LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS. PERFILES DE PROFESORES EN FORMACIÓN SEGÚN SUS NIVELES DE VAN HIELE

The proof in Mathematics. Profiles of prospective teachers attending to their van Hiele levels

Arnal-Bailera, A.[a] y Manero, V.[b]

[a]Facultad de Educación (Universidad de Zaragoza), [b]Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación (Universidad de Zaragoza)

Resumen

En el presente trabajo se abordan los resultados de la administración de un cuestionario para conocer el nivel de van Hiele de los alumnos del Máster de Secundaria en cuanto a la demostración en Geometría. Observamos la presencia de tres perfiles de alumnos cuyas características nos permiten prever ciertas diferencias a la hora de llevar a cabo la enseñanza de la demostración en secundaria. Destaca la presencia de un perfil con un nivel más bajo que el que se supone a algunos alumnos de Bachillerato. Los otros dos perfiles muestran diferencias en cuanto a la presencia de algunas estrategias avanzadas de demostración.

Palabras clave: *demostración, niveles de van Hiele, profesorado en formación*

Abstract

In this work, we show the results of a questionnaire answered by students of a Secondary school Masters degree to know their van Hiele level regarding the proof in Geometry. We observe three different profiles whose characteristics allow us to foresee certain differences when carrying out proof teaching in secondary school. The presence of a profile with a lower level than that assumed for some high school students stands out. The other two profiles show differences regarding the presence of some advanced demonstration strategies.

Keywords: *proof, van Hiele levels, pre-service teachers*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

La enseñanza de la demostración ha sido una preocupación en el contexto de la formación del profesorado de Secundaria tanto desde el punto vista de las tareas a realizar (Martin, McCrone, Bower y Dyndial, 2005) como desde el del conocimiento pedagógico mostrado por los futuros profesores (Dos Santos y Ortega, 2013; Arnal y Oller, 2017). Así mismo, numerosos estudios se han preocupado por el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes para profesor de matemáticas siguiendo el modelo de van Hiele (Lee, 2015; Mayberry, 1983; Ndlovu, 2014; Pandiscio y Knight, 2010; Wang y Kinzel, 2014).

Llevamos a cabo un estudio con 25 alumnos del Máster de Profesorado de Secundaria de la Universidad de Zaragoza. Administramos un cuestionario de preguntas abiertas para evaluar su nivel de van Hiele de razonamiento geométrico. Por razones de espacio nos limitaremos a analizar en este artículo las cuestiones relativas a los niveles de van Hiele respecto de la demostración, aún sabiendo que acometer la enseñanza de la demostración requiere además conocer las características del alumnado, del currículo, etc... La pregunta de investigación que querríamos responder sería ¿Tiene el Profesorado de Secundaria en Formación el nivel de van Hiele necesario para acometer la enseñanza de la demostración que requiere el currículo de secundaria? Para acercarnos a la respuesta de la misma, planteamos dos objetivos de investigación:

Arnal-Bailera, A. y Manero, V. (2021). La demostración en matemáticas. Perfiles de profesores en formación según sus niveles de Van Hiele. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 149 – 156). Valencia: SEIEM.

- Evaluar los niveles de razonamiento geométrico, respecto del proceso de demostración, del Profesorado de Secundaria en Formación bajo el modelo de van Hiele.
- Identificar y diferenciar perfiles del Profesorado de Secundaria en Formación respecto al razonamiento geométrico, en particular para el proceso de demostración.

MARCO TEÓRICO

En los años 50, van Hiele (1957) y van Hiele-Geldof (1957) desarrollaron un modelo que describe el desarrollo del pensamiento geométrico. Este modelo establece que existen cinco niveles de razonamiento geométrico (Van Hiele, 1957, 1986; Jaime y Gutiérrez, 1990). Además estos niveles tienen una naturaleza secuencial y jerárquica, por lo que a lo largo del proceso de aprendizaje de la geometría se pasa por todos ellos en un orden determinado. En este trabajo nos centramos en los niveles intermedios: Nivel 2 (Análisis). Nivel 3 (Deducción informal). Nivel 4 (Deducción formal).

En el contexto de este trabajo, centrado en la demostración, el nivel 2 se caracteriza por pruebas limitadas a verificar que una cierta propiedad se satisface en uno o pocos casos particulares. En el nivel 3, las propiedades se pueden verificar en algunos ejemplos aunque se buscan explicaciones informales basadas en propiedades matemáticas. Por último, en el nivel 4 se realizan pruebas matemáticas de tipo formal. (Jaime y Gutiérrez, 1994).

La elaboración de cuestionarios que midan correctamente los niveles de razonamiento geométrico de van Hiele ha sido un tópico muy trabajado durante muchos años. Usiskin (1982) ya planteó un test de respuesta múltiple compuesto por 25 preguntas. Mayberry (1983) evaluó la naturaleza jerárquica de estos niveles. Con este objetivo, diseñó un test con 128 cuestiones que llevó a cabo con 19 alumnos. Burger y Shaughnessy (1986) diseñan un cuestionario tipo entrevista que consta de un total de 8 actividades. Además describen indicadores de nivel sobre los que estos autores se apoyan para situar las respuestas de cada alumno en un nivel u otro.

La asignación de niveles de van Hiele plantea algunas dificultades, entre ellas, donde situar a alumnos que dan muestras de estar entre dos niveles consecutivos. Para solventar esta dificultad Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) proponen una forma alternativa de evaluar los niveles de van Hiele describiendo un modo de obtener también el grado de adquisición que tienen de ese nivel. En dicho trabajo los autores describen ocho tipos de respuestas diferentes que indican distintos grados de adquisición dentro de un mismo nivel. Así, al evaluar una respuesta la podemos situar dentro de uno de estos tipos para después asignarle un grado de adquisición numérico según la Tabla 1:

Tabla 1. Grado de adquisición

Tipo	0	1	2	3	4	5	6	7
Valor numérico	0	0	20	25	50	75	80	100

Por otra parte, autores como De Villiers, (1987) plantean el estudio de niveles de van Hiele a través de su análisis en diversos procesos o componentes. Jaime y Gutiérrez, (1994) describen los procesos clave que observan para los niveles de van Hiele: Identificación (establecer a qué familia pertenece un cierto objeto geométrico); definición (uso y formulación de definiciones); clasificación (poner distintos objetos geométricos en diversas familias) y demostración (pruebas de afirmaciones). Gutiérrez y Jaime (1995) concretan un test con ocho ítems que permite valorar los primeros 4 niveles de van Hiele de cada alumno así como su grado de adquisición de cada nivel. Además, describen para cada una de las cuestiones, cuáles son los procesos claves que se están evaluando. Notar que este test tiene una fiabilidad superior a los cuestionarios de respuesta múltiple y además permite ser administrado a muestras mayores que los cuestionarios de tipo entrevista. Por todo ello, en el presente trabajo utilizaremos como herramienta dicho test.

Pandiscio y Knight (2010) analizaron los niveles de van Hiele de estudiantes para profesor de Matemáticas en secundaria, obteniendo que su nivel no era el deseado ya que no alcanzaban el nivel

4. Los investigadores consideraban como deseable tener adquirido este nivel para poder promover la adquisición del nivel 3 y el progreso al nivel 4 en alumnos de secundaria.

A lo largo del presente trabajo nos vamos a centrar en medir los niveles de van Hiele respecto de la demostración, entendida esta como demostración analítica o teórica en el sentido descrito por Gutiérrez (2005). En el mismo artículo se presentan tipos de demostración menos rigurosas como ejemplo genérico o experimento mental que en este trabajo consideraremos tipos de justificación. La presencia de la demostración en la enseñanza ha sido puesta en valor en numerosas ocasiones (Schoenfeld, 1994; Mariotti, 2006), tanto para mostrar la necesidad de sustentar el conocimiento matemático como para la comprensión de los conceptos involucrados.

La Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) establece el aprendizaje de la demostración en Bachillerato como obligatorio y transversal a todos los contenidos al situarlo en el bloque 1 (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas). Las referencias explícitas a la demostración solo aparecen en bachillerato Matemáticas I y II englobando aspectos como la iniciación a la demostración mediante varios métodos (reducción al absurdo, inducción…) y razonamientos (deductivo/inductivo) así como diversos lenguajes propios de la demostración (gráfico, algebraico…). En las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales o en las Matemáticas de la ESO las referencias más próximas a la demostración son acerca de la justificación: “Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes”.

MÉTODO Y MUESTRA

Un grupo de 25 alumnos de la especialidad de Matemáticas del Máster de formación del Profesorado de la Universidad de Zaragoza respondieron el cuestionario durante 2 horas.

El cuestionario que utilizamos está centrado en las propiedades de los polígonos y consta de ocho ítems de respuesta abierta, algunos con varios subapartados. En particular, en este estudio nos centramos en las cuestiones que evalúan los niveles de van Hiele asociados al proceso clave de demostración, ítems 5, 6, 7 y 8. Por razones de espacio no presentamos el cuestionario completo, éste se puede consultar, entre otros trabajos, en Gutiérrez y Jaime (1995). Cuestionarios similares, centrados en otros objetos matemáticos se pueden encontrar en la literatura, ver por ejemplo el de Gualdrón y Gutiérrez (2007) focalizado en la semejanza.

Nuestro estudio tiene carácter exploratorio y una finalidad esencialmente descriptiva (Edmonds y Kennedy, 2017). Fundamentalmente, las técnicas utilizadas en el análisis cuantitativo son de tipo estadístico y en el cualitativo, el análisis de contenido (Rico, Fernández-Cano, 2013).

Para decidir el grado de adquisición de cada nivel de razonamiento en cada alumno, seguimos la metodología elaborada por Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) basada en que varios expertos en Didáctica de la Matemática consideran los rasgos del razonamiento matemático mostrado en las tareas del cuestionario por encima de su corrección matemática. Para cada respuesta de un estudiante a un cierto ítem, se obtiene una 3-tupla que indica el porcentaje de adquisición de los niveles de van Hiele que dicho ítem mide. Finalmente, para el cálculo de los grados de adquisición de cada estudiante, realizamos la media de los valores obtenidos en cada ítem.

El análisis cuantitativo incluye la elaboración de conglomerados mediante el uso de SPSS. Dichos conglomerados se obtienen en base a las 3 variables grado de adquisición (nivel 2, nivel 3 y nivel 4). Para la construcción de los conglomerados, aplicamos el algoritmo de K-medias con la distancia euclídea al cuadrado. El número de conglomerados se determina mediante el criterio de Hartigan.

Para caracterizar cada uno de los conglomerados anteriores realizamos un análisis cualitativo consistente en un análisis de contenido. Se toman como unidades las frases aportadas por los alumnos en los ítems referidos. Del análisis realizado en cada ítem emergen varias categorías, entre ellas, uso de las representaciones gráficas o extensión de la respuesta.

RESULTADOS

Análisis cuantitativo

Tras evaluar las respuestas al test obtenemos que el indicador Alfa de Cronbach de consistencia interna es superior a 0,7 (0,836) por lo que consideramos que el test es fiable.

Construcción de conglomerados

La aplicación del criterio de Hartigan nos lleva a utilizar 3 conglomerados. Mostramos en la Tabla 2 los grados de adquisición de cada nivel de van Hiele (Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991).

Tabla 2. Puntuación media y grado de adquisición de cada nivel para cada conglomerado.

	Conglomerado 1		Conglomerado 2		Conglomerado 3	
	Puntuación media	*Grado de adquisición*	*Puntuación media*	*Grado de adquisición*	*Puntuación media*	*Grado de adquisición*
Nivel 2	100	Completo	100	Completo	81,46	Alto
Nivel 3	100	Completo	85,68	Completo	32,97	Bajo
Nivel 4	74,17	Alto	40,80	Medio	2,50	Ninguno

El conglomerado 1 reúne al 24% de los individuos (6), los cuales tienen adquiridos los cuatro niveles de van Hiele, si bien el cuarto nivel en un grado de adquisición alto. El conglomerado 2 engloba al 44% de los individuos (11) que muestran una adquisición completa de los niveles 2 y 3 y un grado medio de adquisición del nivel 4. El tercer conglomerado recoge al 32% de los individuos (8), estos tienen un grado de adquisición alto en el nivel 2, bajo en el nivel 3 y nulo en el nivel 4.

Diferencias entre conglomerados

El test Shapiro-Wilk mostró que ninguna de las variables "grado de adquisición de nivel" sigue una distribución normal. Aplicamos el análisis no paramétrico de Kruskal-Wallis de igualdad de medias concluyendo que para los tres niveles existe al menos un conglomerado con diferencias significativas en cuanto al grado de adquisición. Para distinguir qué medias son estadísticamente diferentes, aplicamos el test de Mann-Whitney para el estudio por parejas. A la luz de los resultados del test de Mann-Whitney, podemos concluir que existen diferencias significativas de adquisición de los niveles para todos los conglomerados y niveles salvo para el caso del nivel 2 en los conglomerados 1 y 2, ya que ambos presentan un grado de adquisición completo en dicho nivel.

Análisis cualitativo

Para distinguir de forma cualitativa los conglomerados más próximos y debido a la falta de espacio, se estudiarán las respuestas dadas por los alumnos de los conglomerados 1 y 2 al ítem 8 y las dadas por los alumnos de los conglomerados 2 y 3 al ítem 5. Elegimos estos ítems en particular por ser algunos de los que permiten asignar los niveles de van Hiele en los que estos conglomerados muestran mayores diferencias.

Al realizar el análisis de contenido en las producciones de los alumnos observamos la aparición de ciertas categorías específicas para cada ítem. En el ítem 8: extensión de la respuesta (número de palabras empleadas), uso de las representaciones gráficas (razonamientos basados en los dibujos frente a razonamiento basado en la información dada), sensibilidad a la necesidad de doble implicación en definiciones equivalentes (demostración o no por doble implicación). En el ítem 5: fundamentación de los argumentos (obtención de conclusiones parciales a partir de propiedades matemáticas o de propiedades numéricas observadas), uso de las representaciones gráficas, formula obtenida (multiplicativa o aditiva),

Diferencias cualitativas entre los conglomerados 1 y 2

El ítem 8 del cuestionario plantea demostrar la equivalencia entre las definiciones de paralelogramo como “cuadrilátero con dos pares de lados paralelos” (a la que llama definición usual) y "cuadrilátero en el que la suma de dos ángulos consecutivos cualesquiera es 180°". En el caso de no aceptarse la equivalencia entre definiciones, se pide dibujar un contraejemplo.

Tabla 3. Diferencias cualitativas entre los conglomerados 1 y 2.

Categoría (indicador)	Conglomerado 1	Conglomerado 2
Extensión de la respuesta (número medio de palabras)	66,2	38,9
Uso de representaciones gráficas (% alumnos que basa su razonamiento en la percepción de los dibujos vs información dada)	Percepción: 50% Información: 50%	Percepción: 82% Información: 18%
Sensibilidad a la doble implicación	Si: 50% No: 50%	Si: 9% No: 91%

Utilizamos las respuestas de los alumnos a este ítem de los conglomerados 1 y 2 para describir algunas de sus prácticas en la demostración. Los alumnos del conglomerado 1 tienen un grado de adquisición alto del nivel 4 mientras los del conglomerado 2 tienen un grado de adquisición medio.

Lo primero que se observa (ver Tabla 3) es una diferencia en la extensión de las demostraciones, siendo mayores las del conglomerado 1. Esta diferencia se puede explicar observando que las demostraciones del conglomerado 2 suelen hacer una referencia indirecta a los resultados matemáticos que se usan encontrándose ejemplos como "Sí, por las propiedades de los ángulos" (Alumno 17). Sin embargo, entre los alumnos del conglomerado 1 nos encontramos con alusiones más explícitas a resultados matemáticos "…ya que s y t son secantes a las paralelas m y n."

Respecto de la importancia de las representaciones gráficas, algunos alumnos del conglomerado 2 obtienen conclusiones fundamentadas total o parcialmente en una representación gráfica "Luego a+b=180º ya que prolongando un lado nos ocurre lo mismo que anteriormente…" (Alumno 19) o "si tenemos 2 lados paralelos, lo podemos representar de la siguiente manera." (Alumno 09). La mayoría de los alumnos del conglomerado 2 asumen propiedades basadas en la percepción del dibujo, como que los ángulos opuestos del paralelogramo son iguales. Sin embargo, la mitad de los alumnos del conglomerado 1 no lo asumen y lo prueban a partir del paralelismo de los lados.

Si bien los alumnos de ambos conglomerados aceptan que puede haber definiciones equivalentes del paralelogramo, los alumnos del conglomerado 2 no son conscientes de la necesidad de hacer una doble implicación para demostrar dicha equivalencia y realizan una sola de las implicaciones, habitualmente la que tiene como hipótesis la definición usual.

Diferencias cualitativas entre los conglomerados 2 y 3

El ítem 5 se compone de dos subapartados (5.1 y 5.2). El subapartado 5.1 plantea deducir la fórmula del número de diagonales de un polígono conocido el número de lados sin ayuda y demostrarla posteriormente. El subapartado 5.2 del cuestionario plantea deducir la fórmula del número de diagonales de un polígono conocido el número de lados a través del estudio de dos casos particulares (n=5 y n=6) y su generalización posterior; en este caso pide justificar la fórmula hallada, no pide demostrarla explícitamente.

Tabla 4. Diferencias cualitativas entre los conglomerados 2 y 3.

Categoría (indicador)	Conglomerado 2	Conglomerado 3
Fundamentación de los argumentos (% de estudiantes que obtienen conclusiones parciales a partir de propiedades matemáticas vs. propiedades numéricas)	Matemáticas: 91% Numéricas: 9%	Matemáticas: 0% Numéricas: 100%
Usos de las representaciones gráficas (% de alumnos que se basan en dibujos para plantear ejemplos exploratorios o casos particulares para generar una sucesión numérica o para razonar sobre la fórmula)	Ej. exploratorios: 46% Razonamiento sobre la fórmula: 27%	Casos particulares para generar sucesión: 91% Razonamiento sobre la fórmula: 9%
Número medio de dibujos realizados	4.2	6

Formula obtenida (% de estudiantes que razona la fórmula de modo aditivo vs. multiplicativo)	Aditiva: 45% Multiplicativa: 45%	Aditiva: 25% Multiplicativa: 12%

Utilizamos las respuestas de los alumnos a este ítem de los conglomerados 2 y 3 para describir sus prácticas a la hora de justificar o demostrarla fórmula obtenida (ver Figura 2). Los alumnos que forman el conglomerado 2, tienen un grado de adquisición completo del nivel 3 mientras los del conglomerado 3 tienen un grado de desarrollo bajo.

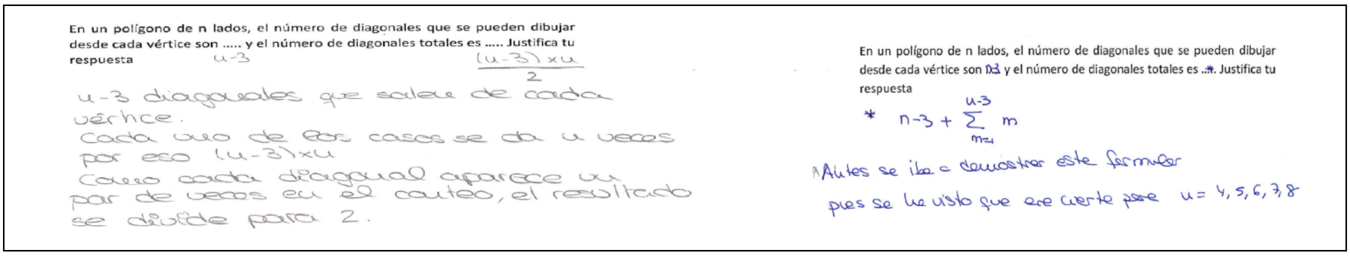

Figura 2. Ejemplos de demostración de alumnos del conglomerado 2 (izquierda) y 3 (derecha)

Revisando el subapartado 5.2 observamos una gran diferencia en la fundamentación de los argumentos expuestos por los alumnos de los conglomerados 2 y 3 (ver Tabla 4). Los alumnos del conglomerado 2 realizan explicaciones basadas en propiedades matemáticas de los polígonos (por ejemplo, el número de diagonales que parten de cada vértice) mientras que los alumnos del conglomerado 3 lo hacen basándose en las regularidades numéricas observadas en los casos previos sin ser capaces de dar una fundamentación matemática a los mismos más allá de ligar las letras que aparecen en la fórmula con el número de vértices o lados (ver Figura 2 - derecha).

Respecto de los dibujos empleados por los alumnos para tratar de demostrar o justificar la fórmula, encontramos un número significativamente mayor (al 90%) de representaciones gráficas en los alumnos del conglomerado 3 (una media de 6 por estudiante) que en el conglomerado 2 (una media de 4,2 por estudiante). Esto estaría en relación con la mayor cercanía de los estudiantes del conglomerado 3 con las prácticas propias del nivel 2 de van Hiele en el que se sustentan los razonamientos de este tipo exclusivamente en el estudio de casos particulares.

Respecto del uso las representaciones gráficas hechas por los estudiantes, se aprecia un uso fundamentalmente exploratorio en los miembros del conglomerado 2 que realizan dibujos como medio de situarse frente al enunciado a demostrar (46%). En el conglomerado 3, los dibujos son utilizados para obtener el número de diagonales y construir con estos números una sucesión numérica de la que se quiere encontrar el término general.

A la hora de construir la fórmula sin ayuda, encontramos dos posibles soluciones correctas. Una fórmula basada en razonamientos de tipo aditivo (ver Figura 2 - derecha) y otra basada en razonamientos de tipo multiplicativo (ver Figura 2 - izquierda). En el conglomerado 2 casi todos los estudiantes obtienen una fórmula correcta, habiendo un equilibrio entre los que dan la fórmula de modo multiplicativo y los que la dan en forma aditiva. Por su parte, en el conglomerado 3 más de la mitad de los estudiantes no obtienen la fórmula correcta, llegando solo uno a su forma multiplicativa.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Respecto del primer objetivo, "evaluar los niveles de razonamiento geométrico, respecto del proceso de demostración, del Profesorado de Secundaria en Formación bajo el modelo de van Hiele" la utilización del cuestionario (Gutiérrez y Jaime, 1995) se ha mostrado adecuada dando unos valores de consistencia adecuados.

Respecto del segundo objetivo, "identificar y diferenciar perfiles del Profesorado de Secundaria en Formación respecto al razonamiento geométrico, en particular para el proceso de demostración" hemos podido construir tres conglomerados correspondientes con tres perfiles estadísticamente diferentes con características cualitativas propias. La distinción entre los conglomerados formados por estudiantes con diferentes desarrollos del nivel 4, muestra la necesidad de profundizar más allá de los niveles de van Hiele a la hora de caracterizar los grupos de estudiantes para profesor cuando realizan demostraciones (Wang y Kinzel, 2014). El conglomerado 1 está formado por alumnos que dan respuestas de mayor extensión que el resto utilizando de un modo formal resultados matemáticos anteriores en sus procesos e incluyendo ideas como la equivalencia entre definiciones junto con un uso de las representaciones gráficas solamente como medio para la representación del problema. El conglomerado 2 está formado por alumnos que apoyan sus demostraciones en explicaciones de propiedades matemáticas, si bien suelen hacer referencias indirectas o informales a las mismas junto con un uso de las representaciones gráficas de las que obtienen datos basándose en su percepción. El conglomerado 3 está formado por alumnos que tienen dificultades para llevar a cabo las demostraciones propuestas y que, si acaso, logran avanzar apoyando sus razonamientos en dibujos y regularidades numéricas por encima de propiedades o resultados matemáticos.

La literatura dice que los alumnos de secundaria y bachillerato estarían situados mayoritariamente entre los niveles 2 y 3 (Gutiérrez y Jaime, 1995), encontrándose algunos alumnos en bachillerato incluso con un grado de adquisición intermedio-alto del nivel 3 y que debería promoverse su progresión hacia el nivel 4 (Pandiscio y Knight, 2010). Esto nos hace distinguir entre aquellos alumnos del máster que tienen adquirido de forma relevante el tercer nivel (68%) y aquellos que no (32%). Por otra parte, el Currículo de Bachillerato enfoca el trabajo con la demostración desde un punto de vista formal. Entre los contenidos figuran: “Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc. Razonamiento deductivo e inductivo.” Estos contenidos se podrían situar más en el nivel 4 que en el nivel 3 ya que corresponden con métodos formales de demostración. A la vista de los datos de la Tabla 2 y del currículo, los alumnos presentes en el conglomerado 1 (24%) van a tener un nivel de razonamiento geométrico en los aspectos relacionados con la demostración suficiente para enseñar a sus futuros alumnos dado el currículo actual; los del conglomerado 2 (44%), pueden encontrar algunas dificultades sobre todo en Bachillerato y los del conglomerado 3 (32%) tienen un nivel inferior al de sus futuros alumnos y al requerido para poner en práctica el currículo y hacer progresar a sus alumnos desde el nivel 2 al 3 o incluso al 4. Esto es consistente con los resultados de Pandiscio y Knight (2010) que mostraban que, en media, los estudiantes para profesor de secundaria estaban estadísticamente por debajo del nivel 4.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Grupo de Investigación en Educación Matemática (S60_20R) del Gob. de Aragón y el P. de Investigación XXXXXXX del MINECO

Referencias

Arnal-Bailera, A., y Oller-Marcén, A. (2017). Formación del profesorado y demostración matemática. Estudio exploratorio e implicaciones. *Bolema, Rio Claro (SP)*, *31*(57), 135-157.

Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development on geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17*(1), 31-48.

De Villiers, M. D. (1987). Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the van Hiele theory: Some critical comments. (Research Unit for Mathematics Education, Univ. Of Stellenbosch: Stellenbosch, R. Of South Africa).

Dos Santos, C., y Ortega, T. (2013). Perfiles del Profesorado sobre la Enseñanza y Uso de la Demostración. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *4,* 27-45.

Edmonds, W.A. y Kennedy, T.D. (2017). *An applied reference guide to research designs: Qualitative, quantitative and mixed methods*. London: SAGE.

Gualdrón, E. y Gutiérrez, J. (2007). Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento geométrico de van Hiele para la semejanza. En P. Flores y P. Bolea (Eds.) *Investigación en Educación matemática XI*, (pp. 369-380). La Laguna: SEIEM.

Gutiérrez, A. (2005): Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, en Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (Eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* 27-44.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995). Towards the design of a standard test for the assessment of the students reasoning in geometry. *Proceedings of the 19th PME conference*, (vol. 3, pp. 11-18). Recife, Brasil: PME.

Gutiérrez, A., Jaime, A., y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 237-251.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla, España: Alfar.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. *Proceedings of the 18th PME conference*, (vol. 3, pp. 41-48). Lisboa, Portugal: PME.

Lee, M. Y. (2015). The Relationship between Pre-service Teachers' Geometric Reasoning and their van Hiele Levels in a Geometer's Sketchpad Environment. *Korean Mathematical Education Journal Series D: Mathematics Education Research*, *19*(4), 229–245.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam, Holanda: Sense.

Martin, T. S., McCrone, S. S., Bower, M. L., y Dyndial, J. (2005). The interplay of teacher and student action in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 95-124.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *JournalforResearch in MathematicsEducation*, *14*(1), 58-69.

Ndlovu, M. (2014). Pre-service teachers' understanding of geometrical definitions and class inclusion: an analysis using the Van Hiele model. *INTED2014 Proceedings*, (pp. 6642-6652). Valencia, España: INTED.

Pandiscio, E. A., y Knight, K. C. (2010). An investigation into the van Hiele levels of understanding geometry of preservice mathematics teachers. Journal of Research in Education, 20(1), 45-53.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.) *Análisis didáctico en Educación matemática.* (pp. 1-22). Granada.

Schoenfeld, A. (1994) What do we know about curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, *13*(1), 55-80.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (ERIC Document Reproduction Service Nº ED 220 288). Columbus, USA.: ERIC.

Van Hiele-Geldof, D. (1957). The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School. Tesis doctoral no publicada. Utrech, Holanda: Universidad de Utrech. (Traducción al inglés en Fuys, Geddes, Tischler, 1984).

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la compresión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. Tesis doctoral no publicada. Utrech, Holanda: Universidad de Utrech. (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Nueva York, USA: Academic Press.

Wang, S., y Kinzel, M. (2014) How do they know it is a parallelogram? Analysing geometric discourse at van Hiele Level 3, *Research in Mathematics Education, 16*(3), 288-305.