que tanto el espacio inicial como el final son V).

Definiciones 4.2.

1. Decimos que un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un *valor propio* del endomorfismo f si existe un vector $v \in V$ distinto del vector nulo tal que:
$$f(v) = \lambda v \tag{4.1}$$

2. Fijemos un valor propio λ. Un vector $v \in V$ es un *vector propio* del endomorfismo f de valor propio λ si $f(v) = \lambda v$. El conjunto de dichos vectores propios es el *subespacio fundamental* de valor propio λ, denotado $S_f(\lambda)$:
$$S_f(\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \tag{4.2}$$

Definición 4.3. Los valores y vectores propios de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ son, por definición, los del endomorfismo $h_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ dado por $h_A(X) = AX$.

Notas 4.4.

1. El vector nulo es vector propio de cualquier valor propio, pero hace falta que haya al menos otro vector v tal que $f(v) = \lambda v$ para que hayamos dicho que el escalar λ es valor propio.

2. $S_f(\lambda)$ es en efecto un subespacio de V, ya que es el núcleo de la aplicación lineal:

$$\begin{aligned}(\lambda \operatorname{id}_V - f) : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \lambda v - f(v)\end{aligned} \tag{4.3}$$

   Análogamente, $S_A(\lambda)$ es un subespacio de $\mathbb{F}^n$.

Ejemplo 4.5. Sea $A \in M_2(\mathbb{Q})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Notamos que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, y que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, luego $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ es vector propio de A de valor propio 4, y $\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ es vector propio de valor propio 0.

Propiedad 4.6. *Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ un escalar. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base (misma base de salida y de llegada). Entonces son equivalentes:*

1. *λ es valor propio de f.*
2. *λ es valor propio de A.*
3. $\operatorname{rango}(\lambda I_n - A) < n$.
4. $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Demostración. El escalar λ es valor propio de f si y solo si existe un vector $v \in V$ no nulo tal que $f(v) = \lambda v$. Pasando a coordenadas, esto es equivalente a que exista un vector $X \in \mathbb{F}^n$ no nulo tal que $AX = \lambda X$. Esto último es lo mismo que decir que el sistema de ecuaciones homogéneo $(\lambda I_n - A)X = \bar{0}$ es indeterminado, es decir, que la matriz $\lambda I_n - A$ no es regular. □

Ejemplo 4.7. Sea $A \in M_3(\mathbb{C})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -16 & -4 \\ 6 & 9 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Calculemos, de manera sistemática, todos los valores propios de A y sus subespacios fundamentales.

Solución. Para hallar los valores propios debemos calcular los valores de λ que hacen que el siguiente determinante sea cero:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda+11 & 16 & 4 \\ -6 & \lambda-9 & -2 \\ -6 & -8 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \cdots = \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 \overset{\text{Ruffini}}{=\!=\!=} (\lambda+1)(\lambda-1)^2\end{aligned} \tag{4.6}$$

Así que los valores propios de A son -1 y 1. Para calcular $S(-1)$ y $S(1)$ resolvemos mediante el método de Gauss sendos sistemas homogéneos:

$$\begin{aligned}S(-1) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tales que } \begin{pmatrix} 10 & 16 & 4 \\ -6 & -10 & -2 \\ -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \cdots = \operatorname{span}\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}S(1) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tales que } \begin{pmatrix} 12 & 16 & 4 \\ -6 & -8 & -2 \\ -6 & -8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \cdots = \operatorname{span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle\end{aligned} \tag{4.8}$$

□

Ejercicios 4.8. 4.1, 4.2, 4.3.

4.2. Vectores propios

Nota 4.9. Si $(v_1, \ldots, v_n)$ es una base de V de forma que cada v_i es vector propio de f de valor propio λ_i, entonces la matriz del endomorfismo f en la base $(v_1, \ldots, v_n)$ es la matriz diagonal:

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Recíprocamente, si la matriz de f en la base $(v_1, \ldots, v_n)$ es $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, entonces $f(v_i) = \lambda_i v_i$ para todo i.

Definiciones 4.10.

1. Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F})$ es *diagonalizable* si es semejante a alguna matriz diagonal.

2. Un endomorfismo $f : V \to V$ es *diagonalizable* si existe alguna base de V en la que la matriz de f es diagonal, es decir, dicha base está formada por vectores propios. En otras palabras, f es diagonalizable si cualquiera de sus matrices es diagonalizable.

Repaso 4.11. En este capítulo resulta muy conveniente recordar que si

- A es la matriz de f en la base $\mathcal{C}$,
- D es la matriz de f en la base $\mathcal{B}$,
- P es la matriz de cambio de bases de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$,

entonces:

$$A = PDP^{-1} \tag{4.10}$$

Ejemplo 4.12. Veamos que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Solución. Consideramos A como la matriz del endomorfismo $f = h_A$ en la base canónica $\mathcal{C} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$. Hallamos una base $\mathcal{B} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ formada por vectores propios de valores propios 4 y 0. Calcular la matriz P de cambio de bases de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ es muy sencillo, gracias a que $\mathcal{C}$ es la base canónica, $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Llamemos D a la matriz de f en la base $\mathcal{B}$; como la base $\mathcal{B}$ está formada por vectores propios, D es diagonal, $D = \operatorname{diag}(4, 0) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Aplicando el repaso 4.11 tenemos que $A = PDP^{-1}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \tag{4.12}$$

□

Ejemplo 4.13. Probemos que la siguiente matriz no es diagonalizable:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Solución. Supongamos por reducción al absurdo que sí que existe una matriz $D = \mathrm{diag}(\alpha, \beta) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)$ diagonal y una matriz $P \in M_2(\mathbb{F})$ regular de manera que $N = PDP^{-1}$. Observamos que:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \tag{4.15}$$

Multiplicando a izquierda por P^{-1} y a derecha por P, vemos que D^2 es la matriz nula. Por lo tanto $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, es decir, $\alpha = \beta = 0$. Así que D también es la matriz nula. Volviendo a la expresión inicial $N = PDP^{-1}$, observamos que a su vez N también es la matriz nula, contradicción. $\square$

Ejemplo 4.14. Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Dado un número natural $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, calculemos A^m.

Solución. Primero calculamos los valores propios de A y sus subespacios fundamentales, y aplicando el repaso 4.11 obtenemos que:

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

El truco está en que, como la matriz D es diagonal, calcular sus potencias es sencillo:

$$D^m = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-1)^m & \\ & & (-2)^m \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A^m &= (PDP^{-1})^m = PD^mP^{-1} \qquad (4.19) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (-2)^{m+1} + 2 & (-2)^{m+1} + 2 \\ (-1)^{m+1} + 1 & (-1)^{m+1} + 2 & (-2)^{m+1} + 2 \\ (-1)^m - 1 & (-2)^m + (-1)^m - 2 & (-2)^m + 2 \cdot (-1)^m - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Ejercicios 4.15. 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9.

4.3. Polinomio característico

Definición 4.16. El *polinomio característico* de una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ cuadrada es el polinomio de $\mathbb{F}[X]$ dado por:

$$\det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & X - a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{F}[X] \tag{4.20}$$

Ejemplo 4.17. Calculemos el polinomio característico de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 26 & 6 & 8 \\ 36 & 12 & 12 \\ -93 & -24 & -29 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} X - 26 & -6 & -8 \\ -36 & X - 12 & -12 \\ 93 & 24 & X + 29 \end{vmatrix} = \cdots = X^3 - 9X^2 + 26X - 24 \tag{4.22}$$

$$\overset{\text{Ruffini}}{=\!=\!=} (X-2)(X-3)(X-4)$$

□

Nota 4.18. Hemos definido el polinomio característico de una matriz de forma que sus raíces sean los valores propios de dicha matriz.

Propiedades 4.19. *Sea $p(X) \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio característico de la matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ de tamaño $n \times n$. Entonces:*

1. *$p(X)$ es un polinomio mónico de grado n, es decir:*

$$p(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{n-1} X^{n-1} + X^n \tag{4.23}$$

2. *$b_{n-1} = -\operatorname{tr} A$.*

Demostración. Para calcular $\det(XI_n - A)$ sumamos todos los posibles productos de n entradas de la matriz $XI_n - A$ de manera que cojamos una entrada de cada fila y de cada columna. Estos productos son polinomios de grado el número de entradas que hayamos cogido de la diagonal principal. Luego solo contribuirán al término b_{n-1} si escogemos al menos $n-1$ entradas de la diagonal principal. Pero si elegimos todas las entradas menos una de la diagonal principal, necesariamente la última entrada también estará en la diagonal principal, ya que hay que elegir una de cada fila y columna. Por lo tanto la única contribución proviene del producto:

$$\begin{aligned}(X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}) = \\ = X^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})X^{n-1} + \\ (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + \cdots + a_{n-1,n-1}a_{nn})X^{n-2} + \cdots + \\ (-1)^n \cdot a_{11} \cdots a_{nn}\end{aligned} \tag{4.24}$$

Luego $b_{n-1} = -a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn} = -\operatorname{tr} A$. □

3. $b_0 = (-1)^n \det A$.

Demostración. Basta evaluar $p(X)$ en $X = 0$:

$$b_0 = p(0) = \det(0 \cdot I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A \tag{4.25}$$

□

Corolario 4.20. *Supongamos que podemos factorizar el polinomio característico de la matriz A como $p(X) = (X-\lambda_1)^{M_1} \cdots (X-\lambda_k)^{M_k}$. (Esto siempre es posible si el cuerpo de escalares es $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Entonces:*

1. $\operatorname{tr} A = M_1\lambda_1 + \cdots + M_k\lambda_k$.

2. $\det A = \lambda_1^{M_1} \cdots \lambda_k^{M_k}$.

Nota 4.21. Sea $p(X)$ el polinomio característico de A; recuerda que es un polinomio mónico. Sea $q(X) = \det(A - XI_n)$. Entonces $q(X) = (-1)^n p(X)$. Luego si n es impar estos dos polinomios no son iguales, pero sí que tienen las mismas raíces.

Propiedad 4.22. *Si dos matrices son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, y supongamos que existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ regular tal que $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned}|XI_n - B| &= |X(P^{-1}I_nP) - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(XI_n)P - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}| \cdot |XI_n - A| \cdot |P| \\ &= |P|^{-1} \cdot |P| \cdot |XI_n - A| = |XI_n - A|\end{aligned} \tag{4.26}$$

□

Notas 4.23.

1. Ya sabíamos que si dos matrices son semejantes, entonces tienen el mismo determinante, la misma traza, y los mismos valores propios. La propiedad 4.22 nos proporciona una demostración alternativa de esto.

2. Gracias a la propiedad 4.22 podemos definir el polinomio característico de un endomorfismo como el polinomio característico de su matriz respecto a una base cualquiera.

Ejercicios 4.24. 4.10, 4.11, 4.12.

4.4. Subespacios fundamentales

Nota 4.25. Supongamos que A es la matriz del endomorfismo f en alguna base. Sea λ un valor propio de f (es decir, λ es un valor propio de A). Entonces:

$$\dim S_f(\lambda) = \dim S_A(\lambda) = n - \operatorname{rango}(\lambda I_n - A) \tag{4.27}$$

Demostración. Recordamos que, si A es la matriz de f en la base fijada, entonces $\lambda I_n - A$ es la matriz del endomorfismo $\lambda\,\mathrm{id}_V - f$ en esa misma base. Por lo tanto el rango de $\lambda\,\mathrm{id}_V - f$ es igual al rango de $\lambda I_n - A$. Finalmente basta tener en cuenta que el rango de un endomorfismo es la dimensión del espacio vectorial menos la dimensión del núcleo. □

Proposición 4.26. *Los subespacios fundamentales de un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita tienen suma directa.*

Demostración. Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son k valores propios distintos del endomorfismo f. Vamos a demostrar que los subespacios fundamentales $S(\lambda_1), \dots, S(\lambda_k)$ tienen suma directa mediante inducción sobre k. Es decir, debemos probar que si $v_1 + \cdots + v_k = \bar{0}$, donde cada vector v_i está en $S(\lambda_i)$, entonces necesariamente $v_i = \bar{0}$ para todo i. El resultado es trivial para $k = 1$. Supongamos que el resultado es cierto para $k - 1$. Por un lado:

$$\begin{aligned} \bar{0} = f(\bar{0}) &= f(v_1 + \cdots + v_k) \\ &= f(v_1) + \cdots + f(v_k) \\ &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \end{aligned} \tag{4.28}$$

Pero por otro lado también podemos escribir el vector nulo como:

$$\bar{0} = \lambda_k \bar{0} = \lambda_k v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \tag{4.29}$$

Restando ambas ecuaciones:

$$(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \cdots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = \bar{0} \tag{4.30}$$

Para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$ el vector $(\lambda_i - \lambda_k)v_i$ está en $S(\lambda_i)$, luego por la hipótesis de inducción $(\lambda_i - \lambda_k)v_i = \bar{0}$, y como $\lambda_i \neq \lambda_k$, necesariamente $v_i = \bar{0}$. Finalmente volviendo a la ecuación inicial, obtenemos que también $v_k = -v_1 - \cdots - v_{k-1} = -\bar{0} - \cdots - \bar{0} = \bar{0}$. □

Definiciones 4.27. Sea λ un valor propio del endomorfismo f.

1. La *multiplicidad geométrica* de λ es la dimensión del subespacio fundamental $S(\lambda)$.

2. La *multiplicidad algebraica* de λ es su multiplicidad como raíz en el polinomio característico.

Nota 4.28. La multiplicidad geométrica de un valor propio es mayor o igual que 1.

Proposición 4.29. *La multiplicidad geométrica de un valor propio es menor o igual que la multiplicidad algebraica.*

Demostración. Fijamos un valor propio λ del endomorfismo f, y llamamos $m = \dim S(\lambda)$ a su multiplicidad geométrica. Tomamos una base $(v_1, \dots, v_m)$ de $S(\lambda)$, y la ampliamos con $v_{m+1}, \dots, v_n$ hasta que $(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ sea base de V. La matriz de f respecto de dicha base es la matriz por bloques:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m & B \\ \hline & C \end{array}\right) \tag{4.31}$$

(B es de tamaño $m \times (n-m)$, y C es de tamaño $(n-m) \times (n-m)$). El polinomio característico de f es el polinomio característico de A:

$$\begin{aligned} \det(XI_n - A) &= \det \left(\begin{array}{c|c} (X-\lambda)I_m & -B \\ \hline & XI_{n-m} - C \end{array}\right) \\ &= (X-\lambda)^m \cdot \det(XI_{n-m} - C) \end{aligned} \tag{4.32}$$

Luego la multiplicidad de λ en el polinomio característico es al menos m. □

Ejercicios 4.30. 4.13, 4.14, 4.15.

4.5. Criterio de diagonalización

Teorema 4.31 (de diagonalización de endomorfismos)**.** *Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita, y sea f un endomorfismo de V. Entonces son equivalentes:*

1. *f es diagonalizable.*
2. *La suma de los subespacios fundamentales es el espacio total V.*
3. *El polinomio característico puede factorizarse como producto de polinomios de grado 1 con coeficientes en el cuerpo de escalares $\mathbb{F}$, y las multiplicidades geométrica y algebraica de cada valor propio coinciden.*

Demostración. Supongamos que f tiene exactamente k valores propios distintos, y llamémoslos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ En general siempre se cumple que los subespacios fundamentales tienen suma directa, y además sabemos por hipótesis que dicha suma es el total. Así que si juntamos una base de cada subespacio fundamental, obtenemos una base de V. Hemos encontrado una base formada por vectores propios, luego f es diagonalizable.
- $(1 \Rightarrow 2)$ Si f es diagonalizable, entonces existe una base $(v_1, \ldots, v_n)$ de V formada por vectores propios. Cada v_i está en un $S(\lambda_j)$, por tanto $\operatorname{span}\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ está contenido en $S(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus S(\lambda_k)$. Como $(v_1, \ldots, v_n)$ es base, $\operatorname{span}\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = V$, luego también $S(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus S(\lambda_k) = V$.

Ahora ya sabemos que el endomorfismo f es diagonalizable si y solo si $\dim V = \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k)$. Para cada valor propio λ_i, denotemos M_i a su multiplicidad algebraica. En general siempre podemos escribir el polinomio característico $p(X)$ como:

$$p(X) = (X - \lambda_1)^{M_1} \cdots (X - \lambda_k)^{M_k} q(X) \tag{4.33}$$

(El polinomio mónico $q(X)$ no tiene raíces en nuestro cuerpo de escalares $\mathbb{F}$). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dim V = \deg p(X) &= M_1 + \cdots + M_k + \deg q(X) \\ &\geq M_1 + \cdots + M_k \\ &\geq \dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_k) \end{aligned} \tag{4.34}$$

Las dos igualdades se cumplen si y solo si $\deg q(X) = 0$, es decir $q(X) = 1$, y $\dim S(\lambda_i) = M_i$ para todo i. □

Ejemplos 4.32. Veamos que la diagonalizabilidad de una matriz depende del cuerpo de escalares $\mathbb{F}$ en el que trabajamos.

1. Sea A la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.35}$$
El polinomio característico de A es $X^2 + 4$. Observa que A es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, pero no es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (y por tanto tampoco es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$).

2. Sea B la matriz:
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.36}$$
El polinomio característico de B es $X^3 - 5X + 3$. Observa que B no es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, pero sí es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (y por tanto también es diagonalizable si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Repaso 4.33. Sea $c_0 + c_1 X + \cdots + c_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio con coeficientes enteros, con $c_0 \neq 0$ y $c_n \neq 0$. Si $a/b \in \mathbb{Q}$ es una raíz de dicho polinomio, donde a y b son números enteros coprimos entre sí, entonces a divide a c_0, y b divide a c_n.

Ejercicios 4.34. 4.16, 4.17, 4.18, 4.19.

Ejercicios valores y vectores propios

Ejercicio 4.1. Calcula los valores propios y los subespacios fundamentales de las siguientes matrices, según el cuerpo de escalares sea $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

Ejercicio 4.2. Sea $A \in M_n(\mathbb{Q})$, sea $\lambda \in \mathbb{Q}$.

1. Demuestra que A es regular si y solo si 0 no es valor propio de A.
2. Supongamos que A es regular. Demuestra que λ es valor propio de A si y solo si λ^{-1} es valor propio de A^{-1}.
3. Prueba que si λ es valor propio de A entonces λ^2 es valor propio de A^2.
4. Prueba que, si λ^2 es valor propio de A^2, entonces o bien λ o bien $-\lambda$ es valor propio de A.

Ejercicio 4.3. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz cuyas entradas son todas mayores o iguales que 0. Supongamos que cada una de las filas de A cumple que la suma de sus n componentes es 1.

1. Encuentra un vector propio de A no nulo de valor propio 1.

Consideramos ahora A como una matriz de $M_n(\mathbb{C})$. Sea $(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ un vector propio de valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea $|x_k| = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

2. Prueba que $|\lambda x_i| \leq |x_k|$ para cada $i = 1, \ldots, n$.
3. Demuestra que $|\lambda| \leq 1$.

Sea $B \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz cuyas entradas son todas mayores o iguales que 0, y tal que cada una de sus columnas cumple que la suma de sus n componentes es 1.

4. Prueba que 1 es valor propio de B, y que todos los valores propios de B tienen módulo menor o igual que 1.

Ejercicio 4.4. Para cada una de las siguientes matrices $A_i \in M_3(\mathbb{R})$, halla una matriz $D_i \in M_3(\mathbb{R})$ diagonal y una matriz $P_i \in M_3(\mathbb{R})$ regular tales que $D_i = P_i^{-1} A_i P_i$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

Ejercicio 4.5. Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

1. Demuestra que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ si y solo si $b = 0$.

2. Encuentra una matriz $P \in M_2(\mathbb{C})$ regular y una matriz $D \in M_2(\mathbb{C})$ diagonal tales que $A = P^{-1}DP$.

Ejercicio 4.6.

1. Demuestra que, si $A \in M_n(\mathbb{C})$ es diagonalizable en $\mathbb{C}$, entonces existe una matriz $B \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $B^2 = A$.

2. Encuentra un ejemplo de un número natural $n \in \mathbb{N}$ y de una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalizable en $\mathbb{R}$ de manera que no existe ninguna matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = A$.

3. Sea $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

   Prueba que no existe ningún endomorfismo $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que $g^2 = f$.

Ejercicio 4.7. Sea $A \in M_3(\mathbb{C})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

Encuentra tres matrices $B_1, B_2, B_3 \in M_3(\mathbb{C})$ distintas tales que $B_i^2 = A$.

Ejercicio 4.8. Calcula A^n para cada $n \in \mathbb{N}$, donde A es la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

Ejercicio 4.9.

1. La sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ se define recursivamente mediante:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad\qquad F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \tag{4.45}$$

   a) Encuentra una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

   b) Calcula el término general de la sucesión de Fibonacci.

2. Sean $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ las sucesiones dadas por:

$$a_{n+1} = 1 - 2b_n \qquad\qquad a_0 = -4 \tag{4.47}$$

$$b_{n+1} = a_n + 3b_n - 1 \qquad\qquad b_0 = 2 \tag{4.48}$$

   a) Halla una matriz $B \in M_3(\mathbb{R})$ tal que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a_n \\ b_n \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

   b) Calcula los términos generales de ambas sucesiones.

Ejercicio 4.10. Sea f un endomorfismo en un espacio vectorial V sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{C}$; llamemos $p(X)$ al polinomio característico de f. En cada apartado calcula $p(X)$ a partir de los datos que se conocen (siempre hay una única posibilidad).

1. $\dim V = 3$, $\det f = 3$, $\operatorname{tr} f = 5$, uno de los valores propios de f es 1.

2. $\deg p(X) = 4$, $\det f = 48$, $\operatorname{tr} f = -1$, $p(-4) = p(3) = 0$.

Ejercicio 4.11. Sabemos que el polinomio característico de una matriz A es $X^5 - 4X + 2$. Calcula el rango de A.

Ejercicio 4.12. Una matriz $A \in M_3(\mathbb{Q})$ cumple que:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{4.50}$$

Encuentra una matriz $D \in M_3(\mathbb{Q})$ diagonal y una matriz $P \in M_3(\mathbb{Q})$ regular tales que $D = PAP^{-1}$.

Ejercicio 4.13. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada cualquiera. Definimos los subespacios de $\mathbb{R}^n$ siguientes:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } A^n \cdot X = \bar{0}\} \\ S_2 &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid A^3 \cdot X = X\} \\ S_3 &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid A^2 \cdot X = -X\} \\ S_4 &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid A^2 \cdot X = A \cdot X\} \end{aligned} \tag{4.51}$$

1. Prueba que S_1, S_2, S_3 tienen suma directa, es decir, $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$.
2. Halla una matriz A que no cumpla ni que $S_1 \oplus S_4$ ni que $S_2 \oplus S_4$.
3. Supongamos de nuevo que A es una matriz cualquiera, calcula:

$$(-A + 2 \cdot I_n) \cdot (A^2 + I_n) + (A - I_n) \cdot (A^2 - A) \tag{4.52}$$

4. Demuestra que $S_3 \oplus S_4$.

Ejercicio 4.14. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ dos matrices que conmutan, es decir, $AB = BA$. Supongamos que la multiplicidad geométrica de todos los valores propios de A es 1. Demuestra que todo vector propio de A también es vector propio de B.

Ejercicio 4.15. Sean $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

Halla una matriz $P \in M_3(\mathbb{R})$ regular de manera que tanto la matriz $P^{-1}AP$ como la matriz $P^{-1}BP$ sean diagonales.

Ejercicio 4.16. ¿Cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables en $\mathbb{R}$? ¿Y en $\mathbb{C}$?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.54}$$

Ejercicio 4.17. Estudia si la siguiente matriz es diagonalizable en $\mathbb{Q}$, según los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{pmatrix} a+1 & b & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

Ejercicio 4.18. Para cada una de las siguientes afirmaciones, o bien demuestra que la afirmación es cierta, o bien encuentra un contraejemplo que pruebe que es falsa.

1. Si dos matrices tienen el mismo polinomio característico, entonces son semejantes.
2. Si dos matrices tienen el mismo polinomio característico, y además ambas son diagonalizables, entonces son semejantes.

Ejercicio 4.19. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, y sea $C \in M_n(\mathbb{R})$ la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

1. Calcula el rango de la matriz $C - (a-b)I_n$.
2. Calcula el polinomio característico de C.

Exámenes

18 de enero de 2021

Problema 1. $(1{,}5 + 1 = 2{,}5$ puntos). Considera los subespacios de $\mathbb{C}^4$:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_4 = 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

$$S_2 = \mathrm{span}\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \qquad S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3a \\ 0 \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$$

a) Para cada $i = 1, 2, 3$, calcula una base de S_i.

b) Prueba que S_1, S_2, S_3 tienen suma directa, es decir, $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$.

Problema 2. $(1 + 0{,}75 + 1 = 2{,}75$ puntos).

a) Define matriz regular y define matriz inversa.

b) Enuncia el teorema de las matrices inversas.

c) Calcula la inversa de la matriz $P \in M_4(\mathbb{R})$ dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Problema 3. (0,75 + 0,75 + 0,75 = 2,25 puntos). En cada apartado, o bien encuentra un ejemplo de lo que se pide, demostrando que cumple todas las propiedades, o bien prueba que no existe.

a) Una matriz $A \in M_4(\mathbb{Q})$ tal que $\text{rango}(A^2) = 2$ y $\text{rango}(A^3) = 2$.

b) Una matriz $B \in M_4(\mathbb{Q})$ tal que $\text{rango}(B^2) = 2$ y $\text{rango}(B^3) = 1$.

c) Una matriz $C \in M_4(\mathbb{Q})$ tal que $\text{rango}(C^3) = 2$ y $\text{rango}(C^4) = 1$.

Problema 4. (0,75 + 1 + 0,75 = 2,5 puntos).

a) Sea $\sigma : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ la permutación dada por $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 3$, $\sigma(5) = 5$. Calcula la signatura de σ.

b) Sea $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ el endomorfismo que a cada $p(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ lo envía a $(1 - X^2) \cdot p''(X) \in \mathbb{R}_3[X]$. Calcula la traza de f.

c) Sea $n \in \mathbb{N}$. Dada una permutación $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, y dado un índice $i \in \{1, \ldots, n\}$, decimos que i es un *punto fijo* de σ si $\sigma(i) = i$. Sean σ y τ permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$, demuestra que el número de puntos fijos de $\sigma \circ \tau$ es igual al número de puntos fijos de $\tau \circ \sigma$.

9 de septiembre de 2021

Problema 1. ($0{,}75+0{,}5+0{,}5+0{,}5 = 2{,}25$ puntos). Considera el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $M_2(\mathbb{Q})$.

a) Enuncia las tres propiedades (P_1, P_2, P_3) que debe cumplir un subconjunto T de $M_2(\mathbb{Q})$ para ser subespacio.

b) Halla un ejemplo de un subconjunto T_1 de $M_2(\mathbb{Q})$ que cumpla P_2 y P_3, pero que no cumpla P_1.

c) Halla un ejemplo de un subconjunto T_2 de $M_2(\mathbb{Q})$ que cumpla P_1 y P_3, pero que no cumpla P_2.

d) Halla un ejemplo de un subconjunto T_3 de $M_2(\mathbb{Q})$ que cumpla P_1 y P_2, pero que no cumpla P_3.

Problema 2. ($1+0{,}75+1 = 2{,}75$ puntos). Considera los siguientes vectores de $\mathbb{C}_4[X]$:

$$\begin{aligned} b_1 &= 1+X^2+2X^3 & c_1 &= 2-X+3X^2 \\ b_2 &= 1+X-6X^4 & c_2 &= 1+X^2-2X^4 \\ b_3 &= -2-2X^2+4X^4 & c_3 &= X^3+X^4 \end{aligned}$$

a) Prueba que la familia (b_1, b_2, b_3) y la familia (c_1, c_2, c_3) son libres.

b) Demuestra que $\operatorname{span}\langle b_1, b_2, b_3\rangle = \operatorname{span}\langle c_1, c_2, c_3\rangle$.

c) Calcula la matriz de cambio de bases de (b_1, b_2, b_3) a (c_1, c_2, c_3).

Problema 3. ($1+1+0{,}5+0{,}5 = 3$ puntos). Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo. Sabemos que la traza de f es 6.

a) Demuestra que si $\det f < 9$, entonces f es diagonalizable.

b) Demuestra que si $\det f > 9$, entonces f no es diagonalizable.

c) Encuentra un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\operatorname{tr} f = 6$ y $\det f = 9$ y que sea diagonalizable.

d) Encuentra un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\operatorname{tr} f = 6$ y $\det f = 9$ y que no sea diagonalizable.

Problema 4. (2 puntos). Decimos que un subespacio S de $\mathbb{R}^6$ es *asimétrico* si para todo vector no nulo $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$ de S se cumple que $(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ *no* está en S. Para cada $n = 1, \ldots, 6$, o bien encuentra un subespacio asimétrico S_n de dimensión n, o bien prueba que no existe.

18 de enero de 2023

Problema 1. (0,75 + 0,75 + 1 = 2,5 puntos).

a) Define matriz de cambio de bases.

b) Enuncia el teorema del rango.

c) Enuncia cómo cambia el determinante de una matriz al aplicarle cada una de las tres operaciones por filas del método de Gauss.

Problema 2. (2,5 puntos). ¿Cuáles de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}_3[X]$ son iguales?

1. $S_1 = \{a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3 \mid 4a_1+a_2+2a_3 = a_0+a_2 = 5a_1+2a_3 = 0\}$.
2. $S_2 = \operatorname{span}\langle 3-2X^2-X^3, -4+2X+2X^2, -1+2X-X^3\rangle$.
3. $S_3 = \operatorname{span}\langle X+2X^2-3X^3, 1+X+X^2, 2+X+3X^3\rangle$.
4. $S_4 = \{(2b+c)+(2b+4c)X-2(b+c)X^2-(2b+3c)X^3 \mid b,c \in \mathbb{R}\}$.

Problema 3. (1,25 + 1,25 = 2,5 puntos).

a) Sea $f : \mathbb{Q}_{10}[X] \to \mathbb{Q}_{20}[X]$ una aplicación lineal. (Recuerda que $\mathbb{Q}_{10}[X]$ es un subespacio de $\mathbb{Q}_{20}[X]$). Sabemos que $\dim(\ker f + \operatorname{im} f) = 7$. Calcula $\dim(\ker f \cap \operatorname{im} f)$.

b) Sea $g : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ un endomorfismo, y sea B su matriz respecto de la base canónica. Sabemos que: el vector $(0,1,-1)^T$ está en el núcleo de g; $(-1,0,1)^T$ es vector propio de valor propio 7; la primera columna de B es $(-1,1,0)^T$. Calcula la imagen del vector $(1,1,1)^T$.

Problema 4. (2,5 puntos). Sea $h : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que h tiene exactamente 6 valores propios distintos.

Decimos que un subespacio S de $\mathbb{C}^6$ es *invariante* si para todo $v \in S$ se cumple que $h(v) \in S$.

b) Sean S y T dos subespacios suplementarios de $\mathbb{C}^6$ tales que ambos son invariantes. Sea w un vector propio de h. Prueba que o bien $w \in S$ o bien $w \in T$.

c) Calcula el número de subespacios de $\mathbb{C}^6$ que son invariantes.

22 de junio de 2023

Problema 1. ($1 + 0{,}75 + 0{,}75 = 2{,}5$ puntos).

a) Define aplicación lineal. Define multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica.

b) Calcula la matriz elemental 3×3 correspondiente a sumarle, a la fila 2, 4 veces la fila 3.

c) Sean C, M dos subconjuntos de un espacio vectorial V. Enuncia qué significa que M sea el menor subespacio de V que contiene a C.

Problema 2. ($2{,}5 + 2{,}5 = 5$ puntos). Sea $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ la aplicación lineal dada por $X \mapsto AX$, donde $A \in M_4(\mathbb{Q})$ es la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{Q}^4$ de manera que la matriz de la aplicación lineal f en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ sea diagonal.

b) Demuestra que no existe ninguna base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{Q}^4$ de manera que la matriz del endomorfismo f en la base $\mathcal{C}$ sea diagonal.

Problema 3. (2,5 puntos).

a) Sean S y T subespacios de un espacio vectorial V. Prueba que $S \cup T$ es subespacio si y solo si o bien $S \subseteq T$ o bien $T \subseteq S$.

b) Demuestra que, en un espacio vectorial real, la unión de un número finito de subespacios es a su vez subespacio si y solo si uno de dichos subespacios contiene a todos los demás.

c) Demuestra que, en un espacio vectorial real de dimensión finita, dado un número finito de subespacios de igual dimensión, podemos encontrar un suplementario común a todos ellos.

10 de enero de 2024

Problema 1. (1,5 + 1,5 = 3 puntos).

a) Sea R el subespacio de $\mathbb{C}^4$:

$$R = \operatorname{span}\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Demuestra que no existe ninguna aplicación lineal $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4$ tal que $\operatorname{im} f = R$.

b) Sea S el subespacio de $\mathbb{C}^3$:

$$S = \operatorname{span}\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle$$

Construye una aplicación lineal $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ tal que $\ker g = S$. (Debes indicar cuál es la imagen de un vector genérico $(x_1, x_2, x_3)^T$).

Problema 2. (1,5 + 1,5 = 3 puntos).

a) De las siguientes matrices de $M_3(\mathbb{Q})$, ¿cuáles son equivalentes entre sí?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz adjunta de la matriz $B \in M_6(\mathbb{Q})$ dada por:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Problema 3. (1,5+1 = 2,5 puntos). Sabemos que el polinomio característico de la matriz $C \in M_4(\mathbb{Q})$ es $X^4 - 8X^3 + 8X^2 + 32X - 48$, y sabemos que $\text{rango}(2I_4 - C) = 2$, donde I_4 es la matriz identidad 4×4.

a) Demuestra que la matriz $C \in M_4(\mathbb{Q})$ es diagonalizable.

b) Calcula el polinomio característico de la matriz $2C$.

Problema 4. $(0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3 = 1{,}5$ puntos).

a) Halla 2024 subespacios de $\mathbb{R}^2$ tales que: cada uno de ellos es distinto de $\mathbb{R}^2$; la suma de 2 cualesquiera de ellos *siempre* es igual a $\mathbb{R}^2$.

Dado un espacio vectorial V, una *colección* es, por definición, una familia de 2024 subespacios de V tales que:

- La suma de 9 cualesquiera de ellos *nunca* es igual al espacio total V.
- La suma de 10 cualesquiera de ellos *siempre* es igual al espacio total V.

b) Halla una colección de $\mathbb{R}^{10}$.

c) Demuestra que no existe ninguna colección en $\mathbb{R}^9$.

d) ¿Existe alguna colección en $\mathbb{R}^{19}$?